Esame di Geometria
Ingegneria Elettrotecnica a.a. 2020/21
12 Febbraio 2021

La durata dell'esame è di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (qualora lo spazio non fosse sufficiente è possibile usare il retro del foglio).

Esercizio 1 Si considerino le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2 \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} x = s \\ y = 5 + s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

a) Stabilire se le due rette sono parallele, coincidenti, incidenti, o sghembe. I vettori direttori delle due rette sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Essi non sono proporzionali e dunque le rette non risultano parallele né coincidenti. Inoltre il sistema $\begin{cases} 3 + t = s \\ -1 + t = 5 + s \\ 2 = 2 + s \end{cases}$ non ammette soluzioni, pertanto le rette non sono incidenti e risultano sghembe.

b) Determinare, se possibile, l'equazione parametrica di una retta r'' che sia ortogonale e incidente a entrambe. Dal momento che r e r' sono sghembe la retta r'' esiste ed è unica. Per determinarla utilizziamo i punti mobili $H_t = \begin{pmatrix} 3 + t \\ -1 + t \\ 2 \end{pmatrix}$ e $H'_s = \begin{pmatrix} s \\ 5 + s \\ 2 + s \end{pmatrix}$. Imponiamo che il vettore $\vec{H_t H'_s} = \begin{pmatrix} s - 3 - t \\ 6 + s - t \\ s \end{pmatrix}$ sia ortogonale a entrambi i vettori direttori di r e r':

$$\begin{cases} s - 3 - t + 6 + s - t = 0 \\ s - 3 - t + 6 + s - t + s = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ s = 0 \end{cases}.$$

La retta r'' passerà dunque per i punti $H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $H' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, con vettore direttore

$\vec{HH'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. Possiamo scegliere come parametri direttori di r'' i valori $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e concludiamo che r'': $\begin{cases} x = -u \\ y = 5 + u \\ z = 2 \end{cases}$.

c) Determinare la distanza fra le rette r e r'. La distanza fra le due rette è pari alla norma del vettore $\vec{HH'}$ determinato al punto precedente:

$$d(r, r') = d(H, H') = ||\vec{HH'}|| = \frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2 + 9^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}\,.$$

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U di equazioni $\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

e il sottospazio $V = L\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$.

a) Determinare una base ortonormale di U e una base ortonormale di $U \cap V$. Determiniamo una base di U risolvendo il sistema. Tramite l'algoritmo di Gauss otteniamo il sistema equivalente $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ da cui $U = L\left[\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$. Dal momento che i due vettori sono ortogonali fra loro, una base ortonormale di U è $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Ora, il vettore $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ non appartiene a V, per cui $\dim(U+V) = 4$. Ne deduciamo che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 2 + 3 - 4 = 1\,.$$

Osservando che il vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ appartiene sia a U che a V esso rappresenta necessariamente una base. Concludiamo che la base ortonormale di $U \cap V$ cercata è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

b) Determinare la dimensione di $(U+V) \cap V^{\perp}$.

Come osservato nel punto precedente $\dim(U+V) = 4$, pertanto $U + V = \mathbb{R}^4$. Ne segue che $(U+V) \cap V^{\perp} = V^{\perp}$. Ricordando che $\mathbb{R}^4 = V \oplus V^{\perp}$ otteniamo

$$\dim\Big((U+V) \cap V^{\perp}\Big) = \dim(V^{\perp}) = 4 - \dim(V) = 1\,.$$

c) Stabilire se esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker} f = U$ e $\mathrm{Im} f = V$. Se esistesse un tale endomorfismo dovrebbe verificare il Teorema della dimensione: $\dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = 4$. Dal momento che $\dim(U) + \dim(V) = 5$, deduciamo che non esiste un endomorfismo con le caratteristiche richieste.

Esercizio 3 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli autovalori di A e una base dei relativi autospazi. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 4)$. Gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(0) = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + z = 0 \right\} = L\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E(4) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + 3z = 0 \wedge x + 4y + z = 0 \right\} = L\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

b) Determinare, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$. Abbiamo mostrato al punto precedente che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Pertanto A è diagonalizzabile e dunque le matrici cercate sono:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Sia $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice non diagonalizzabile tale che $MA(0) = 1$. Stabilre se BB^t è diagonalizzabile e se BB^t è invertibile. Osserviamo che la matrice BB^t è simmetrica per ogni $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, pertanto risulta diagonalizzabile per il Teorema Spettrale. Inoltre, l'ipotesi sulla molteplicità algebrica implica che $\dim(\mathrm{Ker}B) = MG(0) = 1$, da cui $\det(B) = 0$. Sfruttando il Teorema di Binet otteniamo $\det(BB^t) = \det(B)\det(B^t) = (\det(B))^2 = 0$, da cui si deduce che la matrice BB^t non è invertibile.

Esercizio 4 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti reali. Dati i seguenti polinomi in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = x^2 + 2x + \lambda, \quad p_3(x) = \lambda x^2 + x, \quad p_4(x) = x^3 + \lambda$$

a) Determinare le coordinate dei polinomi $p_i(x)$ rispetto alla base canonica (ordinata) di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$: $\mathcal{BC} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F_{\mathcal{BC}} : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^4$ che assegna a ciascun polinomio le sue coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{BC}$. Abbiamo:

$$F_{\mathcal{BC}}\,(p_1(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; F_{\mathcal{BC}}\,(p_2(x)) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; F_{\mathcal{BC}}\,(p_3(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \; F_{\mathcal{BC}}\,(p_4(x)) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Determinare gli eventuali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui i polinomi $p_i(x)$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Dal momento che l'applicazione lineare $F_{\mathcal{BC}}$ è un isomorfismo basterà determinare gli eventuali valori di λ tali che i vettori delle coordinate determinati al punto precedente formino una base. Essendo 4 vettori in $\mathbb{R}^4$ è sufficiente imporre che il determinante della matrice ottenuta incolonnando tali vettori sia diverso da zero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2 \neq 0.$$

Concludiamo che i quattro polinomi formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ per ogni $\lambda \neq 1$.

c) Si ponga $\lambda = 0$. Determinare, se possibile, le coordinate del polinomio $p(x) = 1 - \; x^2 - \; x^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$.

Si tratta di determinare i coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_1(1 + x) + a_2(x^2 + 2x) + a_3 x + a_4 x^3 = 1 - x^2 - x^3$$
$$a_1 + (a_1 + 2a_2 + a_3)x + a_2 x^2 + a_4 x^3 = 1 - x^2 - x^3\,.$$

Imponiamo dunque il sistema

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = -1 \end{cases}$$

Concludiamo che le coordinate cercate sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5 Sia $f\colon Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Osserviamo che

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Le colonne della matrice cercata si ottengono dalle coordinate dei trasformati della base canonica, pertanto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$. Calcoliamo il determinante di M sviluppando secondo Laplace lungo la terza riga:

$$\det(M) = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0\,.$$

Ne segue che $\dim(\mathrm{Ker} f) = 0$ e $\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Per il Teorema della dimensione $\dim(\mathrm{Im} f) = 4$, da cui si deduce $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4$.

c) Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, invertibile. Dai risultati del punto precedente deduciamo che f è iniettiva e suriettiva, dunque anche invertibile.

Esercizio 6 a) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$. Stabilire se $U = L[v_1, v_2, v_3]$. Il vettore v_3 è combinazione lineare degli altri: $v_3 = v_1 + v_2$. Ne segue che $L[v_1, v_2, v_3] = L[v_1, v_2]$. Inoltre v_1 e v_2 non sono proporzionali, dunque generano un sottospazio di dimensione 2.Si verifica immediatamente che sia v_1 che v_2 risolvono l'equazione che definisce il sottospazio U, pertanto $L[v_1, v_2] \subseteq U$. Dal momento che $\dim(U) = 2$ si ha necessariamente l'uguaglianza.

b) Dopo averla classificata, si scriva l'equazione canonica della conica seguente:

$$3(1 + \sqrt{3})x^2 + 6xy + 3(1 - \sqrt{3})y^2 + 2x + 2y + 1 = 0\,.$$

Calcoliamo gli invarianti: $\begin{cases} I_1 = \mathrm{tr}(Q) = 6 \\ I_2 = \det(Q) = \det \begin{pmatrix} 3(1+\sqrt{3}) & 3 \\ 3 & 3(1-\sqrt{3}) \end{pmatrix} = -27 < 0 \\ I_3 = \det(A) = \det \begin{pmatrix} 3(1+\sqrt{3}) & 3 & 1 \\ 3 & 3(1-\sqrt{3}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -27 \neq 0 \end{cases}$

Si tratta dunque di un'iperbole reale. Inoltre il polinomio caratteristico di Q è

$$p_Q(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(Q)\lambda + \det(Q) = \lambda^2 - 6\lambda - 27$$

da cui deduciamo gli autovalori: $\lambda = 9$ e $\mu = -3$. Infine, la forma canonica dell'iperbole è $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$. Sostituendo otteniamo:

$$9X^2 - 3Y^2 + 1 = 0\,.$$