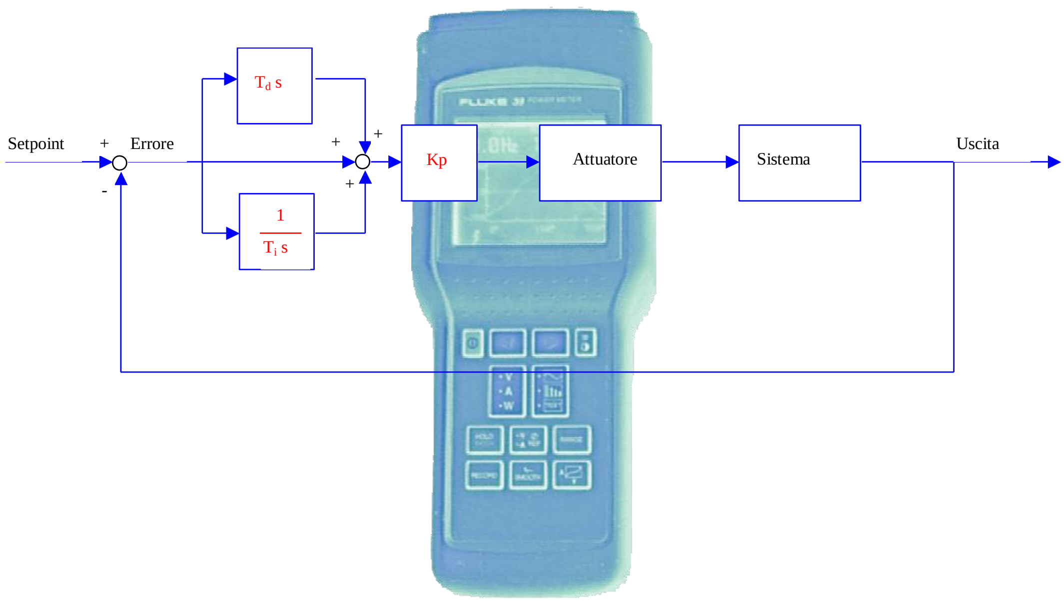
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Dispense dal Corso di

STRUMENTAZIONE E CONTROLLO DEGLI IMPIANTI ENERGETICI

Prof. Luigi Sorabella
Prof. Luciano Gramiccia



XI – ANALISI DEI SISTEMI DI CONTROLLO

Con la collaborazione di

Ing. Luisa Ferroni
Ing. Paolo Fargione

Rev. 5 - Maggio 2019

CAPITOLO XI

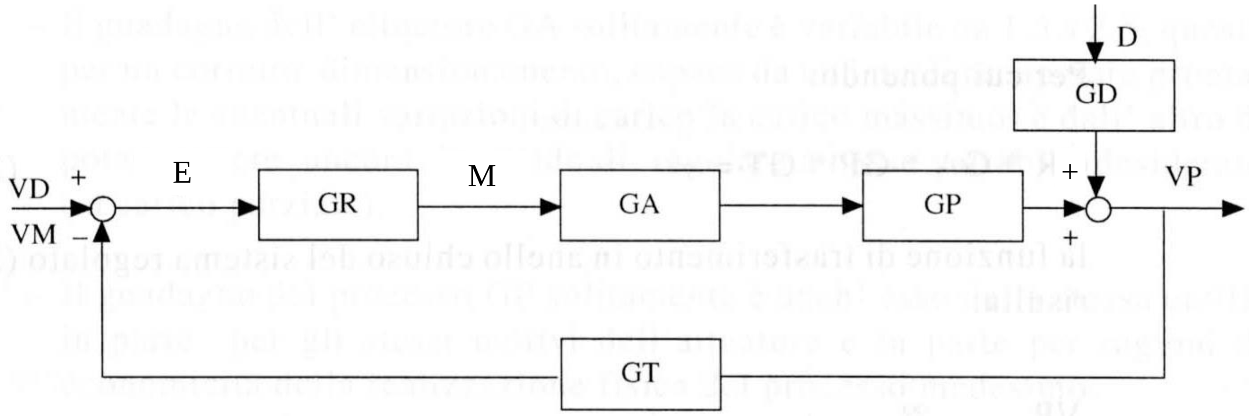
ANALISI DEI SISTEMI DI CONTROLLO

A Cura dei Proff. L. Sorabella e L.Gramiccia

INDICE

1 STRUTTURA GENERALE DI UN SISTEMA CON CONTROLLO IN CONTROREAZIONE

Nella figura seguente è rappresentato il tipico anello di retroazione con disturbo (D).



Dove:

VD	Valore desiderato (Set Point)
VM	Valore misurato (valore della variabile di processo elaborata dal trasduttore)
VP	Variabile di processo
E	Errore
M	Variabile di controllo
D	Disturbo
GR	Guadagno del regolatore
GA	Guadagno dell'attuatore e dell'organo di controllo
GP	Guadagno del processo
GD	Guadagno del disturbo
GT	Guadagno del blocco di retroazione

Figura 1 – Schema di anello di retroazione con disturbo

Il significato delle grandezze sopra riportate è stato ampiamente spiegato, tranne il disturbo, che rappresenta un ingresso indesiderato che agisce sull'impianto influenzandone l'uscita. A volte questo ingresso può essere accidentale, altre volte è fisiologico al sistema stesso. La variazione del carico elettrico di una linea può essere considerato un disturbo ai fini della regolazione della tensione. Ma è anche un qualcosa di fisiologico perché è difficile che l'assorbimento di una linea elettrica rimanga sempre costante. Siccome agisce direttamente sul sistema, il controllo in catena aperta non può riuscire a compensare, neanche parzialmente, i suoi effetti. In catena chiusa invece viene effettuata "la misura" dell'uscita che risente direttamente del disturbo. Quindi l'azione correttiva tiene conto del disturbo o meglio dei suoi effetti sull'uscita e pertanto è possibile compensarlo o almeno limitarne gli effetti.

2 CARATTERISTICHE DI QUALITA' DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

Le caratteristiche che determinano la bontà del sistema di controllo, sono le seguenti:

- **Precisione**
- **Prontezza**
- **Stabilità**

Tali caratteristiche verranno nel proseguo illustrate e discusse, in relazione ai disturbi, presenti o presentabili nel sistema regolato, quali:

- **Variazioni di valore desiderato (set point)**
- **Variazioni di carico**

2.1 Precisione

E' considerata una caratteristica statica in quanto viene espressa in termini di precisione in regime statico, cioè a transitorio esaurito. Esprime l'attitudine di un sistema di controllo a mantenere il valore della variabile regolata il più vicino possibile al valore della variabile desiderata.

2.2 Prontezza

E' considerata una caratteristica dinamica, in quanto evidenzia la dinamica con cui il sistema risponde ai disturbi che intervengono su di esso. Questa caratteristica esprime la rapidità con cui il sistema recupera le variazioni della variabile regolata, dovute a variazioni della variabile desiderata o del carico

2.3 Stabilità

E' considerata anch' essa una caratteristica dinamica e indica la capacità di un sistema di stabilizzarsi dopo un transitorio. La stabilità è la più importante fra le caratteristiche di un sistema di regolazione, poiché nessun sistema di regolazione è in grado di regolare qualsiasi variabile se non possiede la stabilità. In tal caso, infatti, interverrebbero delle elevate oscillazioni ad ogni transitorio, dannose per il processo regolato e per gli eventuali processi in cascata e/o interagenti con quest' ultimo.

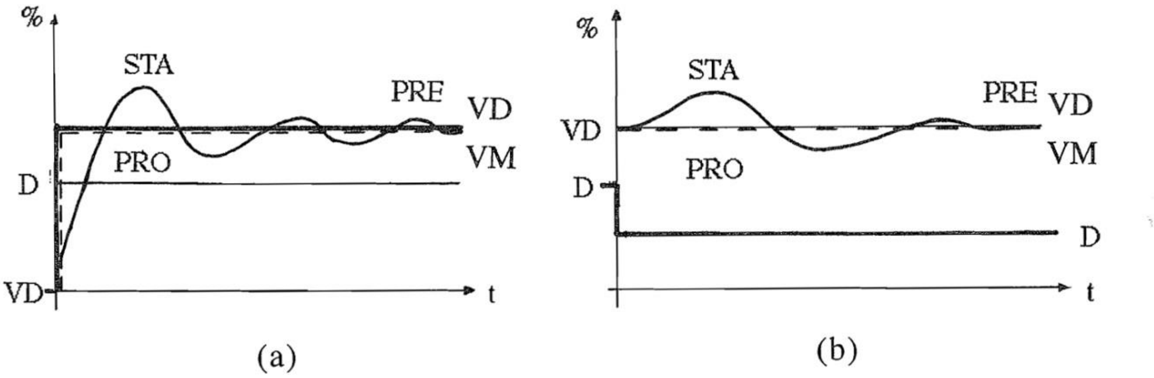
2.4 Tipiche risposte di un sistema di controllo

In *Figura 2* sono riportate le tipiche risposte di un sistema di controllo ad una variazione a gradino del valore desiderato VD (Set Point) e ad una variazione a gradino del disturbo D.

A sinistra è riportata la risposta alla variazione a gradino del "set point". La linea tratteggiata rappresenta la risposta *ideale*, mentre la linea continua rappresenta la risposta *reale*.
Il tempo impiegato dalla risposta reale ad eguagliare la risposta ideale misura la *prontezza* (PRO) del sistema di controllo.

Il numero di oscillazioni della risposta reale intorno alla risposta ideale misura la *stabilità* del sistema (STA), nel senso che ad una maggior frequenza delle oscillazioni corrisponde una minore stabilità.
La differenza tra risposta ideale e risposta reale alla fine del transitorio misura la *precisione* (PRE) del sistema di controllo.

Sempre in *Figura 2*, a destra, è riportata la risposta ad una variazione a gradino del disturbo. La linea tratteggiata rappresenta la risposta *ideale*, mentre la linea continua rappresenta la risposta *reale*.
Il tempo impiegato dalla risposta reale a ritornare al valore desiderato VD misura la *prontezza* (PRO) del sistema di controllo.
Il numero di oscillazioni della risposta reale intorno alla risposta ideale misura la *stabilità* del sistema (STA), nel senso che ad una maggior frequenza delle oscillazioni corrisponde una minore stabilità.
La differenza tra risposta ideale e risposta reale alla fine del transitorio misura la *precisione* (PRE) del sistema di controllo.



_ _ _ _ _ Risposta ideale

———— Risposta reale

D - Disturbo (carico)
PRE - Precisione
PRO - Prontezza
STA - Stabilita'

VD - Variabile Desiderata
VM - Variabile Misurata (o VP)
VP - Variabile Processo (regolata)
t - Variabile temporale (tempo)

Figura 2 – Tipiche risposte di un sistema di controllo

3 ANALISI STATICA DELL'ANELLO DI REGOLAZIONE

3.1 Struttura generale di un anello di controreazione

Con riferimento alla *Figura 1*, si vuole valutare il legame funzionale tra la variabile di processo VP, il valore desiderato VD e il disturbo D.

Si può porre:

$$VP = E \cdot GR \cdot GA \cdot GP + GD \cdot D$$

essendo:

$$E = VD - VP \cdot GT$$

da cui:

$$VP = (VD - VP \cdot GT) \cdot GR \cdot GA \cdot GP + GD \cdot D$$

sviluppando:

$$VP + VP \cdot GT \cdot GR \cdot GA \cdot GP = VD \cdot GR \cdot GA \cdot GP + GD \cdot D$$

$$VP \cdot (1 + GT \cdot GR \cdot GA \cdot GP) = VD \cdot GR \cdot GA \cdot GP + GD \cdot D$$

raggruppando:

$$VP = VD \cdot \frac{GR \cdot GA \cdot GP}{(1 + GT \cdot GR \cdot GA \cdot GP)} + D \cdot \frac{GD}{(1 + GT \cdot GR \cdot GA \cdot GP)} \qquad (1)$$

Il primo termine costituisce il legame tra la variabile di processo VP ed il set-point VD, mentre il secondo termine costituisce il legame tra la variabile di processo VP ed il disturbo D.

3.2 Precisione

Analizzando il sistema dal punto di vista statico ed in assenza del disturbo D, la (1) diventa:

$$\frac{VP}{VD} = \frac{GR \cdot GA \cdot GP}{1 + GT \cdot GR \cdot GA \cdot GP} \qquad (2)$$

La precisione del sistema di controllo è data dal rapporto *VP/VD*. Tale rapporto è tanto migliore quanto più si avvicina a 1. In tal caso, infatti, il valore misurato VP è uguale al set-point VD.

Per ottenere la precisione a regime del sistema regolato, occorre che il guadagno del numeratore sia molto elevato, poiché, essendo solitamente unitario il valore di GT, in tal modo il valore della frazione risulta molto prossimo ad 1.

Infatti, nel caso di $GR \cdot GA \cdot GP \gg 1$ e di $GT = 1$ si ha:

$$\frac{VP}{VD} = \frac{GR \cdot GA \cdot GP}{1 \cdot GR \cdot GA \cdot GP} = 1$$

Affinché il valore del numeratore della funzione di trasferimento dell' anello chiuso (detto numeratore è chiamato anche F.d.T. ad anello aperto), sia molto elevato, è necessario impostare il guadagno del regolatore *GR ad un valore elevato*, poiché, sia il guadagno dell' attuatore GA, che il guadagno del processo GP, sono di piccola entità (normalmente il prodotto dei due guadagni non supera 5). Infatti:

- Il guadagno dell' attuatore GA solitamente è variabile da 1.5 a 2.5, questo per un corretto dimensionamento, capace da un lato di recuperare prontamente le eventuali variazioni di carico (a carico massimo) e dall' altro di poter essere ancora in grado di regolare a basse variabili desiderate (a carico parziale);

- Il guadagno del processo GP solitamente è anch' esso della stessa entità, in parte per gli stessi motivi dell'attuatore e in parte per ragioni di economicità della realizzazione fisica del processo medesimo.

Ad esempio, con un guadagno del regolatore GR = 1 e il prodotto GA·GP = 5, la (2) fornisce solitamente una modestissima precisione (errore maggiore del 16%)

$$\frac{VP}{VD}=\frac{1\cdot 5}{1+1\cdot 1\cdot 5}=\frac{5}{6}=0.83$$

mentre per esempio con GR = 1000, si avrebbe una buonissima precisione (errore inferiore al 0.02%)

$$\frac{VP}{VD}=\frac{1000\cdot 5}{1+1000\cdot 1\cdot 5}=\frac{5000}{5001}=0.9998$$

Per il comportamento statico, basterebbe quindi solo un regolatore con guadagno sufficientemente elevato per contenere l'errore della regolazione.

3.3 Sensibilità ai disturbi

Per analizzare l'effetto del solo disturbo sulla variabile di processo, si consideri la (1) annullando *VD*. In tale ipotesi la (1) diventa:

$$\frac{VP}{D}=\frac{GD}{(1+GT\cdot GR\cdot GA\cdot GP)}$$

In questo caso, se $GR\cdot GA\cdot GP\gg 1$, si avrà :

$$\frac{VP}{D}\approx 0$$

Quindi anche in questo caso, un elevato valore del guadagno del regolatore (che determina un elevato guadagno della F.d.T. a catena aperta) assicura la precisione della variabile di processo VP, che non risulta influenzata in maniera sensibile dagli effetti del disturbo D.

4 ANALISI DINAMICA DELL'ANELLO DI REGOLAZIONE

Per l'esame statico, basterebbe quindi un regolatore con guadagno elevato per contenere I' errore della regolazione.
Realmente, pero i sistemi sono descrivibili tramite funzioni di trasferimento che oltre a presentare un guadagno statico, presentano anche un guadagno dinamico tipo:

$$W(s)=\frac{b_m\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{a_n\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

dove z_i e p_i sono rispettivamente gli zeri ed i poli della funzione di trasferimento.

In pratica le funzioni di trasferimento che usualmente si incontrano sono essenzialmente di due tipi:

a) Sistemi autoregolanti

$$W(s)=k\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

b) Sistemi non autoregolanti

$$W(s)=\frac{k}{s}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

essendo solitamente più rari quelli con funzioni di trasferimento derivative, cioè del tipo:

c) $W(s)=k\cdot\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$

d) $W(s)=k\cdot s\cdot\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$

Pertanto l'analisi statica dei sistemi deve essere completata, anche soprattutto in termini dinamici, perché nel nodo di confronto si potrebbe avere la variabile misurata (VM) in opposizione di fase rispetto alla variabile desiderata (VD) e pertanto ottenere un errore (E), non più differenza ma somma delle predette variabili e quindi instabilità del sistema.

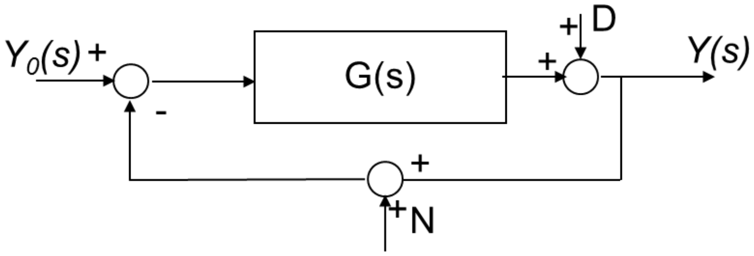
L' analisi dinamica dell'anello di regolazione, permette di identificare la stabilità del processo che si vuol regolare.

La <u>*stabilità*</u> indica la capacita del sistema di raggiungere la posizione di equilibrio con un andamento di tipo oscillatorio smorzato, o di tipo aperiodico

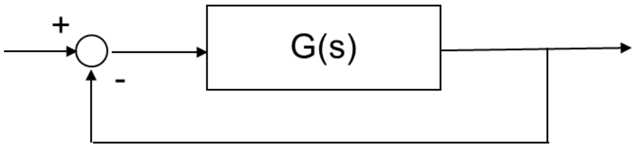
Nel caso in cui si verifichino delle oscillazioni di ampiezza permanente o crescente, il sistema si dice <u>*instabile*</u>.

Il problema della stabilita richiede una particolare attenzione in fase di progetto. Infatti è relativamente semplice ottenere delle buone precisioni, in quanto si dispone di circuiti amplificatori con elevato guadagno, mentre non è altrettanto semplice raggiungere una buona condizione di *stabilità* mantenendo soddisfacenti i *tempi di risposta.*

In basso viene riportato lo schema a blocchi tipico di un sistema a retroazione unitaria con ingresso di disturbi nel sistema (D) e nell’anello di retroazione (N)



Essendo la stabilità una proprietà del sistema, indipendente dagli ingressi, possiamo considerare il sistema di controllo privo dei disturbi, come nello schema a blocchi sottostante:



L'analisi dinamica dell'anello di regolazione permette di identificare la stabilità del processo che si vuol regolare. La stabilità è una caratteristica molto importante di un sistema di controllo. Un sistema di controllo in anello chiuso instabile non è progettato correttamente, poiché il suo funzionamento porta al danneggiamento di alcune apparecchiature. In definitiva, un sistema di controllo deve essere di natura stabile per poter risultare di uso pratico.

4.1 Concetti generali riguardanti i comportamenti stabili ed instabili di un sistema

Si possono definire tre comportamenti del sistema riguardo alla stabilità:

- Stabilità asintotica
  E’ il comportamento di un sistema che, sottoposto ad una perturbazione finita e di durata limitata, risponde riportandosi nel punto iniziale di equilibrio (*equilibrio asintoticamente stabile*).

- Stabilità semplice
  E’ il comportamento di un sistema che, sottoposto ad una perturbazione finita e di durata limitata, si porta in una nuova situazione di equilibrio diversa da quella iniziale (*equilibrio indifferente o marginalmente stabile*).

- Instabilità
  E’ il comportamento di un sistema che, sottoposto ad una perturbazione finita e di durata limitata, continua ad evolvere nel tempo, fornendo una risposta divergente (*equilibrio instabile*).

4.2 Definizioni ed acronimi

Si forniscono di seguito le definizioni ed i significati di alcuni acronimi utilizzati nell'analisi dei sistemi.

- Sistemi **SISO** (**S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput)
  Sono sistemi caratterizzati da una sola grandezza di input ed una sola grandezza di output. Nel seguito si farà riferimento solo a questo tipo di sistemi. Nella figura seguente è riportato lo schema a blocchi di tali tipi di sistemi.

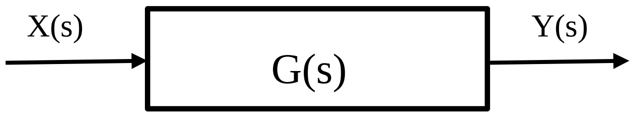


Figura 3 - Schema a blocchi di un sistema SISO

- Sistemi **MIMO** (**M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput)
  Sono sistemi caratterizzati da più di una grandezza di input e da più di una grandezza di output. Non saranno considerati nel seguito. Nella figura seguente è riportato lo schema a blocchi di tali tipi di sistemi. Tali sistemi, per semplicità di esposizione, non saranno trattati nel seguito.

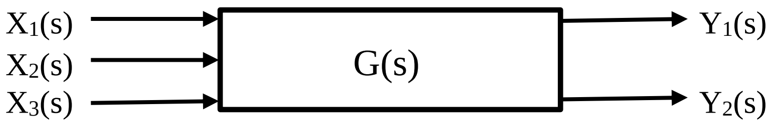


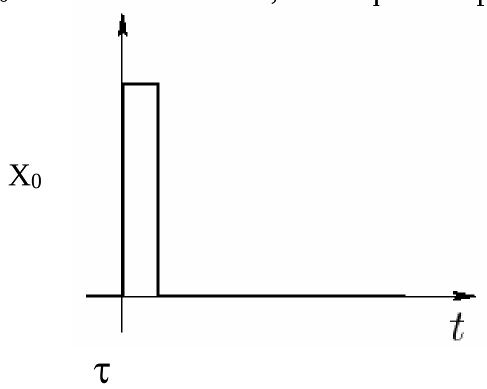
Figura 4 - Schema a blocchi di un sistema MIMO

4.3 Proprietà della stabilità in sistemi lineari – Risposta ad un segnale limitato nel tempo

Consideriamo il sistema SISO lineare tempo-invariante come quello riportato in *Figura 3*.

Supponiamo che il sistema sia in una condizione di quiete o di equilibrio all'istante iniziale t=0.
Ciò significa che inizialmente l'ingresso e l'uscita sono nulle o costanti.

Supponiamo che il sistema, inizialmente in quiete, venga perturbato mediante l'applicazione di un segnale in input pari ad X_0 di durata limitata τ , come quello rappresentato nella figura seguente.



A seguito della variazione del segnale di input, si avrà una risposta del sistema che può essere di tre tipi:

1. Risposta limitata

   Esiste, in tal caso, una costante My positiva tale che:

$$| y(t) | \leq My \text{ per ogni } t \geq 0$$

   Il sistema si dice ***semplicemente stabile*** (v. Figura 5).

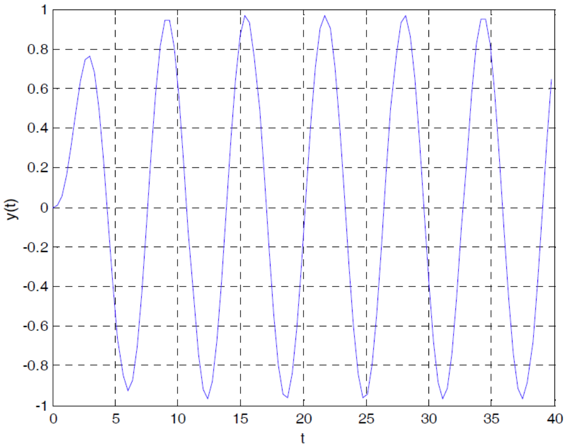


Figura 5 - Risposta di un sistema semplicemente stabile

2. Risposta convergente asintoticamente a zero

   Esiste, in tal caso, una costante My positiva tale che:

$$| y(t) | \leq My \ \forall t \geq 0 \text{ e } \lim_{t \to +\infty} | y(t) | = 0$$

   Il sistema si dice ***asintoticamente stabile*** (v. *Figura 6*).

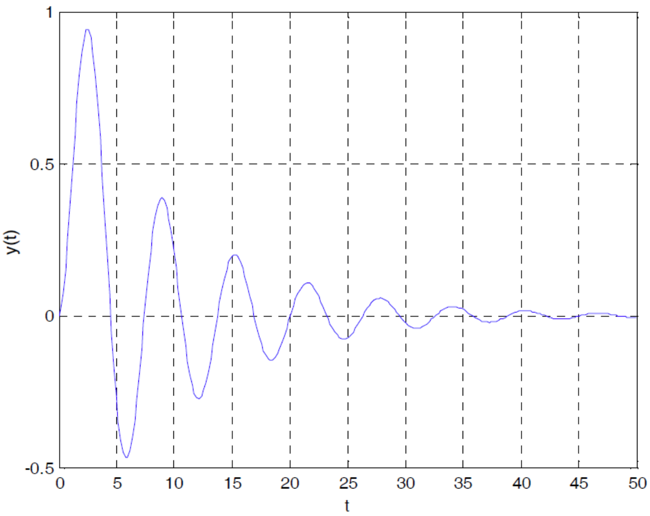


Figura 6 - Risposta di un sistema asintoticamente stabile

3. Risposta divergente

   Non esiste alcuna costante My positiva tale che l'ampiezza della risposta diventi limitata a partire da un certo istante di tempo. Essa cresce e diviene di ampiezza infinita oppure oscilla con ampiezza che cresce indefinitamente.

   Il sistema si dice ***instabile*** (v. *Figura 7*).

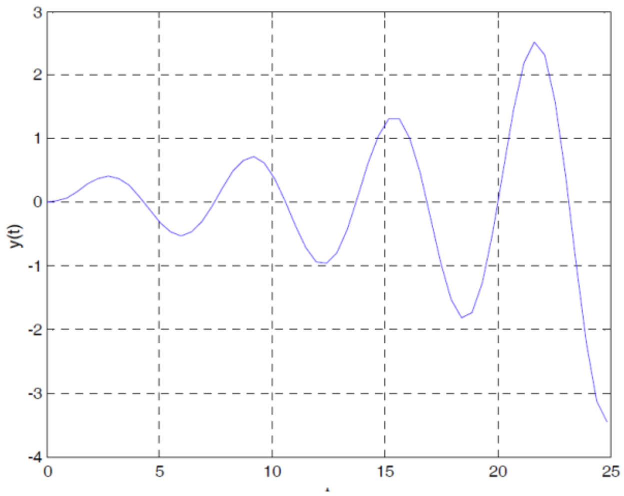


Figura 7 . Risposta di un sistema instabile

In un sistema lineare la tipologia della risposta ad una perturbazione di durata finita non dipende dalla condizione iniziale né dall'entità della perturbazione applicata, ciò per una conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti.

Inoltre in un sistema lineare l'analisi di stabilità fatta per un punto di equilibrio vale per ogni punto di funzionamento del sistema: in altre parole, tutti i punti di equilibrio del sistema hanno le stesse caratteristiche di stabilità.

Invece in un sistema non lineare l'analisi di stabilità va fatta per ogni diverso punto di funzionamento e al variare della perturbazione applicata. Generalmente tale analisi fornisce risultati differenti secondo il tipo di perturbazione e dei punti di equilibrio considerati.

Un generico sistema lineare, quindi, è asintoticamente stabile, oppure semplicemente stabile o instabile, a seconda che la sua risposta, ad una *qualunque* perturbazione di durata finita, abbia un andamento del tipo visto nelle figure precedenti.

Come riportato nel Cap. 7 Par. 4.4, la risposta transitoria di un sistema (com'è sicuramente nel nostro caso, vista la durata limitata nel tempo dell'ingresso) è una combinazione dei modi dell'ingresso e dei modi del sistema.

Poiché, però, i modi dell'ingresso sono tutti convergenti (diventando nullo l'ingresso dopo il tempo τ), la stabilità o meno del sistema dipende solo dai modi e quindi dai poli del sistema.

Sempre nel Cap. 7 Par. 4.4, sono riportati gli andamenti nel tempo dei modi elementari di un sistema, evidenziando che, sia per i modi aperiodici (polo con solo parte reale) che per i modi pseudoperiodici (polo complesso coniugato), la convergenza o meno del modo dipende esclusivamente dal valore della parte reale del polo associato.

In particolare, se la parte reale del polo è negativa, il modo si ridurrà asintoticamente a 0, mentre se è positiva il modo divergerà in maniera esponenziale.
Nel caso di parte reale pari a 0, il modo corrispondente produrrà, nel dominio del tempo, una oscillazione di durata infinita ad ampiezza costante.

Oltre ai modi semplici di un sistema, discussi sopra, si farà ora riferimento ad alcuni casi particolari che però si presentano frequentemente nelle funzioni di trasferimento dei sistemi.

- Modi con poli multipli reali

  Sono modi del tipo: $\frac{1}{(s-a)^n}$ con a numero reale e $\neq 0$

  L'anti-trasformata di tale modo vale: $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$

  Il modo è convergente per a<0 e divergente per a>0.

- Modi con poli multipli complessi coniugati con parte reale $\sigma \neq 0$

  Sono sempre modi del tipo: $\frac{1}{(s-a)^n}$ con a numero complesso $a = \sigma + i\omega$

  L'anti-trasformata di tale modo vale: $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\sigma t} sen\omega t$

  Il modo è convergente per σ<0 e divergente per σ>0.

- Modi con poli multipli complessi coniugati con parte reale σ=0

  Sono sempre modi del tipo: $\frac{1}{(s-a)^n}$ con a numero complesso $a = i\omega$

  L'anti-trasformata di tale modo vale: $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} sen\omega t$

  Il modo è divergente per n$\geq$ 2.

- Modi con polo singolo nell'origine

  E' un modo del tipo: $\frac{1}{s}$

  L'anti-trasformata di tale modo è la funzione a gradino, per cui l'uscita rimane costante nel tempo

- Modi con poli multipli nell'origine

  E' un modo del tipo: $\frac{1}{s^n}$

  L'anti-trasformata di tale modo è pari a $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ per cui il modo è divergente per n≥ 2.

Essendo la risposta complessiva di sistema la combinazione delle risposte associate ad ogni singolo modo del sistema, affinché tutti i modi del sistema siano convergenti è necessario che i poli siano tutti disposti nel semipiano sinistro del piano complesso (semipiano con parte reale negativa).

Inoltre, a poli semplici posti sull'asse immaginario corrispondono modi (oscillatori o costanti) che sono limitati.

Infine, a poli multipli sull'asse immaginario e a poli posti nel semipiano destro del piano complesso (semipiano a parte reale positiva) corrispondono modi divergenti.

Dalle considerazioni precedenti si possono dedurre le seguenti proprietà:

<u>Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia asintoticamente stabile è che la sua funzione di trasferimento presenti poli tutti a parte reale negativa.</u>

<u>Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia semplicemente stabile è che la sua funzione di trasferimento presenti uno o più poli semplici sull'asse immaginario e che tutti gli altri poli siano a parte reale negativa.</u>

<u>Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia instabile è che la sua funzione di trasferimento presenti uno o più poli multipli sull'asse immaginario oppure uno o più poli a parte reale positiva.</u>

Una particolare risposta di un sistema lineare è la risposta all'impulso, che contiene i soli modi del sistema (essendo la trasformata dell'ingresso pari ad 1).

Ne consegue che un sistema *asintoticamente stabile* ha una *risposta all'impulso convergente a zero*, un sistema *semplicemente stabile* ha una *risposta all'impulso limitata* (oscillatoria o costante), mentre un *sistema instabile* ha una *risposta all'impulso divergente*.

Si analizzino i seguenti esempi:

1. $G(s) = \frac{(s-1)}{s \cdot (1+2s)}$
2. $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$
3. $G(s) = \frac{1}{s^2-2s+2}$

Il sistema n. 1 ha un polo semplice nell'origine ed un altro polo reale negativo (p=-0.5). Il sistema risulta quindi semplicemente stabile.

Il sistema n. 2 ha 2 poli complessi coniugati ($p_{1/2} = -1 \pm j$) con parte reale negativa. Il sistema risulta quindi asintoticamente stabile.

Il sistema n. 3 ha 2 poli complessi coniugati ($p_{1/2} = 1 \pm j$) con parte reale positiva. Il sistema risulta quindi instabile.

4.4 Proprietà della stabilità in sistemi lineari – Stabilità BIBO

Oltre alla stabilità con perturbazioni di durata finita, precedentemente introdotta, si fa spesso riferimento ad un'altra definizione di stabilità, la *stabilità BIBO ("Ingresso limitato –uscita limitata" o "Bounded Input – Bounded Output")*.

Un sistema SISO lineare tempo-invariante si dice stabile BIBO se, trovandosi in condizioni iniziali di quiete, ad ogni ingresso di ampiezza limitata risponde con una uscita di ampiezza limitata. In altre parole, un sistema è stabile BIBO se, dato un ingresso x(t) tale che

$$|x(t)| \leq M_x \quad \forall t \geq 0$$

con Mx costante positiva, esiste una costante positiva My tale che la corrispondente risposta y(t) soddisfi la relazione

$$|y(t)| \leq M_y \quad \forall t \geq 0.$$

Può essere data la seguente definizione:

Un sistema SISO lineare tempo-invariante è stabile BIBO se e solo se esso è asintoticamente stabile.

La conseguenza è che un sistema SISO lineare tempo-invariante che sia semplicemente stabile o instabile non è stabile BIBO.

La proprietà precedente è facilmente dimostrabile se si considera che un sistema asintoticamente stabile risponde ad un ingresso limitato, che ha evidentemente modi limitati per la sua caratteristica di limitatezza, con una risposta forzata che contiene tali modi limitati e quelli della funzione di trasferimento del sistema, questi ultimi convergenti poiché i poli sono tutti a parte reale negativa.
Quindi un sistema asintoticamente stabile risponde ad un qualsiasi ingresso limitato in ampiezza con una uscita che è limitata anch'essa.

Analogamente, se si considera un sistema instabile, esso risponde ad un ingresso limitato con una risposta forzata che contiene i modi dell'ingresso, limitati, e quelli della funzione di trasferimento, tra i quali alcuni sono divergenti, poiché almeno un polo è a parte reale positiva o multiplo e posto sull'asse delle ordinate del piano complesso.

Quindi un sistema instabile risponde ad un ingresso limitato con una uscita non limitata e dunque non è stabile BIBO.

Più complesso è il caso dei sistemi semplicemente stabili. Un sistema siffatto risponde ad un ingresso limitato con una risposta forzata che contiene i modi dell'ingresso, limitati, e quelli della funzione di trasferimento, tra i quali alcuni sono limitati, poiché almeno un polo è semplice e posto sull'asse delle ordinate del piano complesso.

Per alcuni ingressi limitati, tuttavia, può accadere che un polo della trasformata dell'ingresso coincida con qualcuno dei poli semplici e a parte reale nulla del sistema semplicemente stabile. In tal modo, nella trasformata dell'uscita, è presente un modo multiplo sull'asse immaginario, che determina l'instabilità dell'uscita.

Pertanto un sistema semplicemente stabile non è stabile BIBO.

Consideriamo, come esempio, il sistema con la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Il sistema è semplicemente stabile, avendo un unico polo semplice in s=0, cui corrisponde una risposta all'impulso costituita da un gradino ad ampiezza costante:

$$y(t) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Se invece consideriamo la risposta ad un ingresso a gradino, la trasformata della risposta è pari a:

$$Y(s) = G(s) * \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Avendo la funzione un polo doppio nell'origine del piano complesso, il sistema sarà sicuramente instabile all'ingresso a gradino, quindi non stabile BIBO.

4.5 Verifica di stabilità di un sistema contro-reazionato con analisi della funzione di trasferimento in anello chiuso

Le considerazioni generali riguardanti la stabilità sono state applicate ad un generico sistema, mentre ora verranno applicate al un sistema contro-reazionato riportato nella figura seguente:

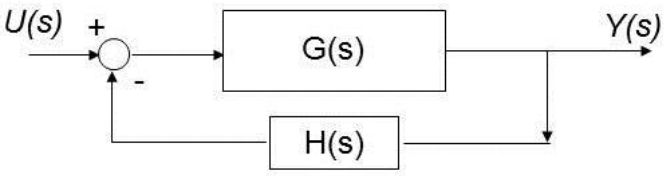


Figura 8 - Schema a blocchi di un sistema a contro-reazione

Applicando le regole dell'algebra dei blocchi, il precedente blocco è equivalente al blocco rappresentato nella figura successiva:

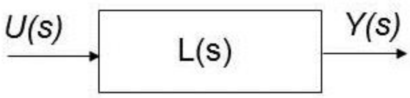


Figura 9 - Blocco equivalente di un sistema a contro-reazione dove la FdT L(s) è detta *funzione di trasferimento ad anello chiuso*, mentre la FdT G(s)·H(s)[1] è detta *funzione di trasferimento ad anello aperto*.

La L(s) vale: $$L(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)\cdot G(s)}$$

Espressa la G(s) come rapporto tra polinomi:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa:

$$L(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)\cdot G(s)} = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}}{1+H(s)\frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{N(s)}{D(s)+H(s)\cdot N(s)}$$

Definiamo il denominatore di questa funzione di trasferimento *polinomio caratteristico in anello chiuso*:

$$\chi(s) = N(s)\cdot H(s) + D(s)$$

Le radici di tale polinomio sono quindi i *poli* del sistema in anello chiuso.

Nel caso che la funzione di trasferimento del ramo di controreazione sia unitaria, cioè H(s)=1, il polinomio caratteristico diventa:

$$\chi(s) = N(s) + D(s)$$

Al sistema in anello chiuso si possono applicare tutte le caratteristiche di stabilità dei sistemi descritte ai par. 4.3 e 4.4.

Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (e quindi BIBO stabile) se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa.

Valgono anche le successive affermazioni:

- condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia semplicemente stabile è che il *polinomio caratteristico* del sistema presenti uno o più radici semplici sull'asse immaginario e che tutte le altre radici siano a parte reale negativa.

- Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia instabile è che il polinomio caratteristico del sistema uno o più zeri multipli sull'asse immaginario oppure uno o più zeri a parte reale positiva.

[1] Il termine G(s)·H(s) è la funzione di trasferimento a ciclo aperto quando si passa da un ciclo di retroazione con funzione di trasferimento H(s) ad un ciclo a controreazione unitaria.

Come esempio, si analizzi il sistema contro-reazionato con FdT ad anello aperto e blocco di retroazione unitaria:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

Il polinomio caratteristico vale:

$$\chi(s) = (1+s)^3 + 10 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 10 = s^3 + 3s^2 + 3s + 11$$

Il polinomio caratteristico ha una radice reale ed una coppia di radici complesse coniugate:

$s_{1,2} = 0.07 \pm 1.87j$
$s_3 = -3.15$

In tal caso, avendo il polinomio caratteristico 2 radici complesse coniugate con parte reale positiva, il sistema è instabile.

4.6 Criteri per la valutazione della stabilità dei sistemi di controllo in anello chiuso - Criterio di Routh

Per determinare se la FdT in anello chiuso è stabile o meno non è necessario conoscere la posizione esatta dei poli, ma è sufficiente sapere se essi si trovano o meno tutti a sinistra dell'asse immaginario. Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema retro-azionato è stabile senza dover calcolare esattamente la posizione delle radici del polinomio caratteristico.

In generale il polinomio caratteristico può essere espresso nella forma:

$$\chi(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots\dots.. + a_1 \cdot s + a_0$$

dove ovviamente le radici del polinomio caratteristico sono i poli della FdT in anello chiuso L(s).

4.6.1 Lemma di Routh

Il Lemma di Routh enuncia che: *condizione necessaria, affinché le radici del polinomio caratteristico abbiano tutte parte reale negativa, è che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico siano di segno concorde*.

Il lemma di Routh ci dice che:

- Se tutti i coefficienti del polinomio non sono concordi la stabilità asintotica è esclusa;
- Se tutti i coefficienti del polinomio non sono concordi potrebbe però esistere la stabilità semplice;
- Se tutti i coefficienti del polinomio sono concordi la stabilità asintotica o la stabilità semplice non sono garantite;

4.6.2 Criterio di Routh

Mentre in generale il lemma di Routh fornisce una condizione necessaria per l'asintotica stabilità di un sistema, il criterio di Routh fornisce una condizione necessaria e sufficiente.

Il criterio di Routh enuncia che: *ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh, corrisponde una radice a parte reale positiva del polinomio caratteristico, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.*

Ma cos'è la Tabella di Routh ?

La tabella di Routh è una tabella che ha ***n+1*** righe (dove n è il grado del polinomio caratteristico).
Il numero di colonne è invece uguale a ***1+ la parte intera di n/2***.

In pratica per un valore di n=3 la tabella di Routh è una 4x2, per n=4 è una 5x3, per n=5 è una 6x3, etc.

Nella prima riga della tabella si pongono i termini:

$$a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, a_{n-6,} \ldots\ldots a_1 o\ a_0$$

Nella seconda riga della tabella si pongono i termini:

$$a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, a_{n-7}, \ldots\ldots a_1 o\ a_0$$

Le righe successive si riempiono con i termini:

$$b_{n-2}, b_{n-4}, b_{n-6}, \ldots$$

$$c_{n-3}, c_{n-5}, \ldots.$$

Fino a riempire l'ultima riga (la n+1$_{esima}$), nel quale ci sarà un solo termine che, se i calcoli sono stati effettuati correttamente, deve risultare uguale a a_0 (v. *Figura 10*).

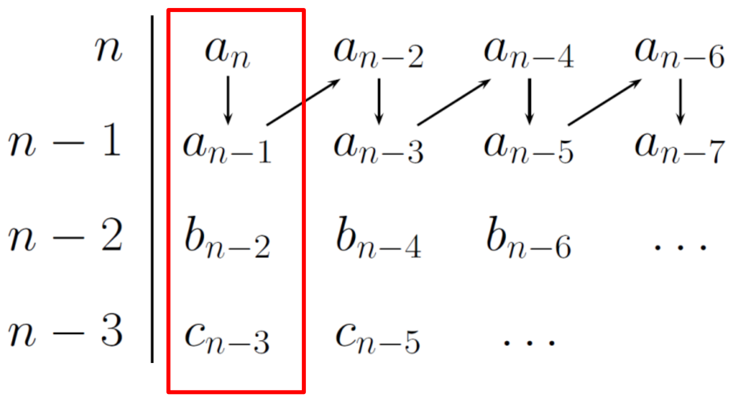


Figura 10 - Costruzione della Tabella di Routh

I valori dei termini b, c, …. sono ricavati dalle formule seguenti:

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}.a_{n-3} - a_{n-1}.b_{n-4}}{b_{n-2}} \qquad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}.a_{n-5} - a_{n-1}.b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

Alla fine della costruzione della tabella, i termini della prima colonna (all'interno del riquadro rosso in *Figura 10*), affinché il sistema sia asintoticamente stabile, devono essere tutti dello stesso segno, poiché ad ogni variazione di segno corrisponde una radice del polinomio caratteristico con parte reale positiva.

Per il calcolo dei termini b, c, ….. si può far ricorso al metodo matriciale:

$$b_{n-2} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad b_{n-4} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad b_{n-6} = \frac{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{bmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$\begin{array}{r|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots &
\end{array}$$

Figura 11 - Costruzione della 3a riga della Tabella di Routh

$$c_{n-3} = \frac{\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{bmatrix}}{-b_{n-2}} \qquad c_{n-5} = \frac{\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-4} \\ b_{n-2} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{-b_{n-2}}$$

$$\begin{array}{r|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots &
\end{array}$$

Figura 12 - Costruzione della 4a riga della Tabella di Routh

Dal criterio di Routh si può dedurre che: *condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici del sistema siano negative è che non si abbiano variazioni di segno nella prima colonna della* *Tabella di Routh*.
Analogamente si ha: *condizione sufficiente affinché un sistema lineare SISO tempo-invariante sia instabile è che tra i termini della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata vi sia almeno uno di segno discorde dagli altri*

Come esempio si prenda il sistema lineare riportato nel par. 4.5. Il polinomio caratteristico è:

$$\chi(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 11$$

Si costruisca la tabella di Routh:

3	**1**	3
2	**3**	11
1	**-2/3**	0
0	**11**	

Sulla prima colonna (in grassetto) vi sono due inversioni di segno, che portano a dire che esistono 2 radici con parte reale positiva. Il sistema risulta quindi instabile come visto nel par. 4.5.

Come verifica della tabella di Routh, si controlli che nell'ultima riga il valore della tabella sia uguale ad a_0. Questa è una proprietà generale della tabella di Routh.

Si può notare che il polinomio caratteristico soddisfa il criterio del Lemma di Routh (condizione solo necessaria).

Come ulteriore esempio si analizzi il sistema riportato in *Figura 13*.

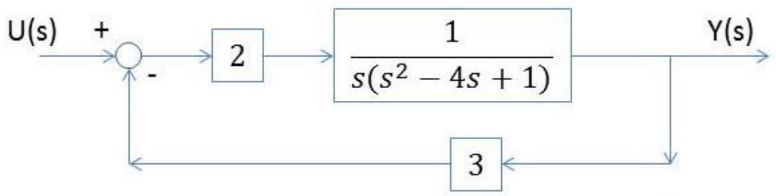


Figura 13 – Schema a blocchi

La Fdt ad anello chiuso L(s) vale:

$$L(s) = \frac{\frac{2}{s(s^2-4s+1)}}{1+\frac{3\cdot 2}{s(s^2-4s+1)}} = \frac{2}{s^3-4s^2+s+6}$$

Il polinomio caratteristico vale:

$$\chi(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$$

Si noti che il polinomio caratteristico non verifica il Lemma di Routh, per cui il sistema non è asintoticamente stabile, ma potrebbe essere semplicemente stabile, oltre che instabile.

Si costruisca quindi la tabella di Routh:

3	**1**	1
2	**-4**	6
1	**+5/2**	0
0	**6**	

La tabella presenta 2 variazioni di segno sulla prima colonna, che in base al criterio di Routh, è indice di 2 radici con parte reale positiva. Quindi il sistema è instabile con 2 poli con parte reale positiva.

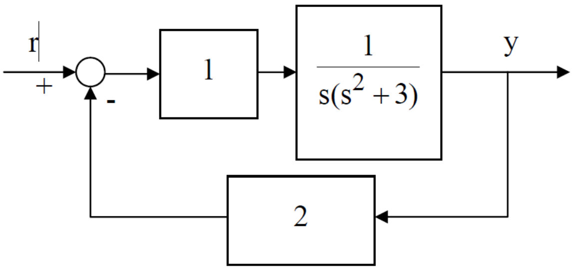
4.6.3 Casi particolari nella costruzione della tabelle di Routh

Nella costruzione della tabella di Routh si possono presentare alcuni casi particolari. In particolare si può presentare il caso di un termine nullo sulla prima colonna della matrice o di una intera riga nulla.

4.6.3.1 Termine nullo sulla prima colonna della Tabella di Routh

In tal caso esso viene sostituito con una quantità *positiva* ε che poi si fa tendere a zero, e si ragiona come nel caso generale.

Si consideri il seguente sistema:



Evidentemente il sistema in anello aperto è semplicemente stabile, con tre poli disposti sull'asse immaginario (s_1=0, $s_{2,3}$=±j√3).

Determiniamo la funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema:

$$G_0(s) = \frac{\frac{1}{s(s^2+3)}}{1+\frac{2}{s(s^2+3)}} = \frac{1}{s^3+3s+2}$$

Il polinomio caratteristico è: $\chi(s) = s^3 + 3 \cdot s + 2 = 0$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico *non* sono tutti dello stesso segno (il coefficiente del termine s^2 è nullo, quindi non è positivo come gli altri). Per il lemma di Routh si conclude che il sistema non è asintoticamente stabile (ma potrebbe essere sia semplicemente stabile che instabile).

Il primo passo per la costruzione della tabella di Routh è il seguente:

3	**1**	3
2	**0**	2
1	**…..**	…..
0	**…..**	

Quindi al termine nullo si sostituisce un valore ε che poi sarà fatto tendere a 0^+ e 0^-.

3	**1**	3
2	**ε**	2
1	**(3·ε-2)/ ε**	-
0	**2**	

3	**1**	3
2	**ε**	2
1	**3-2/ ε**	-
0	**2**	

Facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$, il secondo termine tende a 0^+, il terzo termine tende a $-\infty$. Quindi si hanno 2 variazioni di segno, cioè 2 radici con parte reale positiva.

Se invece avessimo fatto tendere $\varepsilon \to 0^-$, il terzo termine tenderebbe a $+\infty$, mentre il secondo termine sarebbe negativo. Quindi si avrebbero anche in questo caso 2 variazioni di segno, cioè 2 radici con parte reale positiva.

4.6.3.2 Riga interamente nulla nella Tabella di Routh

Durante la costruzione della tabella di Routh può accadere che una intera riga risulti nulla. Una situazione di questo tipo può accadere solamente in una riga dispari, per esempio la riga (2m − 1):

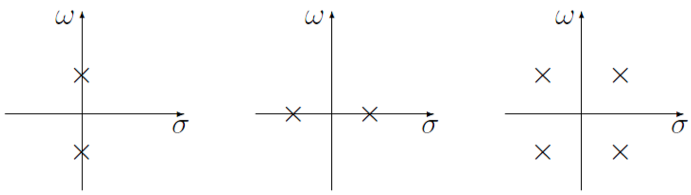
$$\begin{array}{r|ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2m & b_{2m} & b_{2m-2} & \dots & b_0 \\ 2m-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

Le variazioni e le permanenze della tabella fino alla riga 2m determinano univocamente la posizione delle prime (n−2m) radici dell'equazione data. Le altre 2m radici dell'equazione si determinano come soluzioni della seguente equazione ausiliaria:

$$b_{2m} \cdot s^{2m} + b_{2m-2} \cdot s^{2m-2} + \cdots b_2 \cdot s^2 + b_0 = 0$$

Quindi polinomio di partenza è scomponibile nel prodotto di due polinomi: $P(s)=P_1(s) \cdot P_2(s)$. La posizione delle (n-2m) radici di $P_1(s)$ è data dalle variazioni delle prime (n-2m+1) righe, mentre a riga 2m fornisce $P_2(s)$ (equazione ausiliaria) che è sempre di grado pari e, risolta, fornisce le ultime radici.

Essendo l'equazione ausiliaria sempre di grado pari, ponendo $z = s^2$ (nel caso di m>2) si ottiene una equazione di grado m. Dopo aver trovato le radici Z_m, Z_{m-1}, …..Z_0, si ottengono le radici $s_i = \pm\sqrt{z_i}$. Le 2m radici dell'equazione ausiliaria sono sempre simmetriche rispetto all'origine del piano complesso:



Quindi ad ogni radice a parte reale positiva corrisponde una radice a parte reale negativa.

Se l'equazione caratteristica è di ordine m > 4, l'equazione ausiliaria non è direttamente risolubile, si può ricorrere ad un metodo alternativo che consiste nel derivare l'equazione ausiliaria. I coefficienti del polinomio ottenuto si sostituiscono alla riga tutta nulla e si procede nella costruzione della tabella di Routh.

Una volta completata la tabella di Routh, l'identificazione del tipo di radici per il polinomio $P_2(s)$, va effettuata in maniera diversa rispetto a quanto fatto per il polinomio $P_1(s)$. Le considerazioni da fare sono le seguenti:

- Rimane valido il concetto che ad ogni variazione corrisponde una radice a parte reale positiva. Si identificano così le N_{R+} radici a parte reale positiva;
- Alle N_{R+} radici a parte reale positiva, per la simmetria descritta, corrisponderà un egual numero di radici a parte reale negativa ($N_{R+} = N_{R-}$).
- Le restanti radici $N_I = 2m\text{-}2 \cdot N_{R+}$ saranno immaginarie (parte reale nulla).

<u>Esempio 1</u>

Si consideri l'equazione caratteristica:

$$\chi(s) = s^6 + s^5 - 2 \cdot s^4 - 3 \cdot s^3 - 7 \cdot s^2 - 4 \cdot s - 4 = 0$$

Preliminarmente si osservi che i coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti dello stesso segno. Per il lemma di Routh quindi il sistema <u>*non è*</u> asintoticamente stabile.

Costruendo la tabella di Routh si ottiene:

s^6	1	p	-2	-7	-4
s^5	1	p	-3	-4	
s^4	1	?	-3	-4	
s^3	0	?	0		
s^2	?	?			
s^1	?	?			
s^0	-4				

La riga relativa al grado 3 si è annullata completamente, mentre la riga di ordine zero è nota, poiché comprende il termine noto del polinomio caratteristico (proprietà della tabella di Routh).

Dall'analisi dei primi tre elementi della prima colonna si osserva che due dei sei poli della F.d.T. in anello chiuso sono a parte reale negativa, essendoci due permanenze.

L'equazione ausiliaria è:

$$s^4 - 3 \cdot s^2 - 4 = 0$$

Ponendo z=s^2 si ha: $z^2 - 3 \cdot z - 4 = 0$ che ha due radici reali per z=4 e Z=-1.

Quindi le 4 radici del polinomio sono:

$$s_{1,2} = \pm 2 \quad s_{3,4} = \pm j$$

Quindi il sistema presenta:

- 3 poli a parte reale negativa (2 permanenze nella parte iniziale della tabella di Routh più la radice dell'equazione ausiliaria;
- 1 polo a parte reale positiva presente nell'equazione ausiliaria;
- 2 poli immaginari presenti nell'equazione ausiliaria.

Il sistema è quindi <u>*instabile.*</u>

<u>Utilizzando il metodo della derivazione dell'equazione ausiliaria</u>, si procede nel modo seguente:

1. Si deriva l'equazione ausiliaria:

$$\frac{d}{ds}(s^4 - 3 \cdot s^2 - 4) = 4 \cdot s^3 - 6 \cdot s$$

2. I coefficienti ottenuti si sostituiscono nella riga nulla della tabella di Routh

3. Si completa la tabella di Routh ottenendo:

s^6	1		-2	-7	-4
s^5	1	p	-3	-4	
s^4	1	p	-3	-4	
s^3	4	p	-6		
s^2	-6	v	-16		
s^1	-100	p			
s^0	-4	p			

Il presente esercizio mostra una proprietà della tabella di Routh (v. riga cerchiata in rosso), per la quale se, durante la costruzione della tabella, i termini di una stessa riga sono moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo, non si modifica il numero delle variazioni di segno nella prima colonna.
Quindi si può evitare che nella tabella compaiano numeri frazionari a partire da un polinomio con coefficienti interi nel calcolo degli elementi di una o più righe, facendo a meno di dividere per il primo elemento della riga superiore, limitandosi a un cambiamento di segno se esso è negativo.

Dall'esame della tabella si identificano (coerentemente con il metodo precedente):

- 2 radici a parte reale negativa per le 2 permanenze nella parte iniziale della tabella di Routh (righe relative al grado 6,5,4);
- 1 radice a parte reale positiva (variazione tra il grado 3 e il grado 2), quindi $N_{R+} = 1$
- 1 radice a parte reale negativa simmetrica (rispetto all'origine) alla radice precedente ($N_{R-} = N_{R+}$)
- Un numero di radici immaginarie pari a $I = 2 \cdot m - 2 \cdot N_{R+} = 4-2 = 2$, simmetriche rispetto all'origine.

In questo caso le radici immaginarie sono semplici perché sono solo 2 e simmetriche. Ma nel caso in cui le radici immaginarie dell'equazione ausiliaria fossero più di 2 si porrebbe il problema di verificare le radici siano semplici, come si vedrà nell'esempio seguente.

<u>Esempio 2</u>

Si consideri l'equazione caratteristica:

$$\chi(\mathrm{s}) = s^4 + 2 \cdot s^2 + 1$$

Si osserva preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti dello stesso segno. Per il lemma di Routh il sistema *<u>non è</u>* asintoticamente stabile. Si procede con la costruzione della tabella di Routh.

s^4	1	?	2	1
s^3	0	?	0	
s^2	?			
s^1	?	?		
s^0	1	?		

La riga corrispondente al grado 3 si annulla completamente.

L'equazione ausiliaria è la stessa equazione caratteristica, mentre la sua derivata vale:

$$4 \cdot s^3 + 4 \cdot s$$

Completando la tabella di Routh si ottiene:

s^4	1	p	2	1
s^3	4	p	4	
s^2	1		1	
s^1	2	p		
s^0	1	p		

Durante la creazione della tabella, nella quarta riga (composta da un solo termine) si annulla tutta la riga. L'equazione ausiliaria vale:

$s^2 + 1$ mentre la derivata prima vale $2s$

Si inserisce quindi il termine 2 nella quarta riga e si completa la tabella di Routh.

Si ottengono 4 permanenze ma, poiché sono ricavata dall'equazioni ausiliaria, non vanno interpretate come radici a parte reale negativa. Come già detto, va invece seguita la seguente procedura:

- numero di variazioni (radici a parte reale positiva) pari a 0. Quindi N_{R+}=0
- di conseguenza N_{R-}=0
- Numero di radici immaginarie pari a I = 2·m- 2·N_{R+} = 4-2·0 =4

Essendo il numero delle radici immaginarie pari a 4, non si può capire direttamente se le radici sono singole (sistema semplicemente stabile) o doppie (sistema instabile). Quindi bisogna analizzare l'equazione ausiliaria.

Ponendo $z=s^2$ si ha: $z^2 + 2 \cdot z + 1 = 0$ che ha una radice doppia in z = -1.

Quindi l'equazione caratteristica ha 2 radici doppie in s^2 = -1, cioè:

$$s_{1,2} = +j \qquad s_{3,4} = -j$$

Il sistema risulta quindi instabile.

4.7 Valutazione della stabilità di un sistema contro-reazionato con analisi della funzione di trasferimento in anello aperto

In *Figura 14* è riportato il generico schema di un sistema contro-reazionato. I criteri di stabilità di tali sistemi che saranno analizzati nel seguito, sono i seguenti:

- Criterio di Nyquist
- Criterio di Bode

I summenzionati criteri si applicano alla funzione di trasferimento di anello *L(s)* (o funzione di trasferimento ad anello aperto).

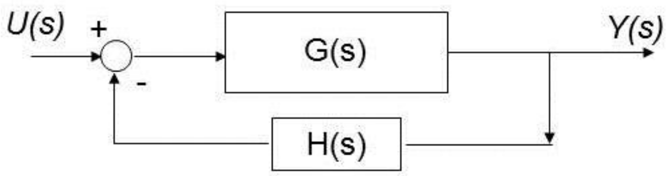


Figura 14 - Schema a blocchi di un sistema a contro-reazione

Sempre con riferimento alla *Figura 14*, per ottenere la funzione di anello *L(s)* bisogna ricondursi ad un sistema con blocco di retroazione unitaria (*H(s)* = 1) in figura.

Con riferimento al cap. X (capitolo Algebra dei blocchi), il sistema di *Figura 15* è equivalente a quello rappresentato in *Figura 14*.

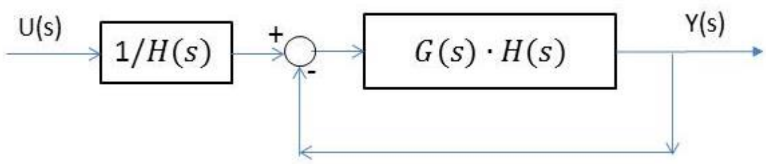


Figura 15 - Schema equivalente con retro-azione unitaria

Poiché la stabilità di un sistema è una proprietà intrinseca del sistema e non dipende dall'ingresso, si analizzerà la funzione rappresentata in *Figura 16*.

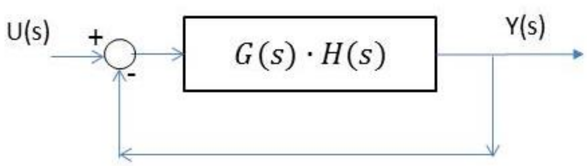


Figura 16 - Schema equivalente con retro-azione unitaria

La funzione di trasferimento di anello $G^*(s)$ è pari a $G^*(s) = G(s) \cdot H(s)$

Da ora in poi si farà riferimento alla *G(s)* come funzione di anello, tenendo presente che in caso di blocco di reazione H(s) non unitario la funzione di anello sarà pari a *G(s)·H(s).* In sostanza i criteri di Bode e Nyquist valutano la stabilità del sistema del sistema contro-reazionato analizzando la funzione di anello G*(s)* (funzione di trasferimento ad anello aperto).

4.7.1 Criterio di stabilità di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un criterio grafico di verifica di stabilità molto generale e di più immediata utilità del criterio del polinomio caratteristico. In questo corso ci si limiterà a dare l'enunciato del criterio, senza entrare in ulteriori approfondimenti.

Il criterio di Nyquist si basa sul tracciamento del diagramma di Nyquist associato alla funzione di trasferimento d'anello *G*(*s*).

Occorre poi introdurre tre seguenti quantità:

- P_d: numero di poli a parte reale strettamente positiva di G(s)
- N: numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist intorno al punto (−1, j0) che giace nel semiasse reale negativo, contati positivamente in senso orario. Se il diagramma passa per il punto (−1, j0), N si dice non definito
- Z : numero di poli instabili (parte reale strettamente positiva di L(s)) nella FdT ad anello chiuso. Tale parametro ci permetterà di giudicare se il nostro sistema contro-reazionato è stabile o meno.

Il criterio di stabilità di Nyquist afferma che: $Z = P_d + N$

Ovviamente la FdT ad anello chiuso è asintoticamente stabile se Z=0

4.7.2 Criterio di stabilità di Nyquist - Esempi

Esempio N. 1

Sia dato un sistema contro-reazionato con FdT di anello pari a:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$$

In *Figura 17* è rappresentato il diagramma di Nyquist di *G(s).*

La parte del diagramma per ω∈(0,∞), giace nel semipiano con parte immaginaria negativa, parte da 10 con fase pari a 0 e termina nell'origine con fase pari a −180°. Il diagramma si completa ribaltandolo intorno all'asse reale.

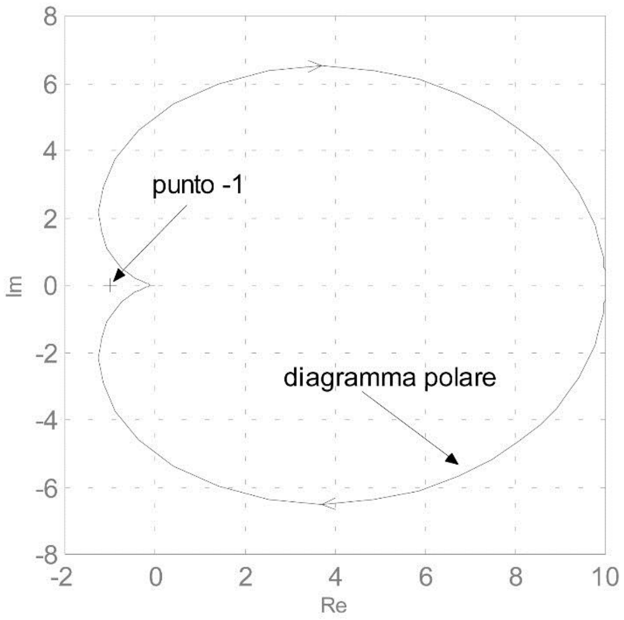


Figura 17 – Diagramma di Nyquist della G(s) – Esempio 1

Si osservi che P_d =0 (non si hanno poli a parte reale positiva), e che il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto (−1, j0), per cui $N = 0$.

Poiché $Z=P_d+N=0$ il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = 10 + (1+s)^2 = s^2 + 2s + 11$$

Il polinomio ha le seguenti radici:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{10}$$

tutte con parte reale negativa, quindi il sistema retro-azionato è stabile.

Esempio N. 2

Il resto del capitolo si trova (momentaneamente) sul file "Lezione_11_bis.ppt"