

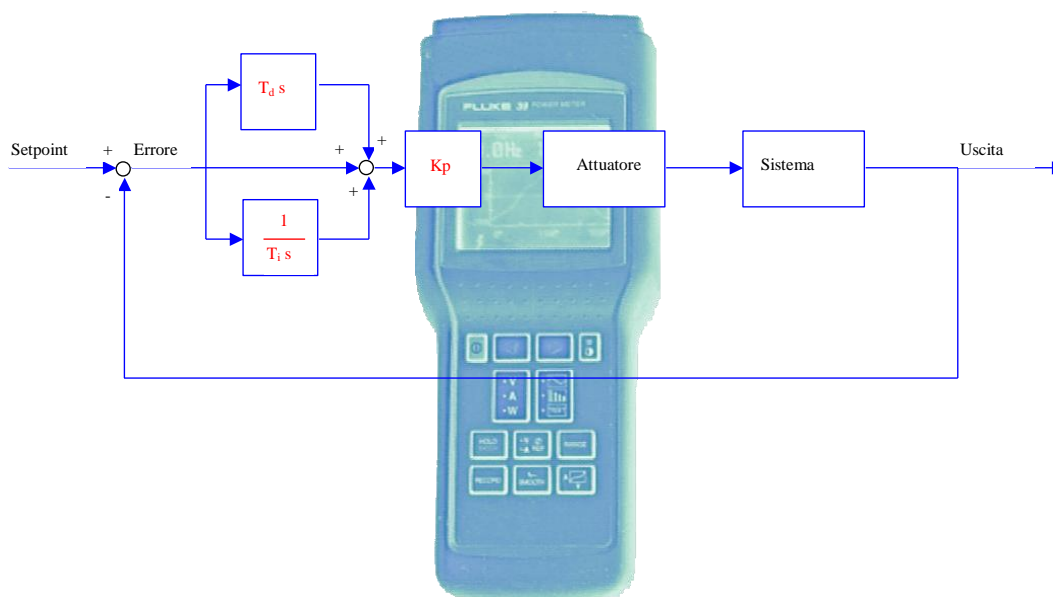


SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Dispense dal Corso di
SISTEMI DI MONITORAGGIO E CONTROLLO
DEGLI IMPIANTI ENERGETICI

Prof. Luigi Sorabella
Prof. Luciano Gramiccia



X – METODI DI ANALISI DEI SISTEMI DI CONTROLLO

Con la collaborazione di

Ing. Luisa Ferroni
Ing. Paolo Fargione

Rev. 7 – Marzo 2019

CAPITOLO X

METODI DI ANALISI DEI SISTEMI DI CONTROLLO

A Cura dei Proff. L. Sorabella e L. Gramiccia

INDICE

1	ALGEBRA DEI BLOCCHI	7
1.1	Simboli usati nell'algebra dei blocchi	7
1.1.1	<i>Blocco</i>	7
1.1.2	<i>Nodo</i>	7
1.1.3	<i>Entrate nel sistema</i>	7
1.1.4	<i>Uscite dal sistema</i>	7
1.1.5	<i>Segmento orientato</i>	8
1.1.6	<i>Diramazione</i>	8
1.2	Connessione tra blocchi	8
1.2.1	<i>Connessione in cascata o in serie</i>	8
1.2.2	<i>Connessione in parallelo</i>	9
1.2.3	<i>Blocchi in anello chiuso (con retroazione negativa)</i>	9
1.2.4	<i>Blocchi in anello chiuso (con retroazione positiva)</i>	10
1.3	Operazioni tra blocchi e blocchi equivalenti	11
1.4	Esempi di operazioni tra blocchi	14
1.4.1	<i>Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso</i>	14
1.4.2	<i>Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso</i>	14
1.4.3	<i>Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso</i>	15
1.4.4	<i>Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso</i>	15
2	METODI PER LA CARATTERIZZAZIONE DELLA RISPOSTA ARMONICA	17
2.1	Costruzione dei Diagrammi di Bode	17
2.1.1	<i>Proprietà dei diagrammi di Bode</i>	21
2.1.2	<i>Diagrammi di Bode di funzioni elementari</i>	24
2.1.3	<i>Diagrammi di Bode asintotici</i>	37
2.2	Diagrammi di Nyquist	42
2.2.1	<i>Proprietà dei diagrammi di Nyquist</i>	42
2.2.2	<i>Procedura di costruzione dei diagrammi di Nyquist</i>	42
2.2.3	<i>Esempi di costruzione dei diagrammi di Nyquist</i>	43

1 ALGEBRA DEI BLOCCHI

L'algebra degli schemi a blocchi è un insieme di operazioni che permettono di semplificare schemi complessi.

1.1 Simboli usati nell'algebra dei blocchi

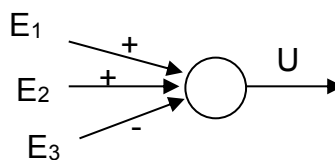
1.1.1 Blocco

Il blocco è una struttura nella quale confluisce un solo segmento di linea orientato e dal quale ne parte un altro solo. Il segnale E associato al segmento di linea orientato che arriva al blocco si definisce entrata del blocco, mentre il segnale U associato al segmento di linea orientato che parte dal blocco si definisce uscita del blocco. Il legame matematico tra questi due segnali si definisce Funzione di Trasferimento del blocco G .



1.1.2 Nodo

Il nodo rappresenta l'operazione di somma algebrica di due o più segnali omogenei. In esso hanno termine i segmenti orientati (entrate del nodo) rappresentativi dei segnali addendi E_1, E_2, \dots, E_n , e da esso ha inizio il segmento orientato rappresentativo del segnale somma o differenza (uscita del nodo) U .

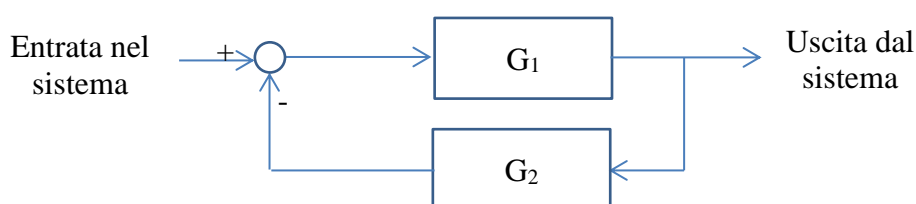


1.1.3 Entrate nel sistema

Le entrate di un sistema sono quei segmenti orientati che non hanno inizio né da un blocco né da un nodo.

1.1.4 Uscite dal sistema

Si definiscono uscite quei segmenti orientati che non terminano né in un blocco né in un nodo

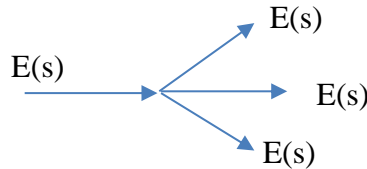


1.1.5 Segmento orientato

Il segmento orientato indica il percorso del segnale. Ciascun segnale viene rappresentato da un segmento di linea orientato secondo la direzione in cui procede il segnale.

1.1.6 Diramazione

Il punto di diramazione è un segmento di linea orientato che si ramifica in più segmenti orientati nella stessa direzione. Questo perché uno stesso segnale può rappresentare l'entrata di più nodi o blocchi. In un punto di diramazione entra uno ed un solo segmento di linea orientato.



1.2 Connessione tra blocchi

Di seguito si riportano le tipiche connessioni tra blocchi che si riscontrano in un sistema di controllo.

1.2.1 Connessione in cascata o in serie

In questo caso i blocchi sono collegati in modo che l'uscita del primo blocco costituisce l'entrata del secondo.



La funzione di trasferimento di più blocchi in cascata è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi.



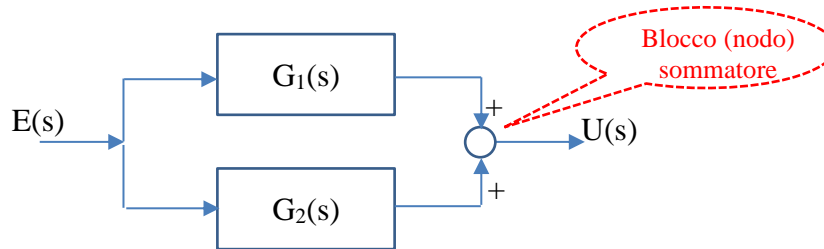
La dimostrazione è la seguente:

Essendo : $G_1(s) = \frac{U_1(s)}{E(s)}$ $G_2(s) = \frac{U(s)}{U_1(s)}$

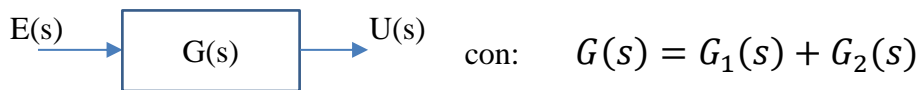
Si ha: $G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{U_1(s)}{E(s)} \cdot \frac{U(s)}{U_1(s)} = \frac{U(s)}{E(s)} = G(s)$

1.2.2 Connessione in parallelo

Due blocchi sono connessi in parallelo quando ricevono lo stesso segnale d'ingresso e le loro uscite sono sommate.



La funzione di trasferimento di più blocchi in parallelo è data dalla somma delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi.



La dimostrazione è la seguente:

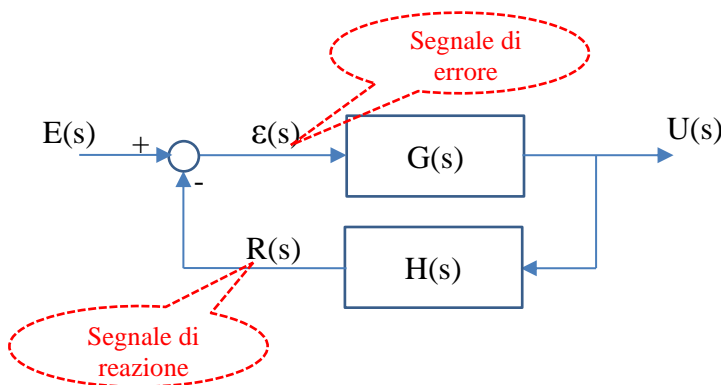
Essendo : $G_1(s) = \frac{U_1(s)}{E(s)}$ $G_2(s) = \frac{U_2(s)}{E(s)}$

si ha: $U(s) = U_1(s) + U_2(s) = G_1(s) \cdot E(s) + G_2(s) \cdot E(s) = E(s) \cdot [G_1(s) + G_2(s)]$

quindi: $G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = G_1(s) + G_2(s)$

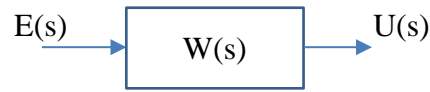
1.2.3 Blocchi in anello chiuso (con retroazione negativa)

Lo schema di un sistema a catena chiusa in reazione negativa è il seguente:



In questo sistema il nodo sommatore effettua la differenza tra il segnale d'ingresso e quello di reazione.

Lo schema equivalente è il seguente:



dove la FdT equivalente (FdT ad anello chiuso) vale: $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s) \cdot H(s)}$ (1)

la $H(s) = \frac{R(s)}{U(s)}$ è detta FdT del blocco di reazione

la FdT $L(s) = G(s) \cdot H(s)$ è detta FdT ad anello aperto

La dimostrazione della (1) è la seguente:

Essendo: $U(s) = G(s) \cdot \varepsilon(s)$ (3)

$$\varepsilon(s) = E(s) - R(s) = E(s) - U(s) \cdot H(s) \quad (4)$$

e sostituendo $\varepsilon(s)$ nella (3) si ha:

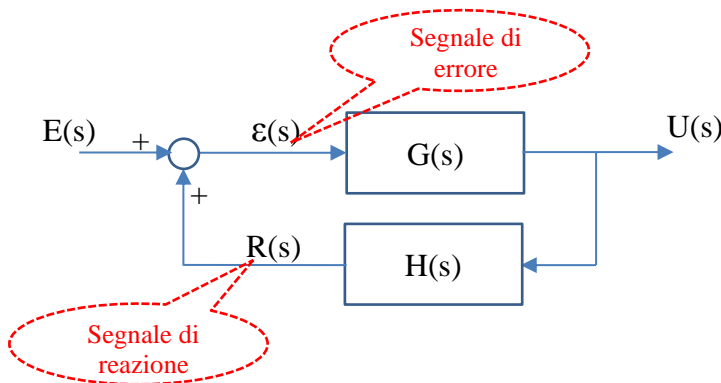
$$U(s) = G(s) \cdot [E(s) - U(s) \cdot H(s)]$$

$$U(s) + U(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = G(s) \cdot E(s) \rightarrow U(s) \cdot [1 + G(s) \cdot H(s)] = G(s) \cdot E(s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

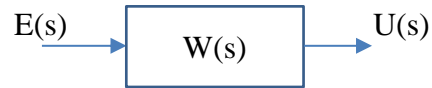
1.2.4 Blocchi in anello chiuso (con retroazione positiva)

Lo schema di un sistema a catena chiusa in reazione positiva è il seguente:



In questo sistema il nodo sommatore effettua la somma tra il segnale d'ingresso e quello di reazione.

Lo schema equivalente è il seguente:



dove la FdT equivalente (FdT ad anello chiuso) vale: $W(s) = \frac{G(s)}{1-G(s) \cdot H(s)}$ (5)

la $H(s) = \frac{R(s)}{U(s)}$ è detta FdT del blocco di reazione

la FdT $L(s) = G(s) \cdot H(s)$ è detta FdT ad anello aperto

La dimostrazione della (1) è la seguente:

$$\text{Essendo: } U(s) = G(s) \cdot \varepsilon(s) \quad (6)$$

$$\varepsilon(s) = E(s) + R(s) = E(s) + U(s) \cdot H(s) \quad (7)$$

e sostituendo $\varepsilon(s)$ nella (6) si ha:

$$U(s) = G(s) \cdot [E(s) + U(s) \cdot H(s)]$$

$$U(s) - U(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = G(s) \cdot E(s) \rightarrow U(s) \cdot [1 - G(s) \cdot H(s)] = G(s) \cdot E(s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s) \cdot H(s)}$$

1.3 Operazioni tra blocchi e blocchi equivalenti

Per collegamenti più complessi occorre procedere per gradi e sostituire i blocchi in serie, in parallelo e in retroazione, fino ad ottenere un singolo blocco, avente una funzione di trasferimento uguale alla risultante dalla composizione delle singole funzioni di trasferimento di ogni blocco.

Nelle figure seguenti sono riportate alcune operazioni di manipolazione di blocchi.

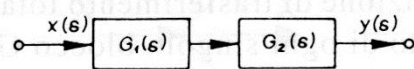
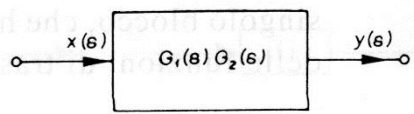
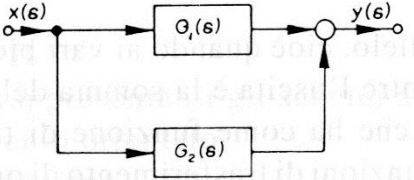
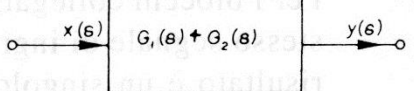
N°	Schemi a blocchi originari	Schemi a blocchi equivalenti
1		
2		

Figura 1 - Blocchi collegati in serie (1) e in parallelo (2)

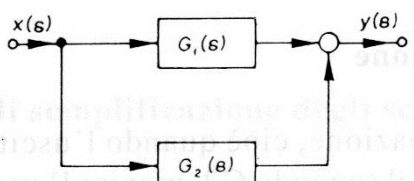
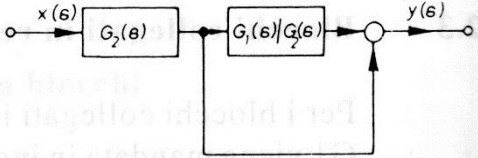
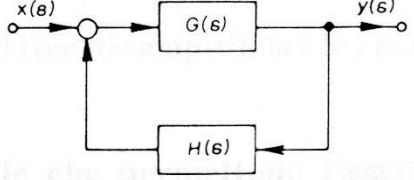
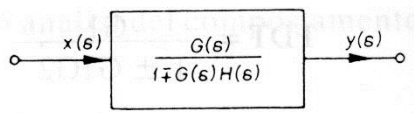
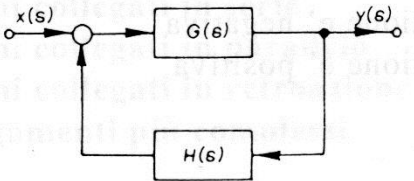
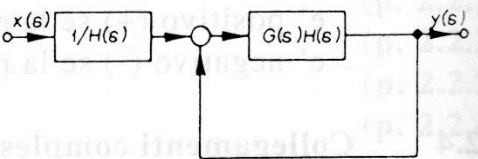
3		
4		
5		

Figura 2 - Blocchi collegati in retroazione (4,5,6)

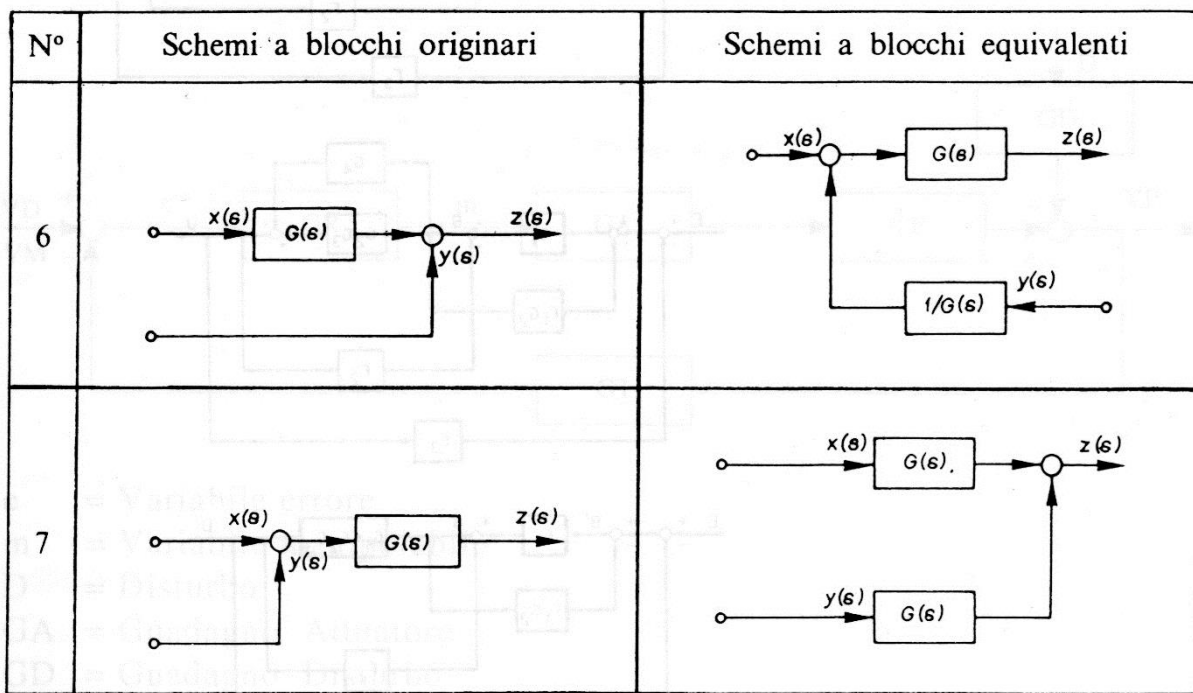


Figura 3 - Spostamento indietro e avanti di nodi (6,7)

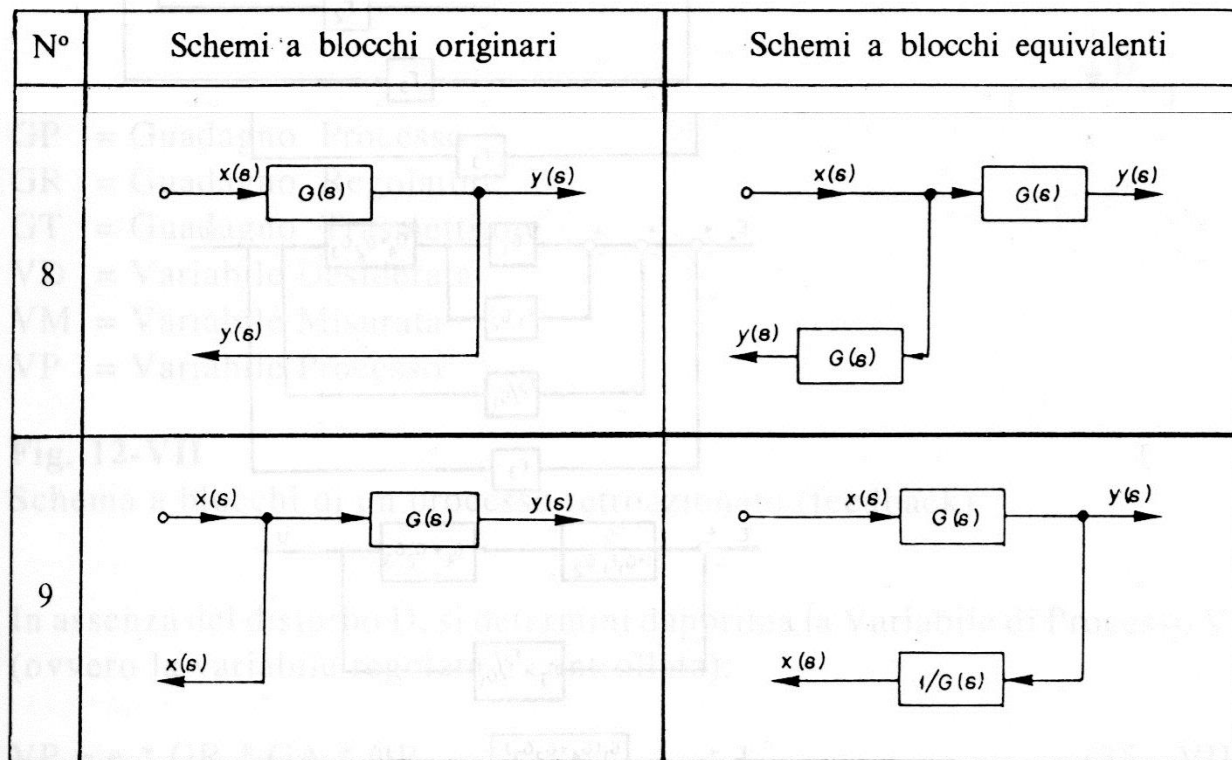
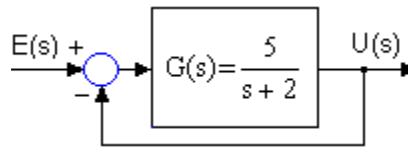


Figura 4 - Spostamento indietro e avanti di diramazioni (8,9)

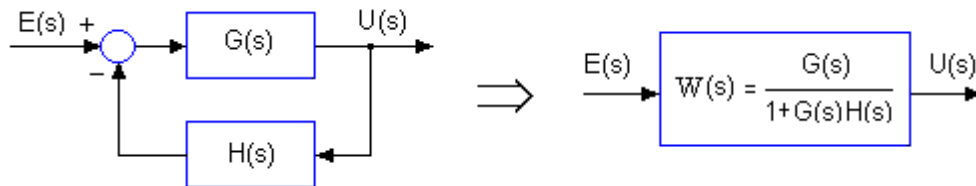
1.4 Esempi di operazioni tra blocchi

1.4.1 Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso

Determinare la F.d.T. ad anello chiuso del sistema seguente:



Il circuito retro-azionato è equivalente al circuito seguente:

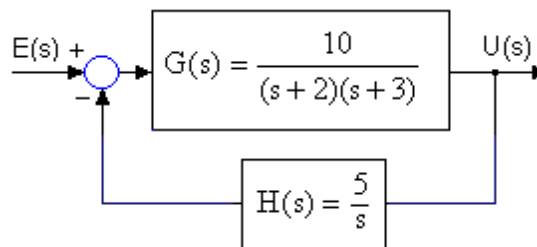


In questo caso $G(s) = \frac{5}{s+2}$ e $H(s) = 1$ quindi:

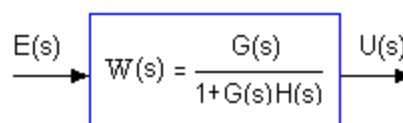
$$W(s) = \frac{\frac{5}{s+2}}{1 + \frac{5}{s+2}} = \frac{5}{s+7}$$

1.4.2 Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso

Determinare la F.d.T. ad anello chiuso del sistema seguente:



Il circuito equivalente è:

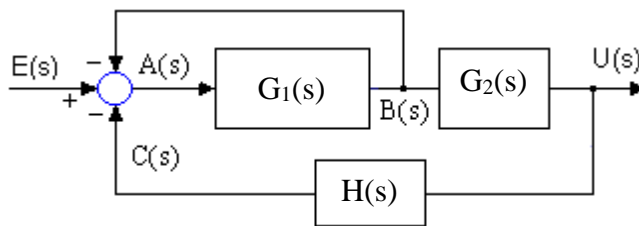


$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{50}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)} \quad (\text{F.d.T. ad anello aperto})$$

$$W(s) = \frac{\frac{10}{(s+2) \cdot (s+3)}}{1 + \frac{50}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)}} = \frac{10 \cdot s}{s^3 + 5s^2 + 6s + 50}$$

1.4.3 Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso

Ricavare la F.d.T. del sistema seguente:



Nel nodo di ingresso si ha: $A(s) = E(s) - B(s) - C(s) \rightarrow E(s) = A(s) + B(s) + C(s)$

Si ricava A, B, C in funzione di U

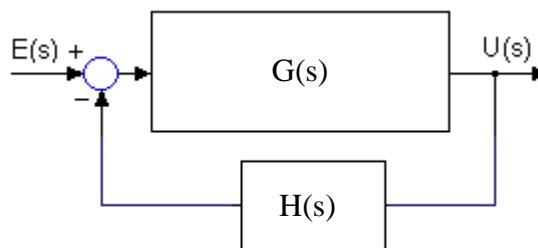
$$B(s) = \frac{U(s)}{G_2(s)} \quad C(s) = U(s) \cdot H(s) \quad A(s) = \frac{U(s)}{G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

$$\text{Quindi:} \quad E(s) = \left[\frac{1}{G_2(s)} + \frac{1}{G_1(s) \cdot G_2(s)} + H(s) \right] \cdot U(s)$$

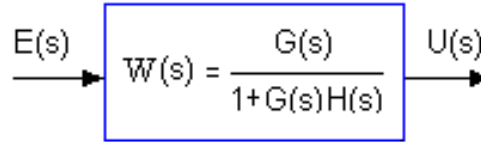
$$\text{Si conclude:} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = W(s) = \frac{1}{\frac{1}{G_2(s)} + H(s) + \frac{1}{G_1(s) \cdot G_2(s)}} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{G_1(s) + G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot H(s) + 1}$$

1.4.4 Determinazione della F.d.T. ad anello chiuso

Ricondurre il sistema ad uno schema a reazione unitaria



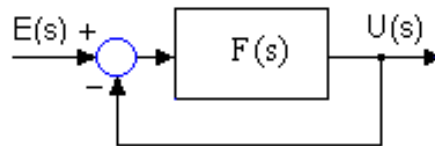
Lo schema equivalente è il seguente (V. par. 1.2.3):



La F.d.T. ad anello chiuso è pari a :

$$\frac{U(s)}{E(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Lo schema di un sistema a reazione unitaria è il seguente:



La F.d.T. ad anello chiuso del sistema è pari a :

$$\frac{U(s)}{E(s)} = W_1(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

Confrontando le uscite dei due sistemi si ha:

$$U_1(s) = \frac{G(s)}{1+G(s) \cdot H(s)} \cdot E_1(s) \quad (8) \quad \text{per lo schema con trasformata di anello pari ad H(s)}$$

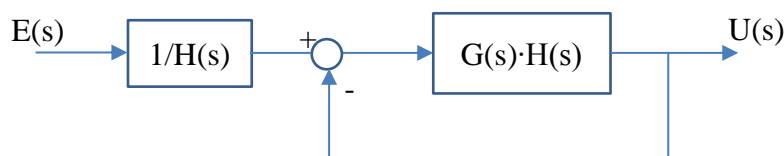
$$U_2(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} \cdot E_2(s) \quad (9) \quad \text{per lo schema con trasformata di anello unitaria}$$

Se moltiplichiamo il numeratore e il denominatore della (8) per H(s) si ha:

$$U_1(s) = \frac{G(s) \cdot H(s)}{1+G(s) \cdot H(s)} \cdot \frac{E_1(s)}{H(s)} \quad (10)$$

La (9) e la (10) risultano equivalenti se : $F(s) = G(s) \cdot H(s)$ e $E_2(s) = \frac{E_1(s)}{H(s)}$

Lo schema equivalente del sistema iniziale risulta così:



METODI PER LA CARATTERIZZAZIONE DELLA RISPOSTA ARMONICA

2.1 Costruzione dei Diagrammi di Bode

La risposta armonica è una funzione complessa della variabile reale ω , quindi ogni suo valore è un numero complesso.

Per una sua rappresentazione grafica si possono utilizzare due vie: o si utilizzano due diagrammi separati, che rappresentano i due valori della coppia di numeri, al variare di ω , oppure si rappresenta ciascun valore nel piano complesso ottenendo un solo diagramma graduato in ω .

I diagrammi logaritmici o di **Bode** sono lo strumento fondamentale per il lavoro di sintesi nel campo delle frequenze ed in cui sono rappresentati su due diversi diagrammi l'andamento del modulo e della fase della risposta armonica in funzione della frequenza; il diagramma del modulo presenta entrambi gli assi logaritmici mentre quello della fase usa solo l'ascissa (asse della frequenza) logaritmico mentre l'ordinata è lineare.

Spesso, nel diagramma del modulo, in ordinata invece del logaritmo del modulo viene riportata una grandezza ad essa proporzionale detta *decibel* (indicata con il simbolo *dB*).

La misura in *dB* di una grandezza è espressa come:

$$K(\text{dB}) = 20 \log K$$

La rappresentazione con doppia scala logaritmica, oltre a comprimere la scala quando il "range" di variazione delle grandezze da rappresentare è molto ampio, semplifica anche la rappresentazione grafica delle funzioni del tipo $|W(i\omega)| = K \cdot \omega^n$. Si consideri la funzione $|W(i\omega)| = 10/\omega^2$.

Se calcoliamo il logaritmo di entrambi i termini, si ottiene:

$$\text{Log}_{10}|W(i\omega)| = \text{Log}_{10}\left(\frac{10}{\omega^2}\right) = 1 - 2 \cdot \text{Log}_{10}\omega$$

Nella doppia scala logaritmica la funzione $|W(i\omega)|$ è rappresentata da una retta con la pendenza pari a -2 (v. fig. 20) e che per $\omega = 10$ vale

$$\text{Log}_{10}|W(i10)| = 1 - 2 \cdot \text{Log}_{10}10 = -1 \quad \text{cioè} \quad |W(i10)| = 0.1$$

Lavorando in *dB* si ha: $20 \cdot \text{Log}_{10}|W(i\omega)| = |W(i\omega)| (\text{dB}) = 20 - 40 \cdot \text{Log}_{10}\omega$. Anche rappresentando la funzione in *dB* la $|W(i\omega)|_{\text{dB}}$ in funzione di $\text{Log}_{10}\omega$ è ancora una retta con pendenza -40db/decade ed assume il valore *dB*=0 per $\omega = 3.16$.

Nel grafico in *dB* la scala dell'asse delle ordinate è lineare in *dB* (ma sempre logaritmica rispetto al valore della funzione), mentre l'asse delle ascisse è ancora in scala logaritmica. In tali grafici la pendenza della retta si misura in *dB* per decade (*dB/decade*), il cui significato si evidenzia in Figura 6. Infatti nel grafico si nota che, presi due valori delle ascisse differenti per una potenza di 10, cioè

una decade (ad esempio 10 e 100), la funzione varia di 40 dB. In tal caso, quindi, la pendenza della retta nel piano logaritmico vale 40dB/decade.

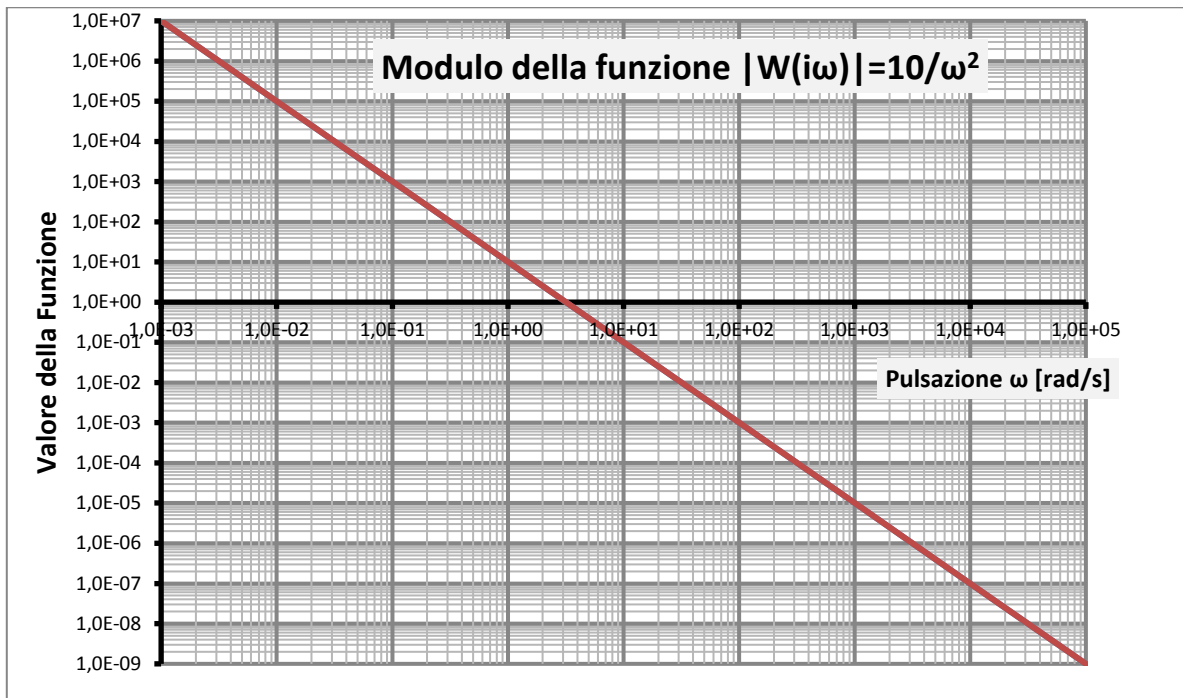


Figura 5 - Esempio di diagramma bi-logaritmico per il modulo

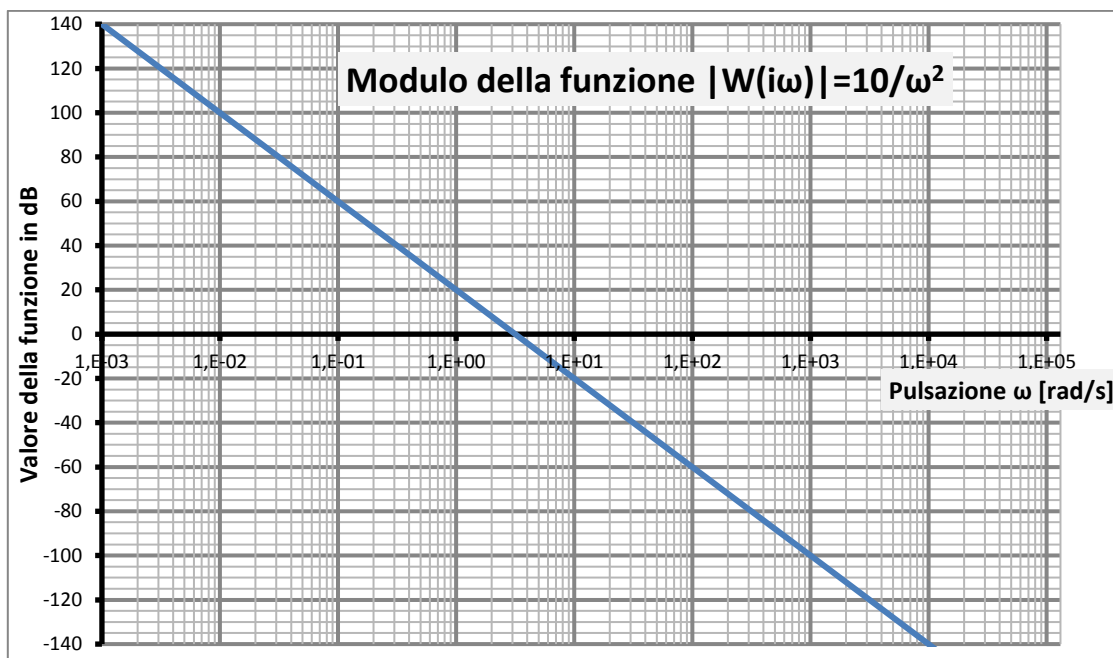


Figura 6 - Esempio di diagramma in dB per il modulo

Si riporta di seguito, come esempio, il diagramma di Bode per la funzione di trasferimento del tipo:

$$W(s) = \frac{1}{1+\tau \cdot s} \text{ con } \tau \text{ numero reale positivo}$$

La funzione ha un polo $p = -1/\tau$ reale negativo. $p = -1/\tau$

Sostituendo a τ $-1/p$ la FdT diventa: $W(s) = \frac{1}{1-s/p}$

La risposta armonica $W(i\omega)$ vale: $W(i\omega) = \frac{1}{1-\frac{i\omega}{p}}$ con p numero reale negativo.

Per il tracciamento dei diagrammi di *Bode* la risposta armonica va scomposta in parte Reale R e parte Immaginaria I . Nel caso che esistano termini immaginari al denominatore della risposta armonica, tale termine va eliminato moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore.

Si possono quindi calcolare:

$$|W(i\omega)| = \sqrt{R^2 + I^2} \quad \text{e} \quad \text{Arg}[W(i\omega)] = \arctan\left(\frac{I}{R}\right)$$

I grafici di Bode del modulo e della fase si ottengono analizzando l'andamento delle due grandezze in funzione della pulsazione ω .

Nel nostro caso quindi, moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore si ha:

$$W(i\omega) = \frac{1+\frac{i\omega}{p}}{(1-\frac{i\omega}{p}) \cdot (1+\frac{i\omega}{p})} = \frac{1+\frac{i\omega}{p}}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$$

La reale R vale $R = \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$ mentre la parte immaginaria I vale $I = \frac{\frac{\omega}{p}}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$ quindi:

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\omega}{p}}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}}$$

$\text{Arg}[W(i\omega)] = \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right)$ dove p è un numero reale negativo

Riportando in ascissa il valore di ω/p invece di ω si ottengono i diagrammi di Bode riportati in Figura 7 e Figura 8.



Figura 7 - Diagramma di Bode - Modulo

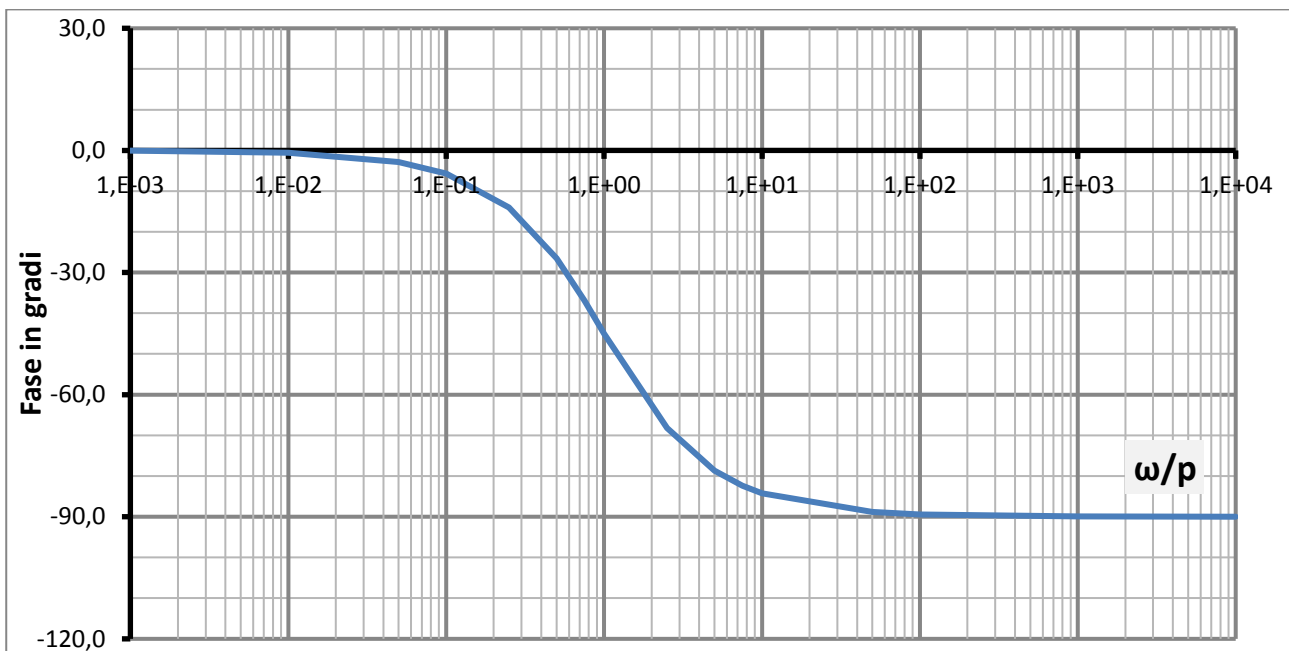


Figura 8 - Diagramma di Bode - Fase

2.1.1 Proprietà dei diagrammi di Bode

La rappresentazione logaritmica tipica del diagramma di Bode, semplifica fortemente la generazione del diagramma stesso.

Per verificare quanto affermato, introduciamo alcune semplici proprietà dei numeri complessi (ed ovviamente delle funzioni complesse e dei logaritmi (v. Figura 9).

Proprietà numeri complessi	Proprietà logaritmi
$ a \cdot b = a \cdot b $	$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
$\arg(a \cdot b) = \arg(a) + \arg(b)$	$\log\left(\frac{ a }{ b }\right) = \log(a) - \log(b)$
$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$	$\log(a ^k) = k \log(a)$
$\arg(a^k) = k \arg(a)$	

Figura 9 – Alcune proprietà numeri complessi e logaritmi

Quindi dati i numeri complessi (a, b, c, d, ...z) e i numeri interi (i, j, k,...q), si ha:

$$\log|a \cdot b^i \cdot c^j \cdot d^k \cdots z^q| = \log|a| + i \cdot \log|b| + j \cdot \log|c| + k \cdot \log|d| + \cdots + q \cdot \log|z| \quad (1)$$

$$\arg(a \cdot b^i \cdot c^j \cdot d^k \cdots z^q) = \arg(a) + i \cdot \arg(b) + j \cdot \arg(c) + k \cdot \arg(d) + \cdots + q \cdot \arg(z) \quad (2)$$

Ritornando ora alla generica funzione di trasferimento riportata nel cap.7 par. 4.4:

$$W(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad \text{con } n > m \quad (3)$$

E ricordando che si possono anche avere zeri e poli nell'origine nonché zeri e poli complessi coniugati, la generica funzione di trasferimento si può scrivere:

$$W(s) = K_B \cdot \frac{\prod_{i=1}^p (1 + T_i \cdot s) \prod_{i=1}^q \left(\frac{s^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_{n_i}} + 1 \right)}{s^h \prod_{i=1}^u (1 + \tau_i \cdot s) \prod_{i=1}^w \left(\frac{s^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_{n_i}} + 1 \right)} \quad (4)$$

Dove:

$$T_i = -\frac{1}{z_i} \quad \tau_i = -\frac{1}{p_i} \quad \text{con } T_i, \tau_i \text{ numeri reali}$$

h : molteplicità dei poli nell'origine

I termini $\left(\frac{s^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_{n_i}} + 1\right)$ provengono dal prodotto dei termini complessi coniugati $(1 + T_i \cdot s) \cdot (1 + T_i^* \cdot s)$ o $(1 + \tau_i \cdot s) \cdot (1 + \tau_i^* \cdot s)$ dove $T_i, \tau_i, T_i^*, \tau_i^*$ sono numeri complessi.

$$e \text{ con } K_B = K \frac{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_u \cdot \omega_{n_1} \cdot \omega_{n_2} \cdots \omega_{n_w}}{T_1 \cdot T_2 \cdots T_p \cdot \omega_{n_1} \cdot \omega_{n_2} \cdots \omega_{n_q}} \quad (5)$$

La (4) è chiamata anche funzione di trasferimento nella forma con costanti di tempo.

Il fattore s^h corrisponde ad un eventuale polo nell'origine avente ordine di molteplicità h : se la funzione di trasferimento non presenta poli nell'origine, è $h=0$.

La costante K_B è detta costante di guadagno.

Per $h = 0$, K_B rappresenta il guadagno statico, cioè il valore della funzione di risposta armonica per $\omega = 0$

Per $h = 1$, la costante K_B si chiama anche costante di velocità

Per $h = 2$, la costante K_B si chiama anche costante di accelerazione

Se, a partire dalla (4) scriviamo l'espressione della risposta armonica, si ha:

$$W(j\omega) = K_B \cdot \frac{\prod_{i=1}^p (1 + T_i \cdot j\omega) \prod_{i=1}^q \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1\right)}{(j\omega)^h \prod_{i=1}^u (1 + \tau_i \cdot j\omega) \prod_{i=1}^w \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1\right)} \quad (6)$$

Con il diagramma di Bode si ha quindi la possibilità di sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata, per ottenere il diagramma del sistema complessivo.

Infatti il modulo della risposta armonica complessiva si ottiene eseguendo il prodotto dei moduli delle singole risposte armoniche (v. 1). Se si usa una scala logaritmica il prodotto dei moduli si riduce alla somma dei moduli. Egualmente, la fase della risposta armonica complessiva si ottiene come somma delle fasi di ciascuna risposta armonica (v. 2).

Si ha quindi (per le proprietà dei numeri complessi riportati in Figura 9):

$$|W(j\omega)| = |K_B| \cdot \frac{\prod_{i=1}^p |(1 + T_i \cdot j\omega)| \prod_{i=1}^q \left| \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1\right) \right|}{|(j\omega)^h| \prod_{i=1}^u |(1 + \tau_i \cdot j\omega)| \prod_{i=1}^w \left| \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1\right) \right|} \quad (7)$$

Introducendo anche le proprietà dei logaritmi (sempre riportati in Figura 9), si ha:

$$|W(j\omega)|_{dB} = |K_B|_{dB} + \sum_{i=1}^p |(1 + T_i \cdot j\omega)|_{dB} + \sum_{i=1}^q \left| \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right) \right|_{dB} +$$

$$+ \left| \frac{1}{(j\omega)^h} \right|_{dB} + \sum_{i=1}^u \left| \frac{1}{(1 + \tau_i \cdot j\omega)} \right|_{dB} + \sum_{i=1}^w \left| \frac{1}{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right)} \right|_{dB} \quad (8)$$

Si ha quindi la possibilità di costruire i diagrammi del modulo (in dB) relativi ad una funzione di risposta armonica, data in forma fattorizzata, come somma di diagrammi elementari, di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

Per quanto riguarda la fase della $W(j\omega)$ (sempre in base alla proprietà dei numeri complessi riportati in Figura 9), si ha:

$$Arg(W(j\omega)) = Arg(K_B) + \sum_{i=1}^p Arg(1 + T_i \cdot j\omega) + \sum_{i=1}^q Arg \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right) +$$

$$+ h \cdot Arg \left(\frac{1}{(j\omega)} \right) + \sum_{i=1}^u Arg \left(\frac{1}{(1 + \tau_i \cdot j\omega)} \right) + \sum_{i=1}^w Arg \left(\frac{1}{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right)} \right) \quad (9)$$

Si ha quindi la possibilità di costruire i diagrammi di fase della risposta armonica, data in forma fattorizzata, come somma di diagrammi elementari della fase di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

Altre importanti proprietà dei diagrammi di Bode sono le seguenti:

- **Proprietà del reciproco**

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| = \frac{1}{|G(j\omega)|} \quad (10)$$

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right|_{dB} = -|G(j\omega)|_{dB}$$

$$Arg \left(\frac{1}{G(j\omega)} \right) = -Arg(G(j\omega))$$

La (10) afferma che i diagrammi di Bode della funzione $1/G(j\omega)$ possono essere ottenuti ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, i diagrammi di Bode della funzione $G(j\omega)$.

- **Cambiamento di segno della costante di tempo e del fattore di smorzamento**

$$|(1 - \tau_i \cdot j\omega)|_{dB} = |(1 + \tau_i \cdot j\omega)|_{dB}$$

$$\text{Arg}(1 - \tau_i \cdot j\omega) = -\text{Arg}(1 + \tau_i \cdot j\omega)$$

(11)

$$\left| \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} - 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right) \right|_{dB} = \left| \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right) \right|_{dB}$$

$$\text{Arg} \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} - 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right) = -\text{Arg} \left(-\frac{\omega^2}{\omega_{n_i}^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + 1 \right)$$

La (11) afferma che cambiando il segno della costante di tempo τ nei fattori elementari del primo ordine oppure del fattore di smorzamento δ nei fattori elementari del secondo ordine, il diagramma di ampiezza rimane inalterato mentre il diagramma di fase viene ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

Siamo ora in grado di tracciare i diagrammi di Bode delle funzioni elementari.

2.1.2 Diagrammi di Bode di funzioni elementari

Le funzioni elementari che saranno analizzate sono i seguenti:

1. funzione costante K

$$W(j\omega) = K$$

2. funzione corrispondente ad 1 o più poli nell'origine

$$W(j\omega) = (j\omega)^{-h}$$

3. funzione corrispondente ad un polo reale

$$W(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$$

4. funzione corrispondente ad uno zero reale

$$W(j\omega) = (1 + j\omega T)$$

5. funzione corrispondente ad una coppia di zeri complessi coniugati

$$W(j\omega) = \left(1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

6. funzione corrispondente ad una coppia di poli complessi coniugati

$$W(j\omega) = \left(1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$

7. funzione di ritardo

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

2.1.2.1 Costante K

Funzione di trasferimento: $W(s) = K$

Risposta Armonica: $W(j\omega) = K$

$$|W(j\omega)| = |k|$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan\left(\frac{0}{k}\right) = 0 \text{ se } k \geq 0$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan\left(\frac{0}{k}\right) = -\pi \text{ se } k < 0$$

I diagrammi di Bode sono riportati in Figura 10.

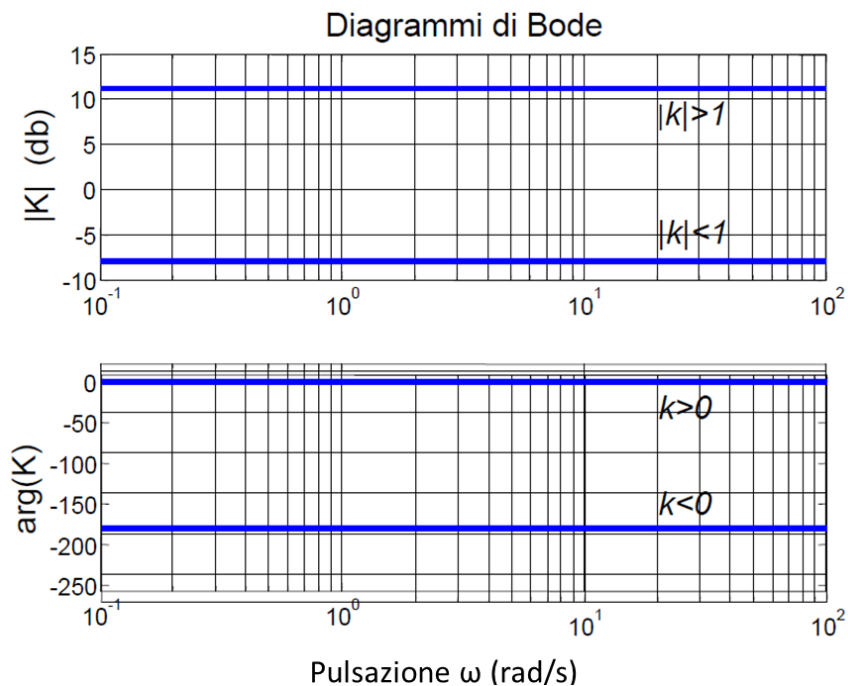


Figura 10 – Diagrammi di Bode di una costante

2.1.2.2 Polo nell'origine

Funzione di trasferimento: $W(s) = s^{-h}$ con h molteplicità del polo nell'origine

Risposta Armonica: $W(j\omega) = (j\omega)^{-h}$

- $h=1$

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega^2} = -\frac{j}{\omega}$$

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \rightarrow |W(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \omega$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan\left(-\frac{j/\omega}{0}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

- $h=2$

$$W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2} \rightarrow |W(j\omega)|_{dB} = -20 \cdot 2 \cdot \log_{10} \omega$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan\left(-\frac{0}{\omega^2}\right) = \arctan(-0) = -\pi$$

- per h qualsiasi

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\omega^h} \rightarrow |W(j\omega)|_{dB} = -20 \cdot h \cdot \log_{10} \omega$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = -h \frac{\pi}{2}$$

Quindi, per qualsiasi valore di h (positivo), il diagramma del modulo (in dB) è una retta inclinata di $20 \cdot h$ dB/decade e passante per il punto $[\omega=1, 0\text{dB}]$.

La fase è identicamente uguale a $-h \frac{\pi}{2}$ (v. Figura 11)

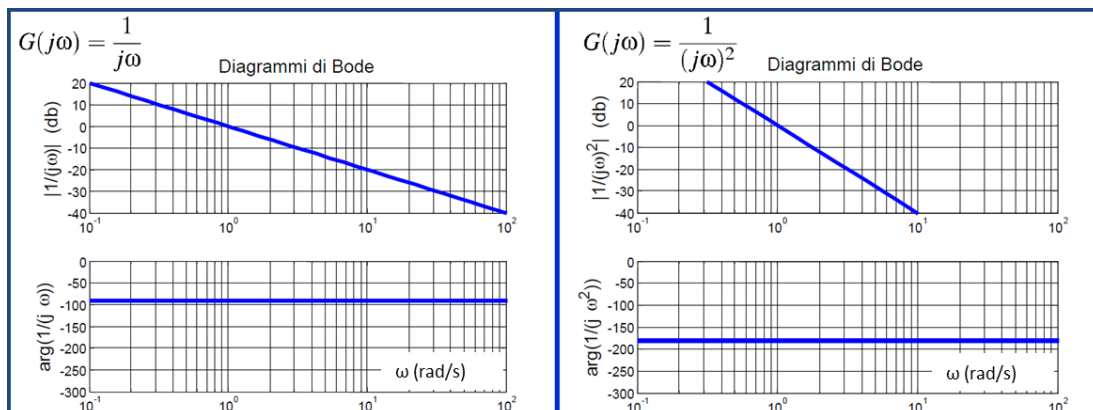


Figura 11 – Diagrammi di Bode con polo reale

2.1.2.3 Polo reale

Funzione di trasferimento: $W(s) = (1 + s\tau)^{-1}$ con $\tau = -1/p$ e p polo reale negativo della F.d.T.

Risposta Armonica: $W(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan(-\omega\tau)$$

I diagrammi di Bode sono riportati in Figura 12.

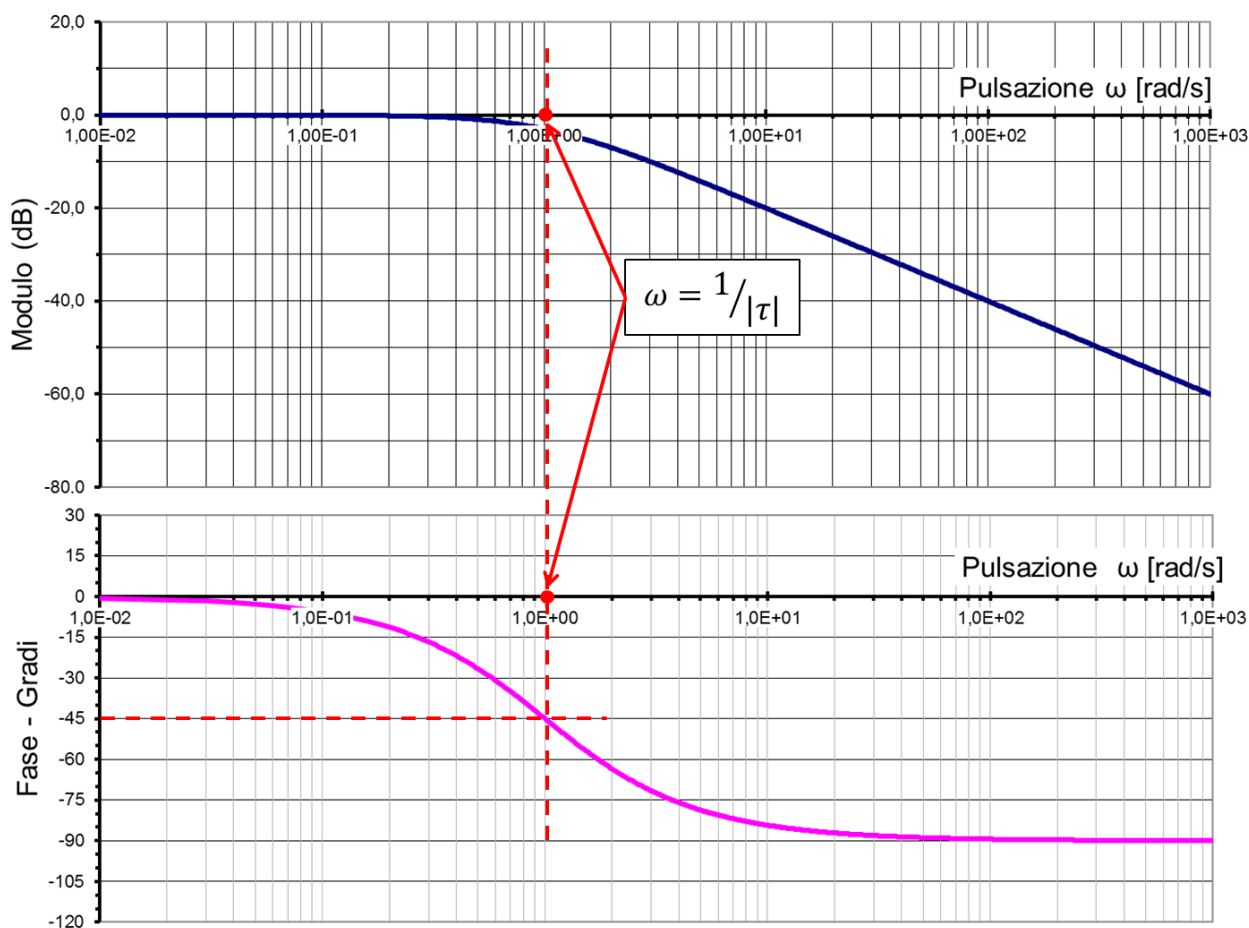


Figura 12 – Diagrammi di Bode con polo reale

E' molto utile, per le costruzioni grafiche, impiegare diagrammi di Bode approssimati a forma di spezzata, detti anche diagrammi di Bode asintotici.

Per il diagramma delle ampiezze si impiega l'approssimazione asintotica (la spezzata costituita dai due asintoti cui tende il diagramma per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$).

- Per $\omega \rightarrow 0$ si ha $\omega\tau \ll 1$ quindi $|W(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{1}} \approx 1$ e quindi $|W(j\omega)|_{dB} \approx 0$ cioè la prima linea spezzata del diagramma viene a coincidere con l'asse delle ascisse.
- Per $\omega \rightarrow \infty$ si ha $\omega\tau \gg 1$ quindi $|W(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega\tau}$ e quindi:

$$|W(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \frac{1}{\tau} - 20 \log_{10} \omega$$

In questo caso il diagramma è costituito da una retta nel piano logaritmico con una pendenza di -20dB/Decibel e interseca l'asse delle ascisse per $\omega=1/\tau$, cioè il valore del polo della funzione di trasferimento cambiato di segno.

Quindi l'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze è pertanto costituita dalle due semirette (v. Figura 13)

$$|W(j\omega)|_{dB} \approx 0 \quad \text{per } \omega \leq 1/\tau$$

$$|W(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log_{10} \frac{1}{\tau} - 20 \log_{10} \omega \quad \text{per } \omega \geq 1/\tau$$

La pulsazione $\omega = 1/\tau$ si chiama pulsazione di rottura ed equivale al valore del polo della funzione di trasferimento cambiato di segno.

L'errore massimo di questa approssimazione si ha per $\omega = 1/\tau$ e vale:

$$Err = |W(j\omega)|_{dB} - 0 = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$

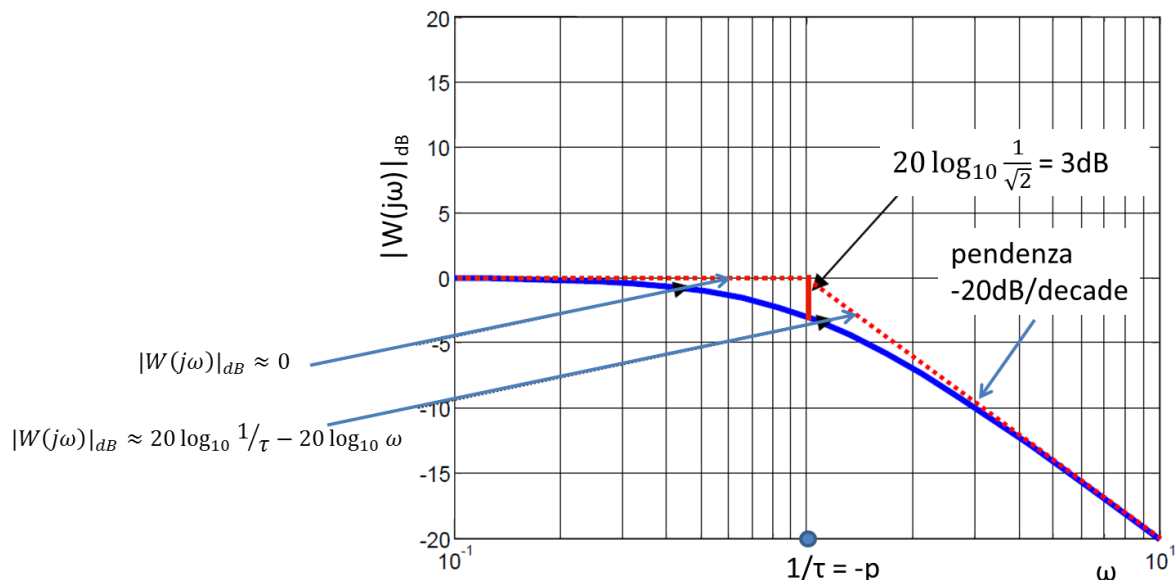


Figura 13 – Diagramma asintotico (Modulo) di Bode per polo reale

Anche per il diagramma delle fasi si impiega l'approssimazione asintotica (la spezzata costituita dai due asintoti cui tende il diagramma per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$).

- Per $\omega \rightarrow 0$ si ha $Arg[W(j\omega)] = \arctan(-0) = 0^\circ$ e quindi la prima linea spezzata del diagramma viene a coincidere la retta orizzontale passante per 0° .
- Per $\omega \rightarrow \infty$ si ha $Arg[W(j\omega)] = \arctan(-\infty) = -90^\circ (-\frac{\pi}{2})$

Il diagramma delle fasi può essere approssimato con la spezzata che si ottiene collegando i due asintoti aventi fase pari a 0 e fase pari a $-\pi/2$ con la tangente al diagramma nel punto corrispondente alla pulsazione $\omega=1/\tau$, in cui il valore della fase vale $-\pi/4$ (v. Figura 14).

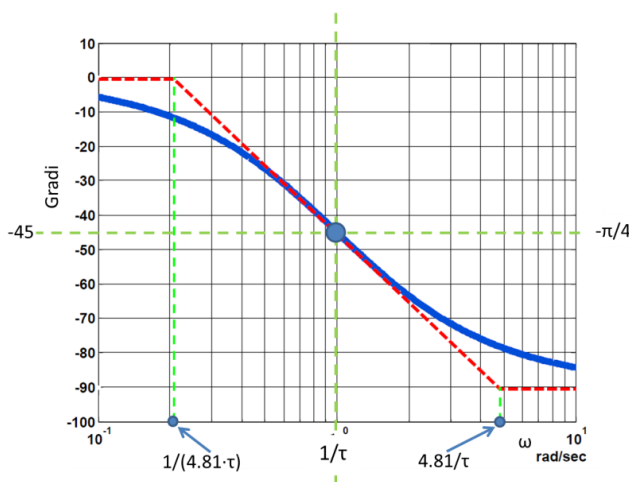


Figura 14 – Diagramma asintotico (fase) di Bode per polo reale

Concludendo, in Figura 15 sono riportati i diagrammi di Bode sia completi che asintotici per un polo reale.

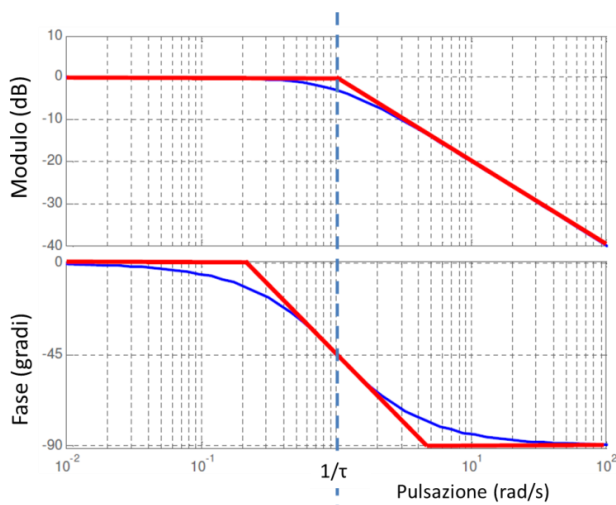


Figura 15 – Diagrammi di Bode completo ed asintotico per polo reale

2.1.2.4 Zero reale

Funzione di trasferimento: $W(s) = (1 + sT)$ con $T = -1/z$ con z polo reale negativo della F.d.T.

Risposta Armonica: $W(j\omega) = (1 + j\omega T)$

$$|W(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan(\omega T)$$

I diagrammi di Bode sono riportati in Figura 16.

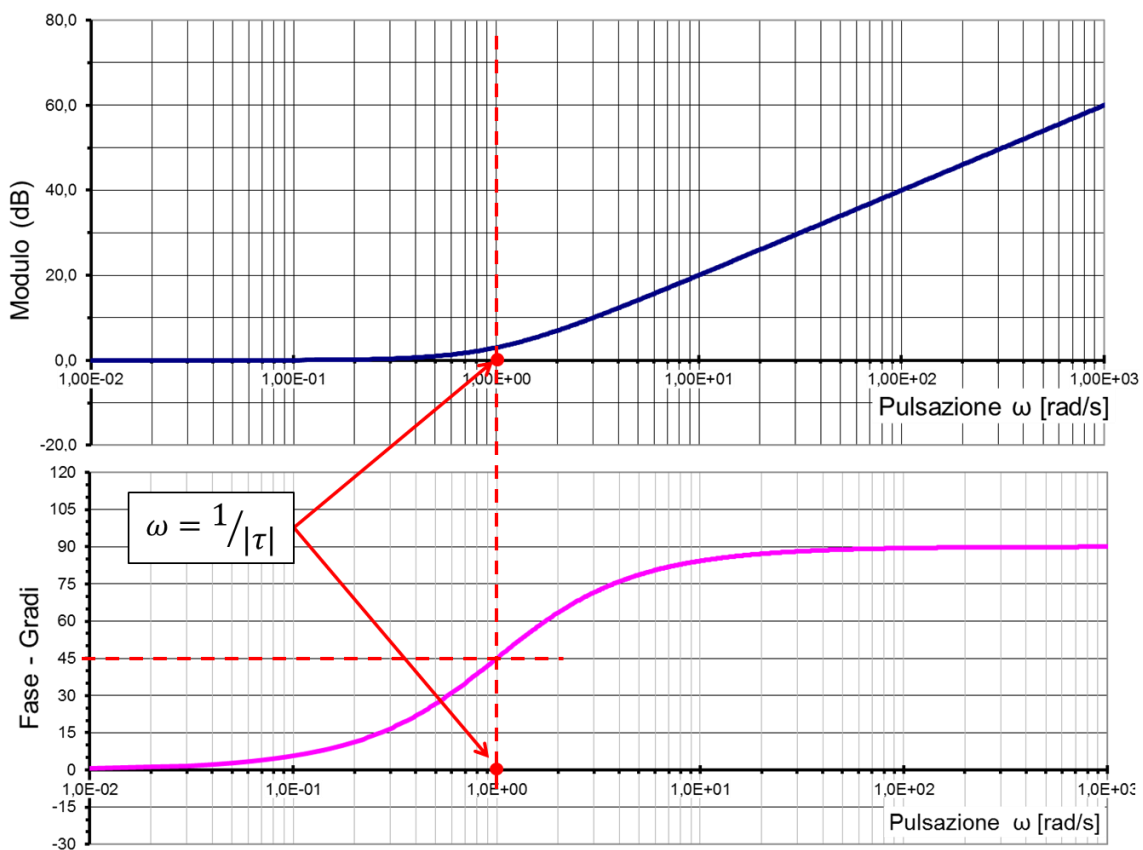


Figura 16 – Diagrammi di Bode per zero reale

I diagrammi di Bode per lo zero reale sono simmetrici, rispetto all'asse delle pulsazioni, se paragonati al termine con polo reale. Lo stesso vale per i diagrammi asintotici e per le modalità di costruzione. A tale conclusione si arriva anche considerando la proprietà del reciproco riportata nella formula (10) del par. 2.1.1.

Concludendo, in Figura 17 sono riportati i diagrammi di Bode sia completi che asintotici per uno zero reale.

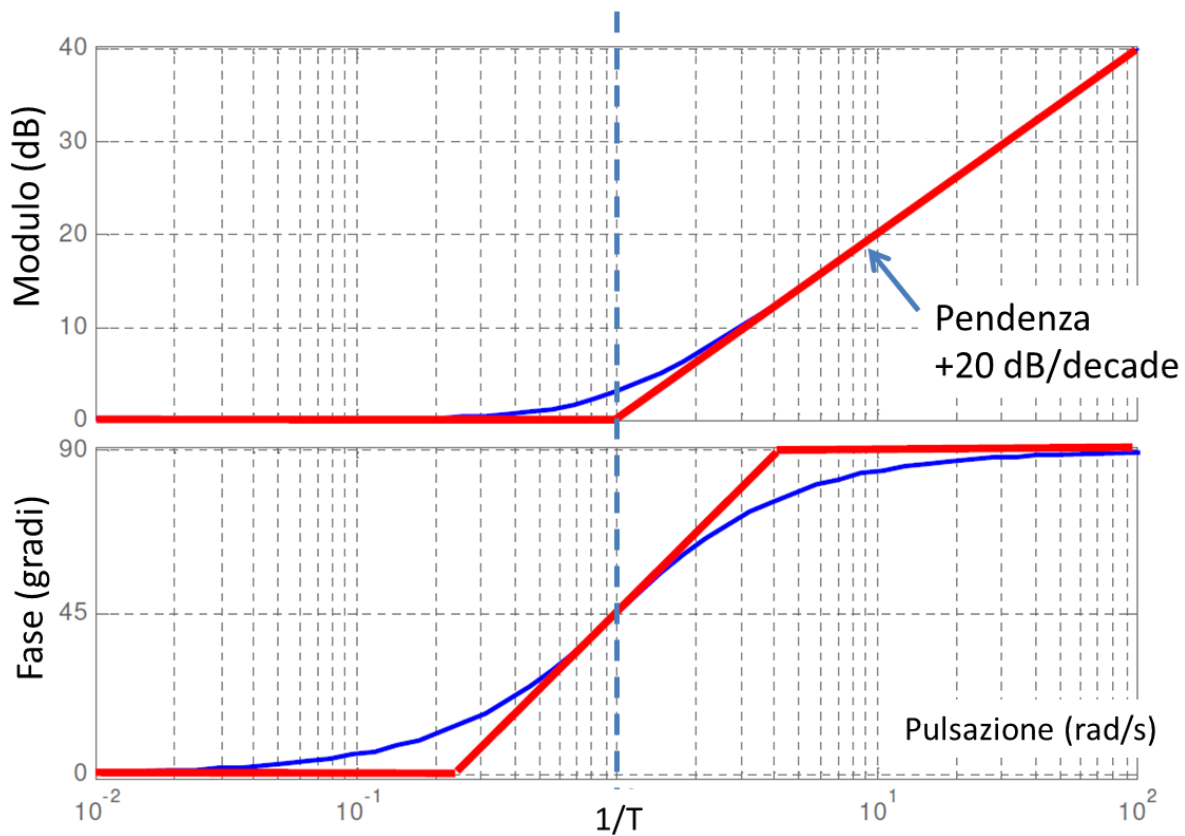


Figura 17 – Diagrammi di Bode completo ed asintotico per uno zero reale

2.1.2.5 Coppia di poli complessi coniugati

Funzione di trasferimento: $W(s) = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)^{-1}$ con $0 \leq \eta < 1$

Risposta Armonica: $W(j\omega) = \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)^{-1}$ con $0 \leq \eta < 1$

nel caso di $\eta \geq 1$ le due radici complesse si ridurrebbero a 2 radici reali.

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \arctan \left(-\frac{2\eta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right)$$

I diagrammi di Bode in funzione di ω e di η sono riportati in Figura 18.

Per quanto riguarda i diagrammi asintotici si può dire:

- $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \rightarrow |W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-0)^2+0}} \rightarrow |W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} 1 = 0$

Il diagramma asintotico (v. Figura 18) diventa una retta coincidente con l'asse ω .

- $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \rightarrow |W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4} + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \rightarrow |W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = 40 \log_{10} \omega_n - 40 \log_{10} \omega$

Il diagramma asintotico (v. Figura 18) diventa una con pendenza -40 dB/decade e passante per il punto $[\omega_n, 0 \text{ dB}]$.

Però nel caso di una coppia di poli complessi coniugati il diagramma effettivo può discostarsi sensibilmente da quello asintotico. Infatti la pulsazione ω_R a cui si verifica il picco di risonanza M_R e l'ampiezza del picco di risonanza sono pari :

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad M_R = \frac{1}{2\delta} \sqrt{1 - \delta^2}$$

In particolare, per $\delta = 0$ e in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_R , lo scostamento è infinito.

Anche il diagramma della fase varia con δ (come in Figura 18).

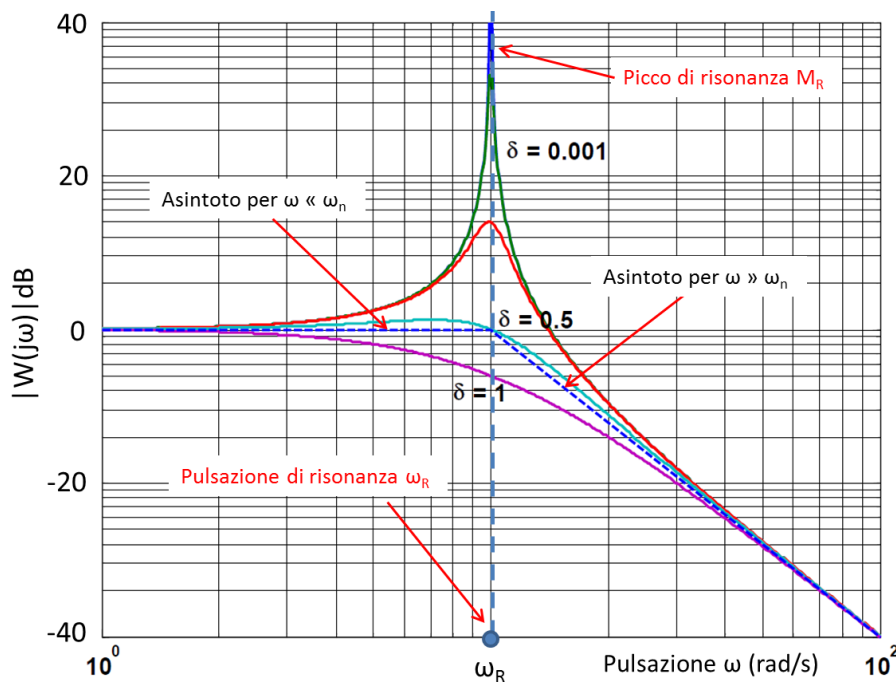


Figura 18 – Diagrammi del modulo completo ed asintotico per polo complesso coniugato

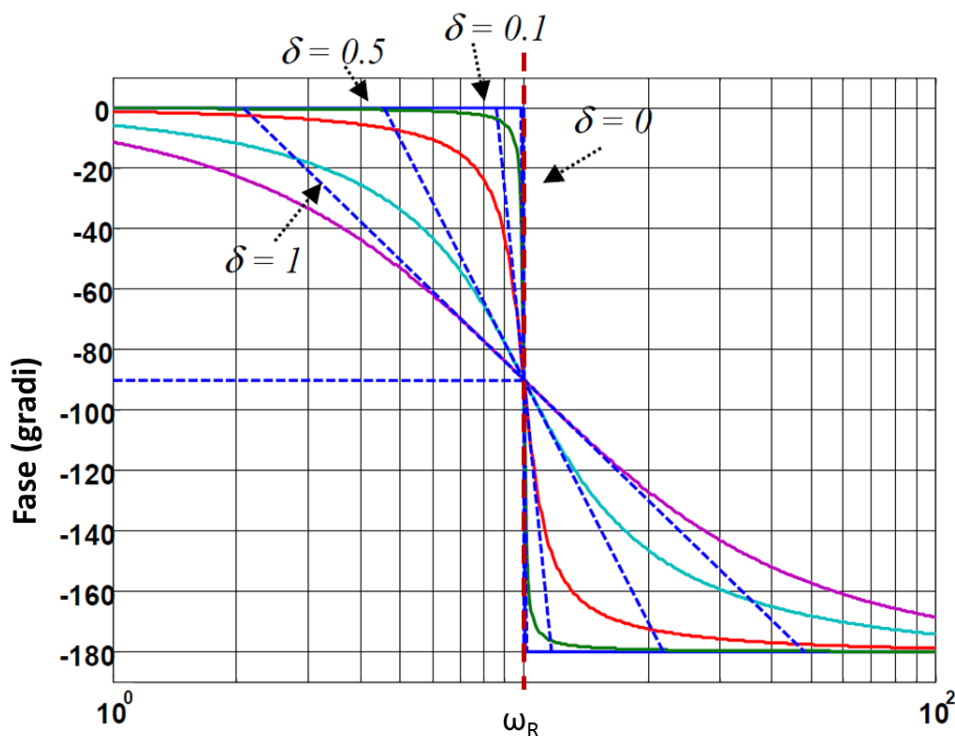


Figura 19 – Diagramma della fase completo ed asintotico per polo complesso coniugato

2.1.2.6 Coppia di zeri complessi coniugati

Funzione di trasferimento: $W(s) = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\eta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)$ con $0 \leq \eta < 1$

Risposta Armonica: $W(j\omega) = \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\eta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)$ con $0 \leq \eta < 1$

Tenendo conto della proprietà del reciproco dei diagrammi di Bode, riportata nella formula (10) del par. 2.1.1, il grafico delle ampiezze di una coppia di zeri complessi coniugati risulta ribaltato (rispetto all'asse delle pulsazioni) in confronto a quello di una coppia di poli complessi coniugati, come riportato in Figura 20.

Lo stesso vale per il diagramma della fase, riportato in Figura 21.

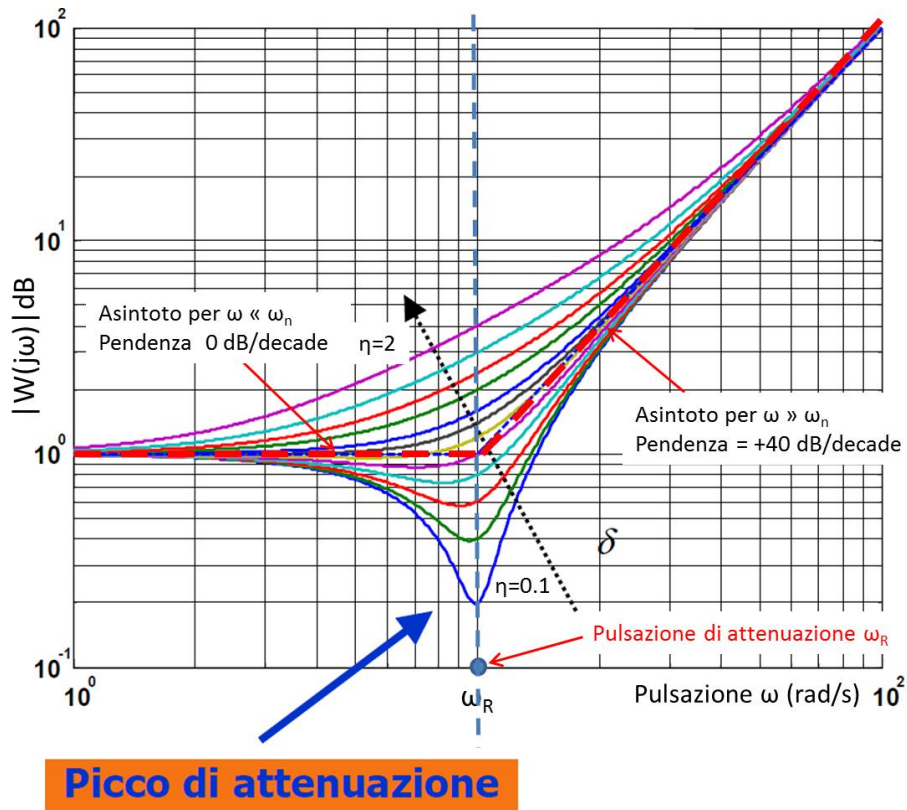


Figura 20 – Diagramma del modulo completo ed asintotico per zero complesso coniugato

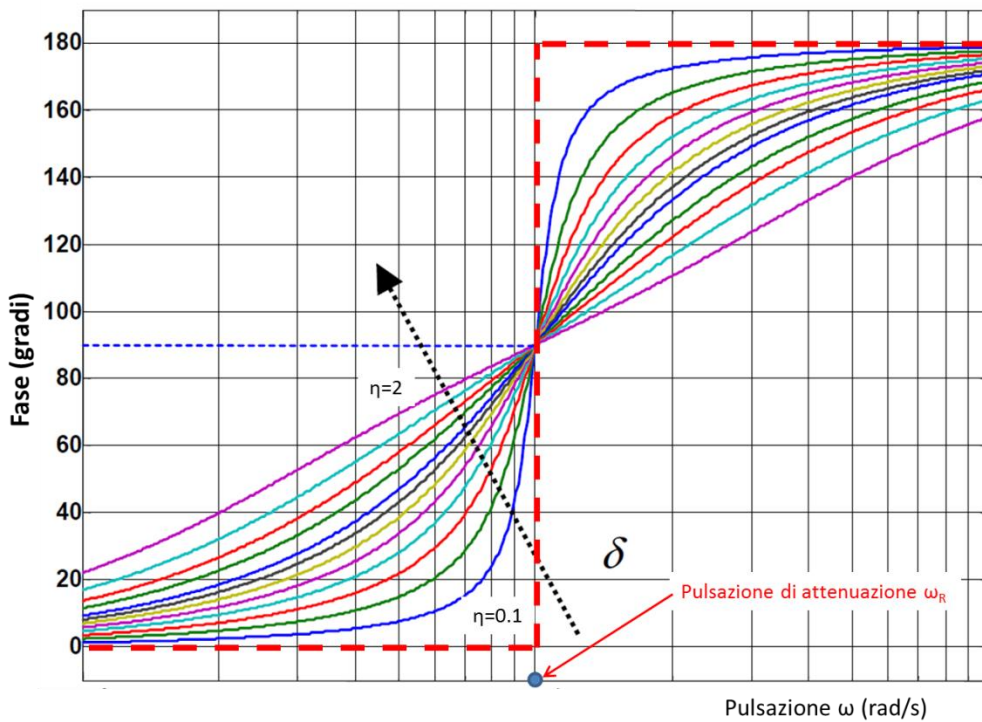


Figura 21 – Diagramma della fase completo ed asintotico per zero complesso coniugato

2.1.2.7 Ritardo

Nello studio dei sistemi dinamici spesso si assume che la F.d.T. sia una funzione razionale fratta (cioè, un rapporto di polinomi nella variabile “s” di Laplace). Questa modalità di rappresentazione è però valida solo per sistemi che rispondono istantaneamente alle variazioni della variabile di ingresso.

Una tipica risposta di un sistema senza ritardo è riportata in Figura 22.

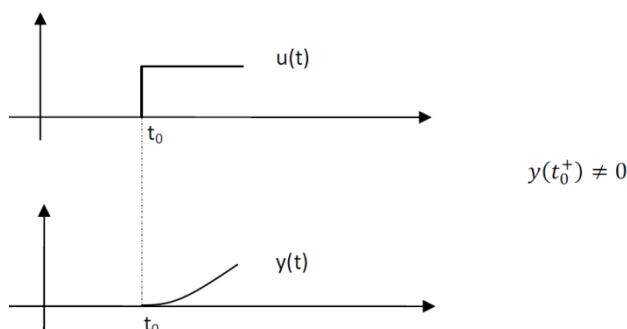


Figura 22 – Risposta di un sistema con ritardo nullo

In molti casi pratici tale ipotesi di “istantaneità” non è verificata e sono presenti ritardi finiti.

A titolo di esempio, si consideri un tratto di tubazione di lunghezza L. In corrispondenza della sezione S_{IN} posta entra una portata $q(t)$ di un fluido incompressibile, che si muove nella tubazione a velocità $v(t)$ (v. Figura 23)

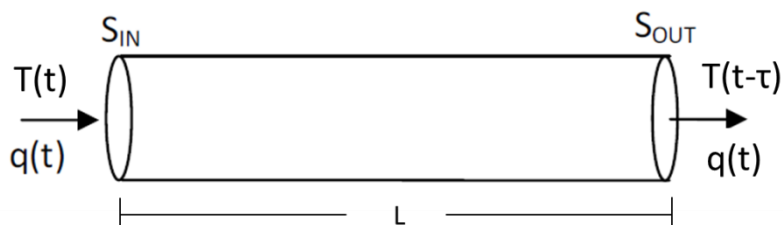


Figura 23 – Tubazione con ritardo termico

Essendo il fluido incompressibile e considerando che le variazioni di pressione/portata si propagano alla velocità del suono nel mezzo (molto elevata nei liquidi), il ritardo con cui si presentano all’uscita le variazioni di pressione/portata è pressoché nullo (almeno per lo studio dei normali transitori nelle tubazioni). Invece, le variazioni di temperatura che si presentano all’ingresso vengono trasmesse all’uscita con un ritardo legato alla velocità del fluido e alla lunghezza della tubazione.

Il ritardo τ è il tempo che si deve attendere affinché una variazione dell’ingresso si manifesti in una corrispondente variazione dell’uscita.

Se si considerano come variabile di ingresso $u(t)$ la temperatura $T(t)$ immessa alla sezione di ingresso S_{IN} e come variabile di uscita $y(t)$ la temperatura misurata all’istante t nella sezione di uscita S_{OUT} , si ricava facilmente come l’uscita dipenda dall’ingresso attraverso un legame (statico) che coinvolge un ritardo temporale τ .

In particolare il ritardo termico vale (se la velocità $v(t)$ è costante nel tempo): $\tau = \frac{L}{v(t)}$

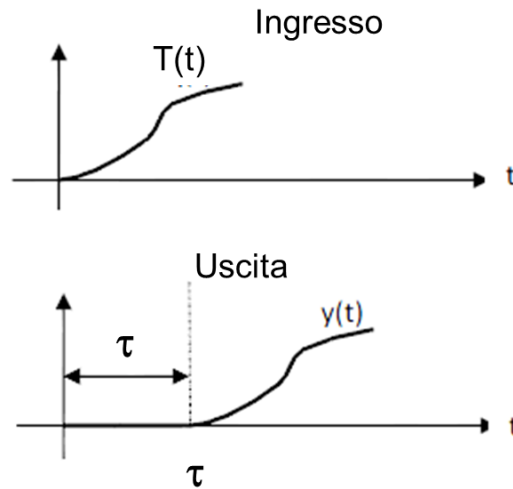


Figura 24 – Legame ingresso uscita di una funzione con ritardo

Essendo l'ingresso $u(t)=T(t)$ l'uscita $y(t)$ vale $y(t) = T(t - \tau)$

Per caratterizzare, in termini di F.d.T., i sistemi dinamici con ritardi finiti, si impiega il teorema di traslazione nel tempo, una delle proprietà notevoli della Trasformata di Laplace.

Detta $T(s)$ la T.d.L. del segnale di ingresso $T(t)$, la trasformata dell'uscita $T(t - \tau)$ vale:

$$L[T(t - \tau)] = e^{-s\tau} T(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento di un sistema a ritardo finito vale:

$$G(s) = L[T(t - \tau)] / L[T(t)] = e^{-s\tau} T(s) / T(s) = e^{-s\tau}$$

La F.d.T. individuata è una funzione trascendente, e contiene il termine esponenziale complesso tipico dei sistemi con ritardo.

Più in generale, la F.d.T. di un sistema SISO con ritardo viene espresso nella forma seguente:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-s\tau}$$

dove $B(s)$ ed $A(s)$ sono polinomi razionali ed il parametro positivo τ viene detto ritardo del sistema. Si noti che la rappresentazione nella formula precedente, con il termine esponenziale che moltiplica la F.d.T. razionale fratta, è solo un caso particolare di F.d.T. associate a sistemi con ritardo, caso che peraltro copre una vasta casistica di interesse applicativo.

La Risposta Armonica di un sistema a ritardo finito vale:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

Tenendo conto che un numero complesso c si può rappresentare come:

$$c = |c|e^{i\varphi}$$

dove $|c|$ è il modulo del numero complesso e φ è la fase, allora il modulo della Risposta Armonica è sempre pari a 1 (0 dB) e la fase è pari a $-\omega\tau$, quindi crescente sia con ω sia con il ritardo τ .

Il diagramma di Bode di un sistema di solo ritardo è rappresentata in Figura 25.

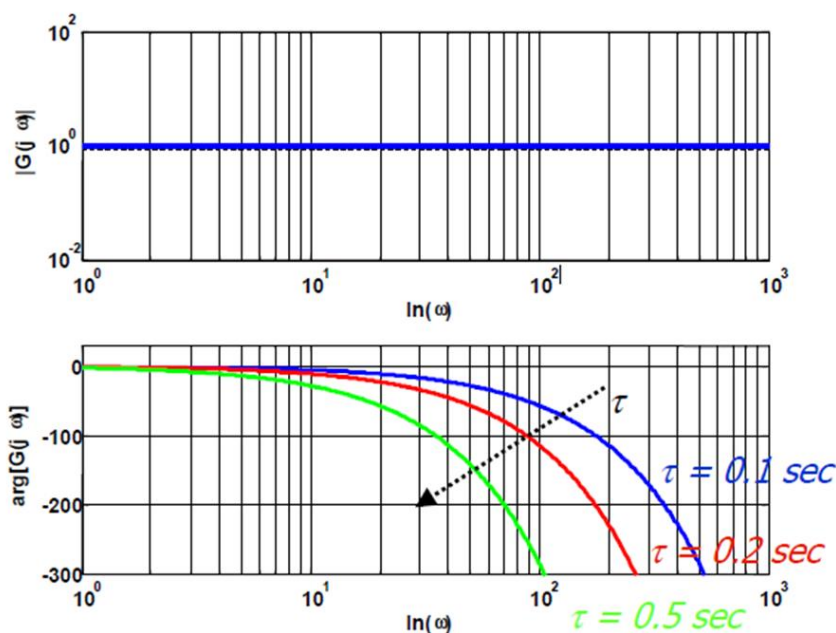


Figura 25 – Diagramma di Bode del ritardo

2.1.3 Diagrammi di Bode asintotici

2.1.3.1 Metodo della somma dei singoli fattori della risposta armonica

Come visto in precedenza, i diagrammi di Bode di un singolo fattore possono essere tracciati in maniera approssimata, prendendo il nome di diagrammi di Bode asintotici. I diagrammi di Bode dei singoli fattori possono essere sommati per produrre i diagrammi di Bode della Risposta Armonica completa.

In Figura 26 è riportato un esempio di tale procedura. I poli del sistema sono pari a $p_1 = -1$, $p_2 = -1$, $p_3 = -10$. Il polo pari a -1 è doppio e quindi la pendenza del grafico dopo la frequenza di rottura ha una pendenza di -40 db/decade.

Le spezzate di colore nero, ottenute sommando i 3 grafici, rappresentano i diagrammi asintotici (modulo e fase) della risposta armonica

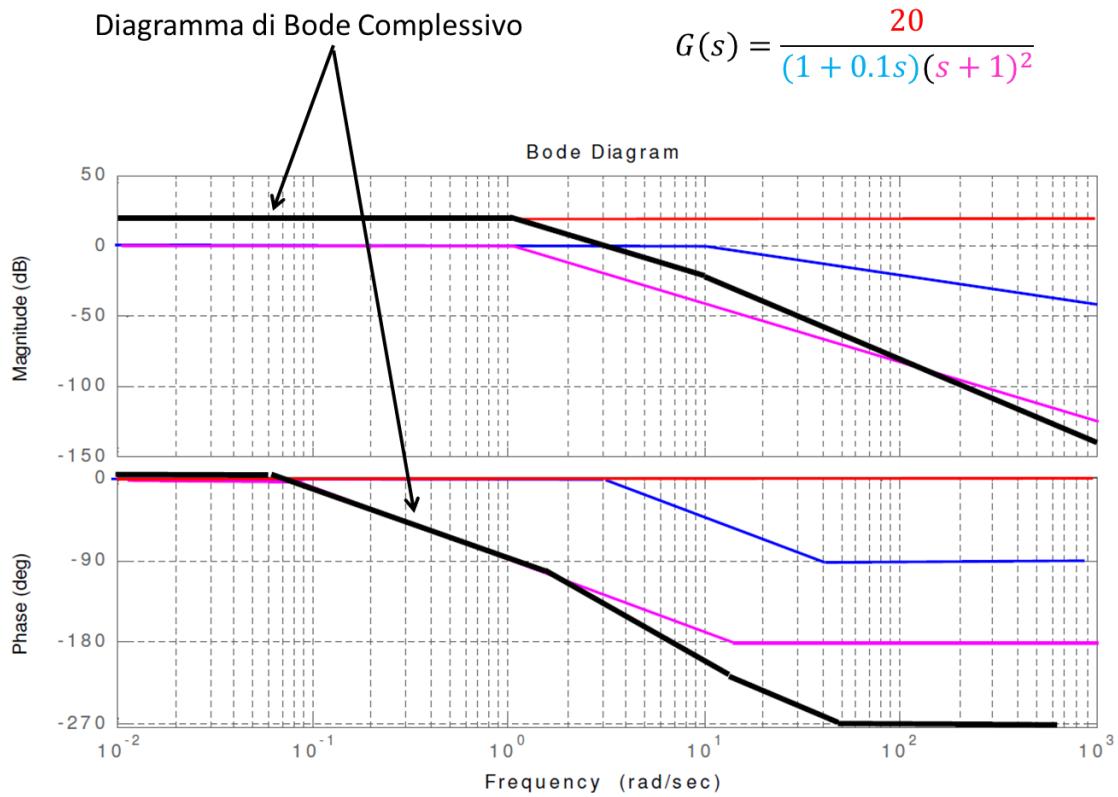


Figura 26 – Diagramma di Bode ottenuto come somma di fattori semplici

2.1.3.2 Tracciamento diretto dei diagrammi di bode asintotici

Si può, senza perdita di generalità, tracciare direttamente i diagrammi di Bode asintotici applicando i seguenti passi:

Diagramma del Modulo

- Il diagramma di Bode del modulo si può approssimare ad una spezzata (insieme di semirette e segmenti).
- Le pulsazioni ω_R di cambio inclinazione della spezzata (dette pulsazioni di rottura) si ricavano dai poli ed i zeri della F.d.T.. Per trovare tali pulsazioni è sufficiente cambiare il segno ai poli ed agli zeri.
- Se non esistono poli o zeri sull'origine il diagramma parte con una semiretta orizzontale. Il valore del modulo si ottiene ponendo $s=0$ nella F.d.T..

- Se esistono poli nell'origine il diagramma parte con una semiretta in discesa, con inclinazione di -20 dB/decade. La posizione della retta inclinata si ricava calcolando il modulo ad un valore della pulsazione ω_R almeno 10 volte inferiore al più piccolo polo o zero della F.d.T..
- Se esistono zeri nell'origine il diagramma parte con una semiretta in salita, con inclinazione di 20 dB/decade. La posizione della retta inclinata si ricava calcolando il modulo ad un valore della pulsazione ω_R almeno 10 volte inferiore al più piccolo polo o zero della F.d.T..

Per calcolare in modo semplice il valore del modulo si può ricorrere alle formule (7) o (8) del par. 2.1.1. Come esempio si faccia riferimento alla risposta armonica relativa alla seguente F.d.T.:

$$F(s) = 0,01 \frac{s(0,1s + 1)}{(s + 100)(1 + 0,001s)}$$

La Risposta armonica vale:

$$F(j\omega) = 10^{-2} \frac{j\omega(0,1j\omega + 1)}{(j\omega + 100)(1 + 0,001j\omega)}$$

Si calcolano gli zeri ed i poli della F.d.T.:

Si ha uno zero sull'origine ($s=0$) e sono presenti 2 poli ed uno zero diversi da $s=0$.

$$0,1s + 1 = 0 \rightarrow s_z = \frac{-1}{0,1} = -10 \text{sec}^{-1}$$

$$100 + s = 0 \rightarrow s_{p1} = -100 \text{sec}^{-1}$$

$$1 + 0,001s = 0 \rightarrow s_{p2} = \frac{-1}{0,001} = -1000 \text{sec}^{-1}$$

Le pulsazioni di cambio inclinazione si ottengono dai poli e zeri cambiando il segno e sono:

$$\omega_z = 10 \text{rad/sec}$$

$$\omega_{p1} = 100 \text{rad/sec}$$

$$\omega_{p2} = 1000 \text{rad/sec}$$

Poiché c'è uno zero nell'origine ($s=0$), il diagramma del modulo parte in salita con una inclinazione di +20dB/decade. Bisogna calcolare un punto per il quale far passare il diagramma. Poiché la prima frequenza di cambio inclinazione è pari a 10 rad/sec, si calcolerà il punto in corrispondenza di 1 rad/sec.

Tenendo conto delle proprietà dei numeri complessi e dei logaritmi si può scrivere:

$$|F(j1.0)| = 0,01 \frac{1\sqrt{(0,1 \cdot 1)^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + 100^2} \sqrt{1^2 + (0,001 \cdot 1)^2}} = 0,01 \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{100^2} \sqrt{1^2}} = 0,01 \frac{1}{100 \cdot 1} = \frac{0,01}{100} = 0,0001$$

$$20 \log(0,0001) = 20 \cdot (-4) = -80 \text{db}$$

Quindi il primo tratto della curva passa per il punto (1 rad/sec; -80dB)

- Ogni polo introduce sulla spezzata un aumento della inclinazione in discesa di -20 dB/decade.
- Ogni zero introduce sulla spezzata un aumento dell'inclinazione in salita di +20 dB/decade

Quindi il diagramma del modulo della $F(j\omega)$ è il seguente:

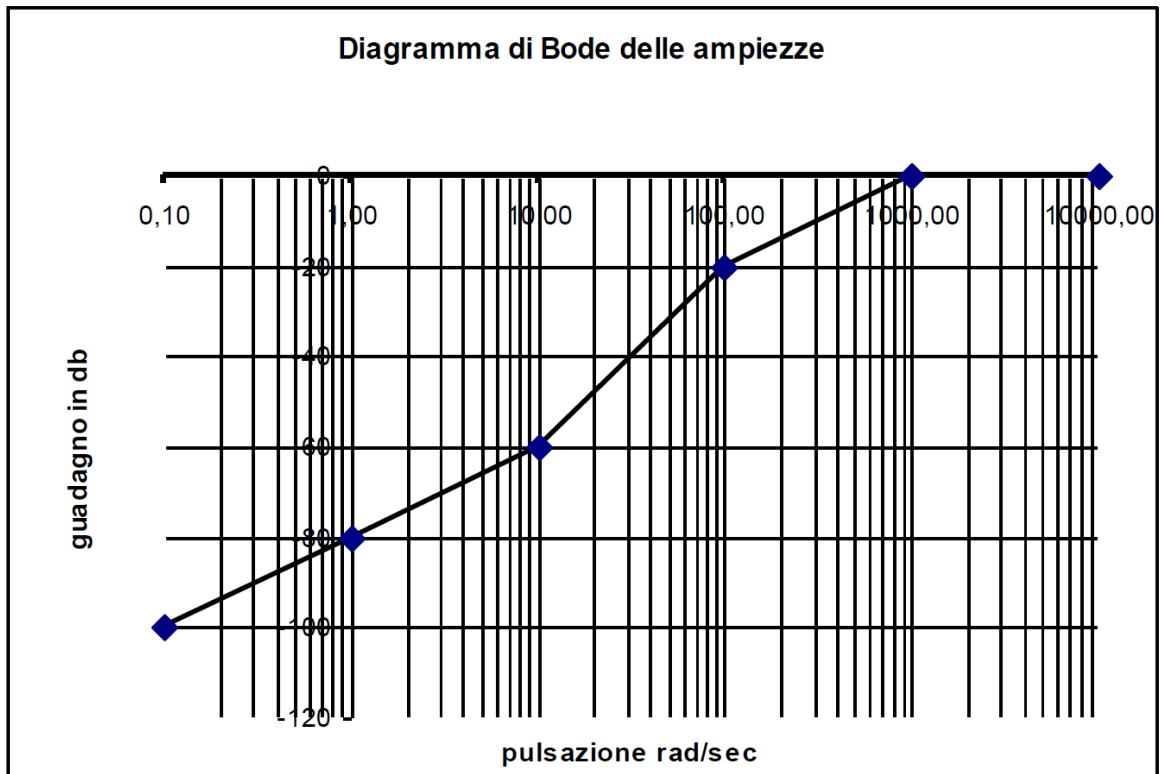


Diagramma della fase

- Il diagramma di Bode della fase, si può approssimare ad una serie di gradini di altezza +/- 90°
- Le pulsazioni ω_R di cambio altezza si ricavano dai poli ed i zeri della $F(s)$. E' sufficiente cambiare il segno ai poli ed agli zeri.
- Se non esistono poli o zeri sull'origine il diagramma parte con una semiretta a fase zero.
- Se esistono poli sull'origine il diagramma parte con una semiretta orizzontale a fase -90°.
- Se esistono zeri sull'origine il diagramma parte con una semiretta orizzontale a fase +90°.
- Ogni polo introduce un gradino in discesa di 90°.

- Ogni zero introduce un gradino in salita di 90° .
- Se si vuole avere un'approssimazione migliore le salite e le discese verticali del diagramma si devono sostituire con delle salite e discese a rampa (come descritto nel par. 2.1.2.3 e Figura 14), che iniziano a $\omega_R/4.81$ e terminano a $\omega_R \cdot 4.81$.

2.2 Diagrammi di Nyquist

Un'alternativa ai diagrammi di Bode per la rappresentazione della funzione di risposta armonica sono i cosiddetti diagrammi polari o di *Nyquist*. Essi sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione e su di essi si basa il fondamentale criterio di stabilità di Nyquist, più generale del criterio di stabilità di Bode (Si veda più avanti nel corso).

Si faccia riferimento alla risposta armonica fattorizzata nella forma con costanti di tempo:

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 \pm j\omega\tau_{zi})}{(j\omega)^h \prod_{i=1}^n (1 \pm j\omega\tau_{pi})}$$

Come nei Diagrammi di Bode, anche in questo caso la risposta armonica va scomposta in parte Reale R e parte Immaginaria I. Si riportano quindi sul diagramma complesso (che ha come asse delle ascisse l'asse reale e come asse delle ordinate l'asse immaginario) gli n valori di R ed I calcolati per gli n valori di ω ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$). Il diagramma di Nyquist va calcolato nei campi $-\infty < \omega \leq 0$ e $0 \leq \omega \leq \infty$.

2.2.1 Proprietà dei diagrammi di Nyquist

Una prima importante proprietà ai fini del tracciamento è la seguente:

$$G^*(j\omega) = G((j\omega)^*) = G(-j\omega)$$

La conseguenza della proprietà sopra riportata è che il diagramma di Nyquist può essere tracciato per $\omega \in (0, \infty)$ e poi ribaltato rispetto all'asse delle ascisse (il diagramma è simmetrico rispetto all'asse reale).

Il verso positivo di percorrenza del diagramma di Nyquist va da $-\infty$ a $+\infty$.

Il diagramma di Nyquist forma comunque una **curva chiusa** sul piano complesso. Gli eventuali asintoti (che interrompono la continuità del diagramma), si chiudono con una curva all'infinito (da 0_+ a 0_+ in senso orario).

Tale curva è nota come **curva di Cauchy** e fa un **numero di giri in**, senso orario, quanti sono necessari per raccordare la fase tra $G(j0^-)$ e $G(j0^+)$, ovvero un numero di rotazioni di 180° in senso orario per quanti sono i poli nell'origine (che determinano il numero degli asintoti).

2.2.2 Procedura di costruzione dei diagrammi di Nyquist

Per avere un andamento qualitativo del diagramma di Nyquist si eseguono i seguenti 5 passi:

1) Analisi asintotica con $\omega \in (0, \infty)$, ovvero calcolare:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| ; \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Arg}[G(j\omega)]$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| ; \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Arg}(G(j\omega))$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Re}[G(j\omega)] ; \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Im}[G(j\omega)]$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}[G(j\omega)] ; \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}[G(j\omega)]$$

- 2) Calcolare eventuali intersezioni con gli assi
- 3) Costruire il diagramma di Bode delle fasi di $G(j\omega)$ per eliminare ambiguità
- 4) Applicare la proprietà $G^*(j\omega) = G(-j\omega)$ (simmetria rispetto all'asse reale)
- 5) Eventuale chiusura ad infinito (fare tanti "mezzi giri" ovvero rotazioni di 180° in senso orario chiuse da 0^- a 0^+ ad infinito quanti sono i poli nell'origine)

Combinando queste informazioni si ottiene un diagramma di Nyquist qualitativamente corretto.

2.2.3 Esempi di costruzione dei diagrammi di Nyquist

2.2.3.1 Polo nell'origine (integratore)

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \rightarrow G(j\omega) = -j \frac{1}{\omega}$$

$$\text{Re}[G(j\omega)] = 0 \quad \text{I}[G(j\omega)] = -\frac{1}{\omega}$$

La parte reale della funzione è sempre uguale a 0, quindi il diagramma di Nyquist giace tutto sull'asse immaginario. Basta quindi studiare l'andamento della parte immaginaria.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{I}[G(j\omega)] = -\infty \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \text{I}[G(j\omega)] = \infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{I}[G(j\omega)] = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \text{I}[G(j\omega)] = 0$$

Poiché la curva va all'infinito per $\omega=0$, bisogna raccordare i due valori con un numero di rotazioni orarie di 180° pari al numero di poli nell'origine, partendo dal punto corrispondente a 0^- e arrivando al punto 0^+ (v. Figura 27).

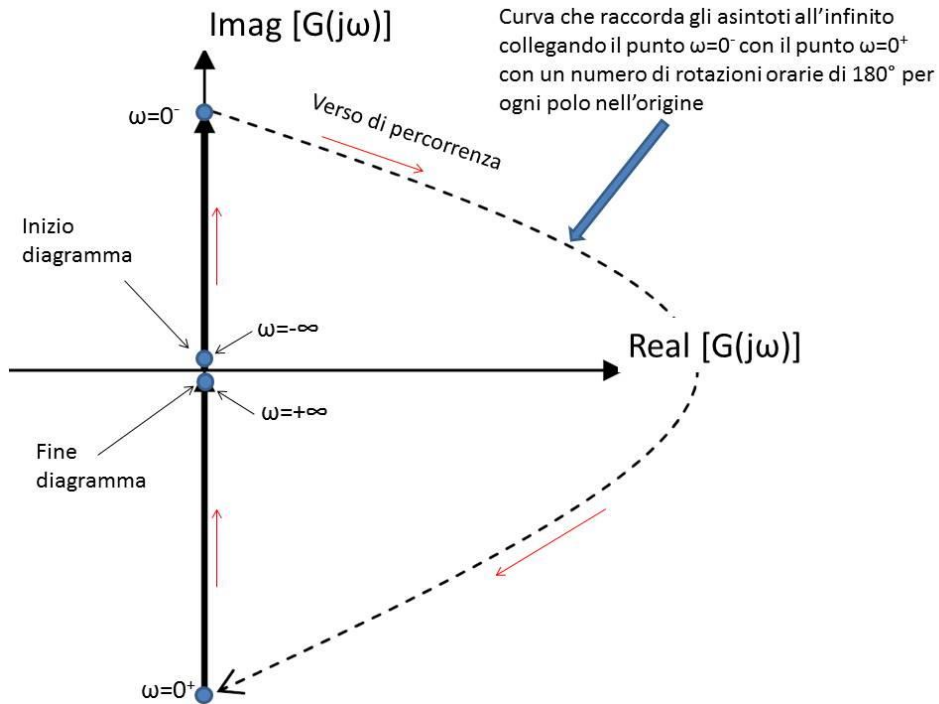


Figura 27 – Diagramma di Nyquist della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

2.2.3.2 Polo doppio nell'origine + polo stabile

$$G(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s+1)} \quad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 \cdot (j\omega+1)} = \frac{1}{(j\omega)^2 \cdot (j\omega+1)} = \frac{1-j\omega}{-\omega^2 \cdot (1+j\omega) \cdot (1-j\omega)}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2 \cdot (1+\omega^2)} + j \frac{\omega}{\omega^2 \cdot (1+\omega^2)}$$

$$Re[G(j\omega)] = -\frac{1}{\omega^2 \cdot (1+\omega^2)} \quad I[G(j\omega)] = \frac{\omega}{\omega^2 \cdot (1+\omega^2)}$$

La parte reale della funzione è sempre negativa, quindi il diagramma giace tutto nel semipiano con parte reale negativa. La parte immaginaria invece ha lo stesso segno di ω , per cui la parte di diagramma di Nyquist con $0 < \omega < \infty$, giace nel semipiano con parte immaginaria positiva.

Sia la parte reale che la parte immaginaria tendono ad infinito per ω che tende a 0. In particolare:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} R[G(j\omega)] = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} I[G(j\omega)] = \infty$$

Inoltre sia la parte reale che la parte immaginaria tendono a 0 per ω che tende a ∞ (il diagramma di Nyquist passa per l'origine per $\omega = +\infty$)

Calcoliamo ora la fase della risposta armonica

$$\text{Arg}[G(j\omega)] = \text{arctg}(-\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Arg}[G(j\omega)] = \text{arctg}(0) = -\pi \text{ (non } 0 \text{ perché la parte reale è sempre negativa)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Arg}[G(j\omega)] = \text{arctg}(-\infty) = \pi/2 \text{ (non } -\pi/2 \text{ perchè la parte immaginaria è positiva)}$$

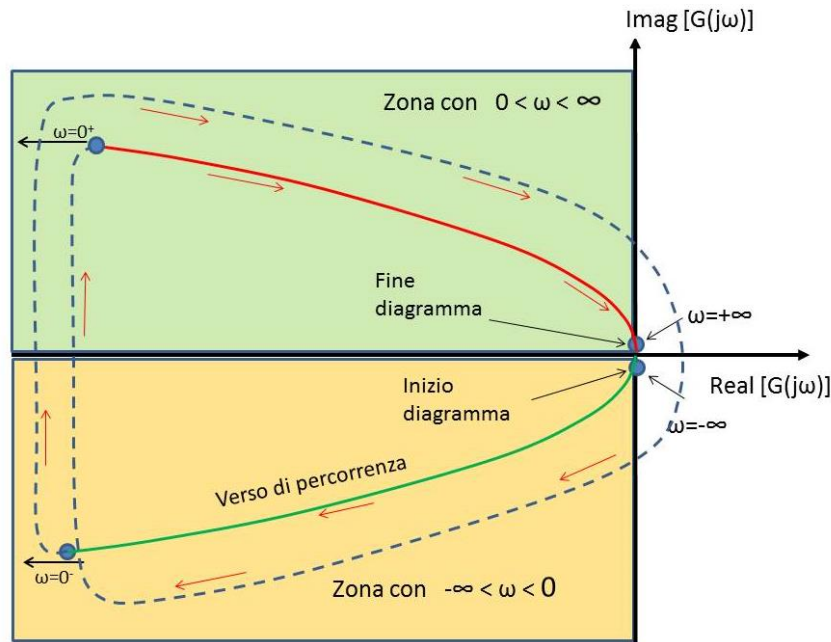


Figura 28 – Diagramma di Nyquist della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 \cdot (j\omega + 1)}$

Quindi, nell'origine ($\omega = +\infty$) il diagramma ha tangente verticale, mentre per $\omega = 0^+$ la fase tende a $-\pi$ (v. Figura 28, curva rossa).

Per quanto riguarda i punti di intersezione con gli assi abbiamo il passaggio per l'origine in corrispondenza di $\omega = -\infty$ e $\omega = +\infty$.

Tracciamo la parte del grafico che va da $\omega = -\infty$ a $\omega = 0^-$, che è simmetrica rispetto all'asse reale (v. Figura 28, curva verde).

Bisogna ora chiudere con una curva che raccorda gli asintoti all'infinito collegando il punto $\omega = 0^-$ con il punto $\omega = 0^+$ con una rotazione oraria di 360° (2 poli nell'origine) (curva tratteggiata in Figura 28).

2.2.3.3 Polo stabile

$$G(s) = \frac{K}{(s\tau + 1)} \text{ con } k > 0 \quad G(j\omega) = \frac{K}{\omega^2\tau^2 + 1} - j \frac{K\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Arg}(G(j\omega)) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Arg}(G(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$$

Per identificare l'andamento della fase, costruiamo il diagramma semplificato di Bode (v.).

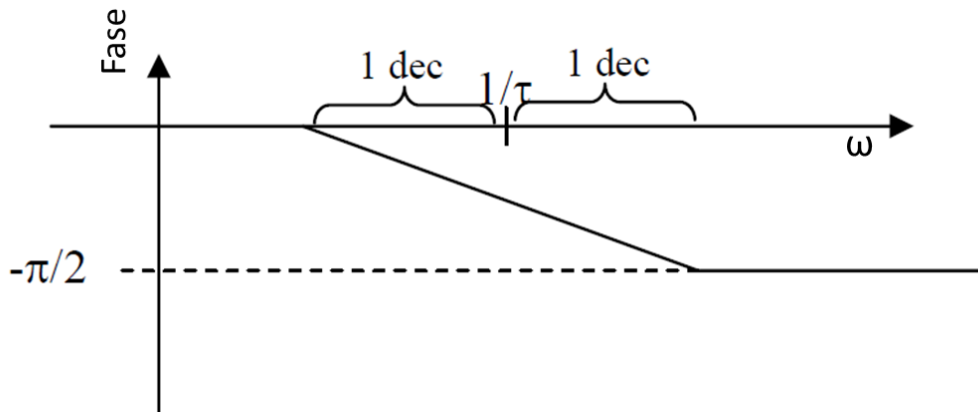


Figura 29 – Diagramma della fase (bode) della funzione $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega\tau+1)}$

Il diagramma di Nyquist è riportato in Figura 30.

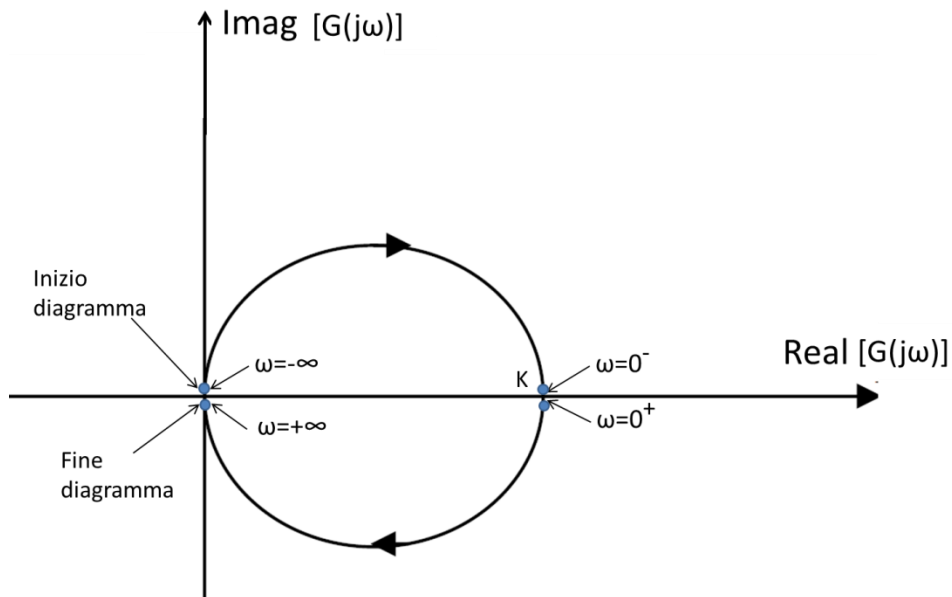


Figura 30 – Diagramma di Nyquist della funzione $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega\tau+1)}$

2.2.3.4 Polo instabile

$$G(s) = \frac{K}{(s\tau - 1)} \text{ con } k > 0 \text{ e } \tau > 0 \quad G(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2\tau^2 + 1} - j\frac{K\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} R[G(j\omega)] = -K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R[G(j\omega)] = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} I[G(j\omega)] = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I[G(j\omega)] = 0$$

Il diagramma di Nyquist è riportato in Figura 30.

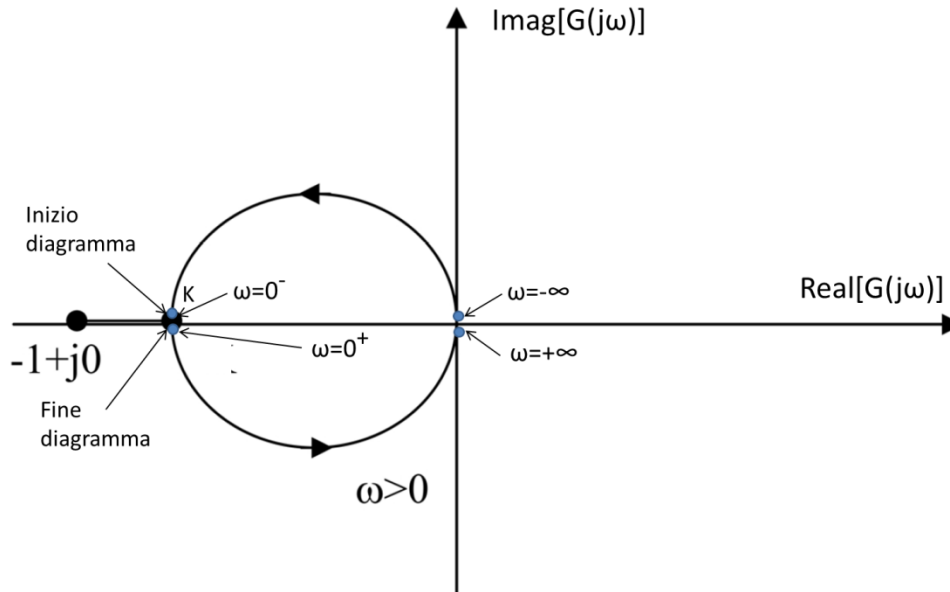


Figura 31 – Diagramma di Nyquist della funzione $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega\tau-1)}$

2.2.3.5 Polo nell'origine e polo reale positivo

$$G(s) = \frac{K}{s(s-1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega-1)} \quad G(j\omega) = -\frac{K}{\omega(j+\omega)} \quad G(j\omega) = -\frac{K}{(\omega^2+1)} + j\frac{K}{\omega(\omega^2+1)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} R[G(j\omega)] = -K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R[G(j\omega)] = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} I[G(j\omega)] = +\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^-} I[G(j\omega)] = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I[G(j\omega)] = 0$$

Il diagramma di Nyquist è riportato in Figura 32.

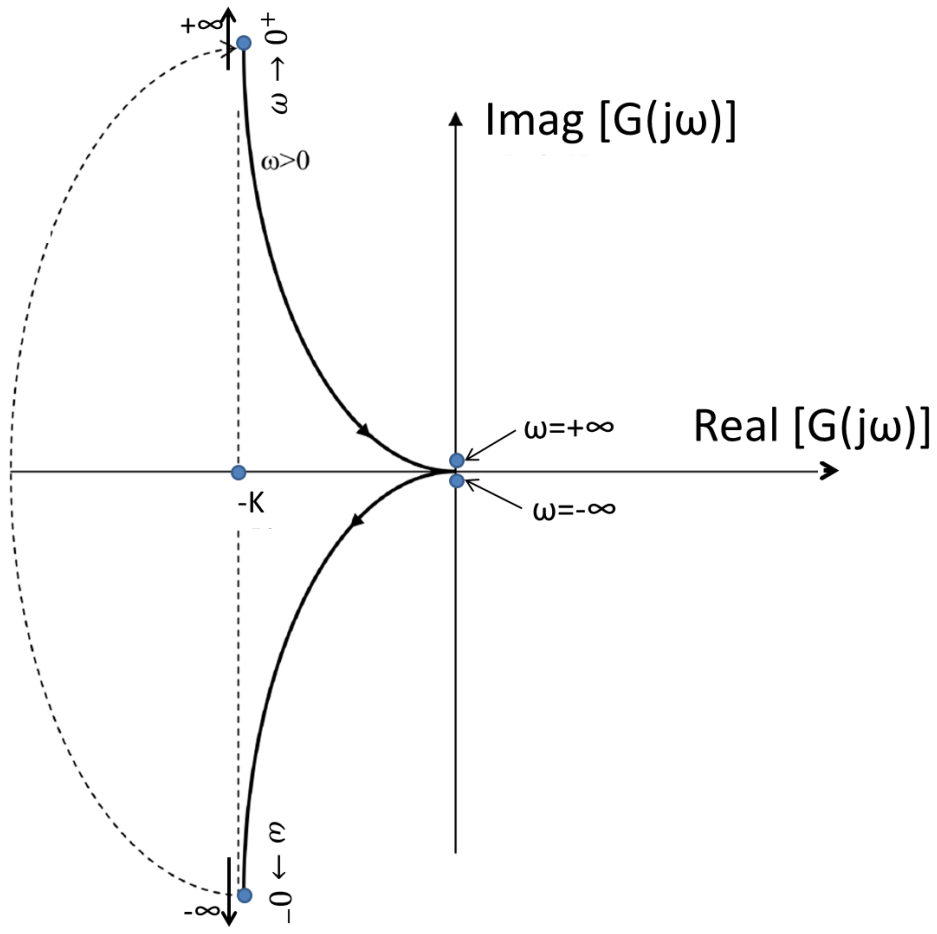


Figura 32 – Diagramma di Nyquist della funzione $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega-1)}$