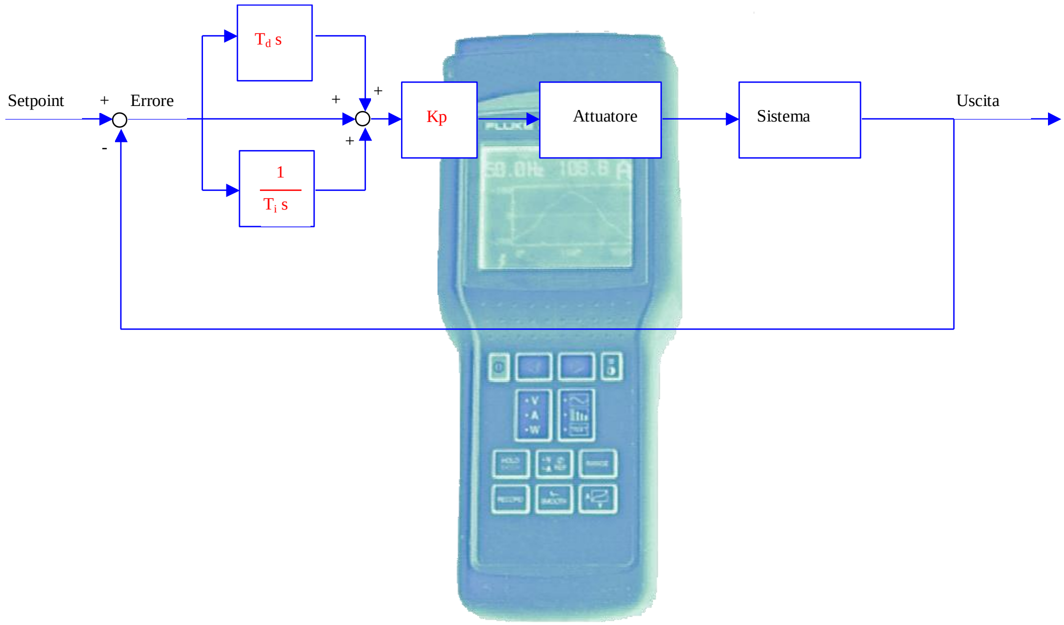
INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Dispense dal Corso di

SISTEMI DI MONITORAGGIO E CONTROLLO DEGLI IMPIANTI ENERGETICI

Prof. Luigi Sorabella
Prof. Luciano Gramiccia



VII - CENNI DI TEORIA DEL CONTROLLO

Con la collaborazione di
Ing. Luisa Ferroni
Ing. Paolo Fargione

Rev. 4 – Marzo 2019

CAPITOLO VII

CENNI DI TEORIA DEL CONTROLLO

A Cura del Prof. L. Sorabella e del Prof. L. Gramiccia

Elenco parti modificate rispetto alla Rev. 2

- Modificato il par. 5.2
- Modificato il par. 6

INDICE

1 INTRODUZIONE

Nel linguaggio corrente, con il termine *controllo* si intende esercitare su qualcosa o su qualcuno sia un'azione di verifica sia un'azione volta ad imporre il comportamento desiderato.

Quando si parla di *controllo di un impianto* ci si riferisce alla seconda accezione, ossia alla necessità di far assumere a determinati parametri caratteristici del sistema (dette *uscite* o *outputs* del sistema) valori ben definiti o di far variare tali parametri secondo una funzione (ad esempio del tempo) predefinita.

Per poter esercitare queste azioni è necessario, ovviamente, agire, in qualche modo, su altri parametri caratteristici del sistema stesso (*ingressi* o *inputs*).

Un sistema di controllo è un ente in grado di interferire con l'impianto esplicando un'azione di controllo, ossia capace di variare le grandezze in ingresso al sistema per ottenere le uscite desiderate.

Il controllo può essere *manuale* quando un operatore esterno decide come variare le grandezze in ingresso, o *automatico* quando il sistema di controllo agisce autonomamente.

Nel seguito ci si riferirà al controllo automatico.

La *teoria del controllo* è l'insieme degli *strumenti matematici* e dei *metodi di analisi* che permettono di studiare e progettare i sistemi di controllo. Essa richiede l'applicazione di strumenti matematici di una certa complessità, pertanto nel seguito ci si limiterà ad introdurne gli aspetti essenziali per la comprensione degli argomenti trattati nel presente corso.

Per analizzare, anche solo qualitativamente, i sistemi di controllo è utile introdurre il concetto di *schema a blocchi*.

L'elemento costitutivo di tali schemi è un rettangolo con una o più frecce entranti o uscenti.

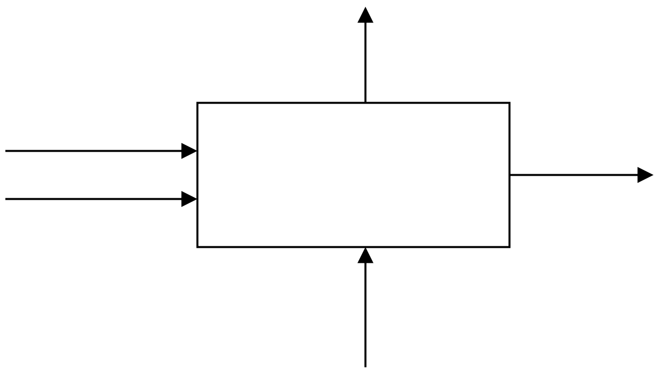


Fig. 1 – Schema a blocchi

Il rettangolo rappresenta un dispositivo, un apparato o un sistema all'interno del quale hanno luogo fenomeni di vario tipo, mentre le frecce rappresentano informazioni o azioni che vengono scambiate con l'esterno.

Utilizzando questa rappresentazione, un sistema di controllo può essere rappresentato da un blocco in cui entra il valore desiderato della grandezza in uscita dall'impianto controllato ed esce un valore della grandezza controllata.

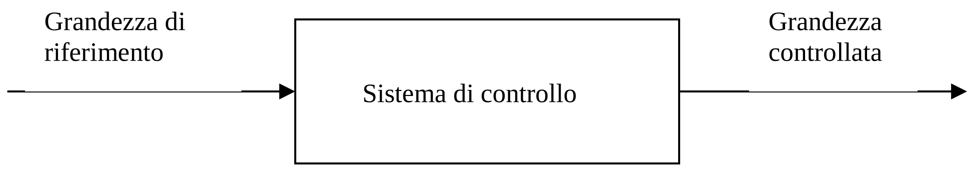


Fig. 2 – Schema a blocchi del sistema di controllo

2 CONTROLLO A CATENA APERTA ED A CATENA CHIUSA

La prima importante distinzione da introdurre è quella tra sistemi di controllo a *catena aperta* ed a *catena chiusa*.

Nei sistemi a catena aperta l'azione di controllo viene intrapresa senza portare in conto il valore della grandezza controllata; nei sistemi a catena chiusa, invece, l'azione di controllo è intrapresa in funzione della differenza tra il valore desiderato ed il valore realmente assunto dalla grandezza controllata.

Fig. 3 – Controllo a catena aperta

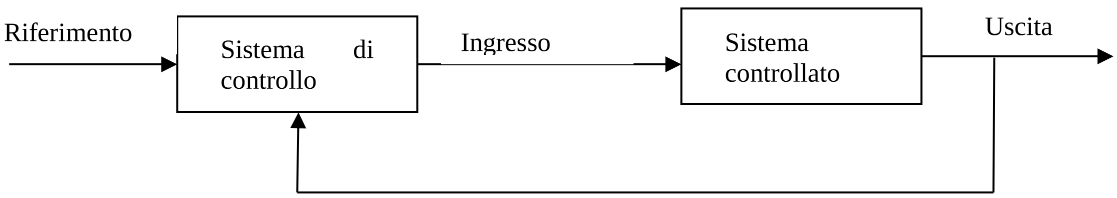


Fig. 4 – Controllo a catena chiusa

I principali aspetti di interesse di un sistema di controllo sono:

- l'effetto delle variazioni del riferimento
- l'effetto degli effetti disturbanti
- l'effetto di variazioni parametriche

Per quanto riguarda il primo aspetto, esso non interessa, ovviamente, quando il riferimento è costante mentre assume rilevanza quando il riferimento è variabile nel tempo perché al variare del riferimento varia, ovviamente, l'azione di controllo necessaria.

Per quanto riguarda il secondo aspetto, bisogna precisare che per effetto disturbante si intendono tutti gli ingressi al sistema controllato che possono variare l'uscita.

Per quanto riguarda il terzo aspetto, per parametro si intendo quei coefficienti o quelle grandezze del sistema controllato che si assumono costanti e da cui dipende la relazione tra ingresso ed uscita.

2.1 Sistema di controllo a catena chiusa

Si immagini, ad esempio, di avere un serbatoio in cui si voglia mantenere il livello l ad un valore costante l_0.

Uno schema elementare di regolazione può essere quello riportato in fig. 5; la misura del livello nel serbatoio è realizzato da un galleggiante che è collegato ad un potenziometro lineare T in grado di fornire una tensione V proporzionale a $\Delta l = l - l_0$ la quale, infine, controlla una pompa in grado di fornire una portata proporzionale alla Δl.

Quindi l'azione di controllo è esplicata in base alla differenza tra l'uscita ed il valore desiderato dell'uscita, dato dal *riferimento*, questa differenza viene detta *errore*.

Il principio di funzionamento del controllo a catena chiusa è quindi quello di reagire alla presenza di un errore e di contrastarne le cause; questo principio è detto di *controreazione*.

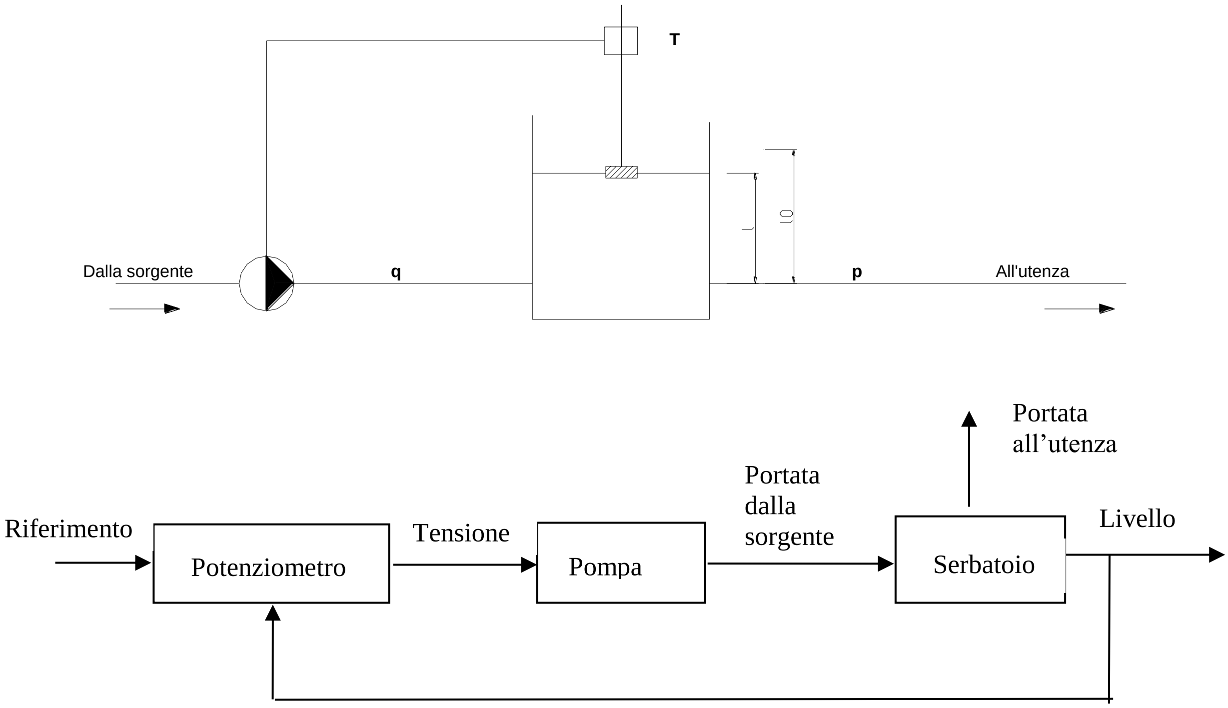


Fig. 5 – Controllo di livello a catena chiusa

Per quanto riguarda l'effetto delle variazioni del riferimento, in un sistema a catena chiusa esso viene automaticamente compensato perché causa una variazione dell'errore e quindi dell'azione di controllo che da esso dipende.

Per quanto riguarda gli effetti disturbanti, nei controlli a catena chiusa essi vengono compensati senza prevederne la misura, in quanto, causando una variazione dell'uscita varia, ancora una volta, l'errore.

Per quanto riguarda l'effetto della variazione dei parametri, in un sistema a catena chiusa, se le variazioni parametriche si manifestano nei componenti attraverso i quali l'errore agisce sull'uscita, si avrà che l'effetto dell'azione di controllo sarà diverso da quello previsto.

Bisogna, infine, aggiungere, che in un sistema a catena chiusa è comunque necessaria la presenza di un errore, altrimenti l'azione di controllo è nulla[1].

2.2 Sistema di controllo a catena aperta

Il principio di controreazione, pur essendo il più intuitivo, non è l'unico applicabile nei sistemi di regolazione.
Un altro principio utilizzabile è quello detto della *compensazione*, che si basa sulla misura delle cause dell'errore.

Nel già citato caso di controllo di livello, l'applicazione del principio di compensazione può realizzarsi misurando la portata prelevata dall'utenza (che causa la variazione di livello) ed immettendo nel serbatoio un'analoga portata.

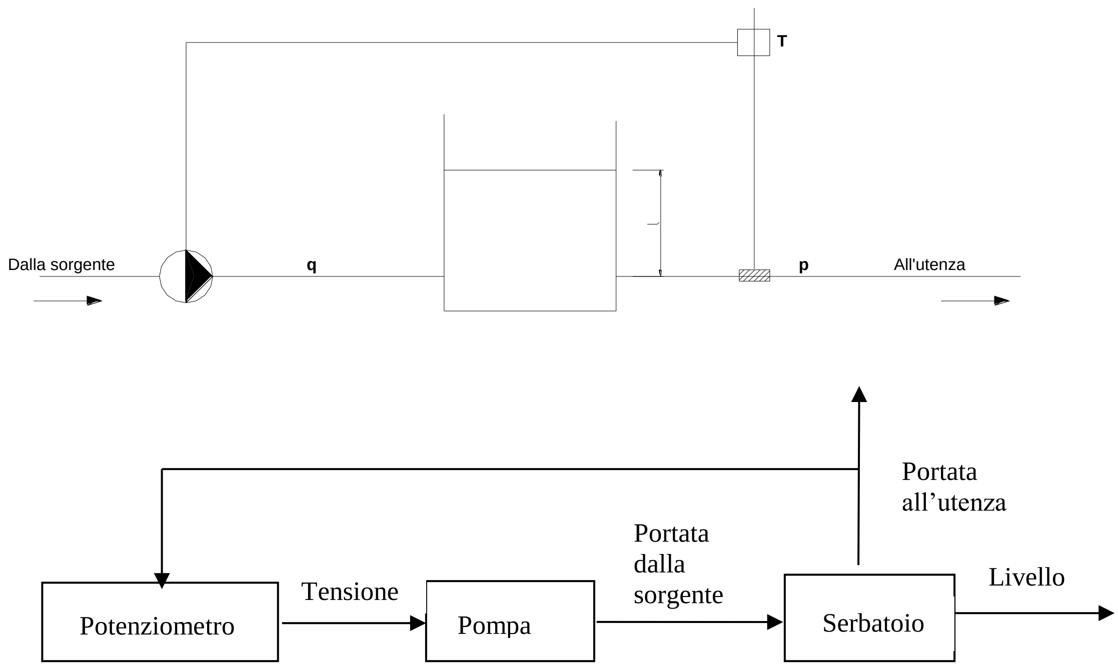


Fig. 6 – Controllo di livello a catena aperta

In un sistema a catena aperta non è necessaria la presenza di un errore perché si sviluppi l'azione di controllo.

Questo potrebbe apparire un vantaggio, ma tale vantaggio è, di solito illusorio, infatti gli effetti del riferimento, dei disturbi e dei parametri, è compensabile solo quando le cause sono direttamente misurate (purché correttamente previste nel sistema di controllo), mentre non vi è alcuna possibilità di compensarli quando le cause non sono direttamente misurate.

[1] Questo nell'ipotesi che l'azione di controllo sia proporzionale all'errore. Si vedrà nel capitolo seguente che l'azione di controllo può dipendere dall'errore in modo più complesso della semplice proporzionalità e può, quindi, esistere un'azione di controllo anche con errore nullo.

È abbastanza intuitiva l'impossibilità di misurare, in un sistema reale, tutti i disturbi e tutti i parametri; quindi i sistemi a catena aperta possono talvolta avere un comportamento insoddisfacente.

3 MODELLO DEL SISTEMA

3.1 Modello astratto del sistema

Da quanto già detto si evince che una delle fasi fondamentali per studiare il comportamento di un sistema e per progettare il suo controllo è quella di stabilire il legame che esiste tra grandezze in ingresso al sistema e grandezze in uscita.

Risulta, quindi, utile associare al sistema reale un *modello astratto*, costituito da variabili e da funzioni matematiche che le correlano.

Questo consente di raggiungere due scopi: primo, una volta realizzato il modello, è possibile stabilire come variare gli ingressi per ottenere le variazioni volute delle uscite, secondo consente di analizzare, con un unico modello più sistemi (purché descritti ovviamente dallo stesso modello).

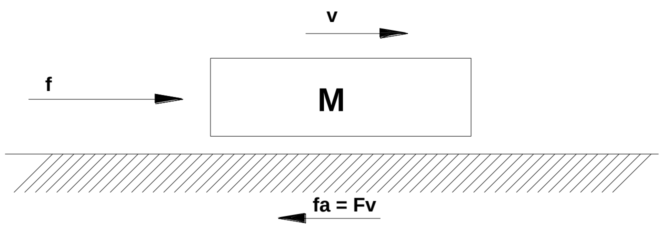
Si consideri, ad esempio, il sistema costituito da un serbatoio con una portata in ingresso q_i ed una in uscita q_u utilizzato al paragrafo precedente; il legame matematico tra livello (l) e portate può essere ricavato dall'equazione di conservazione della massa già trattata al § 3:

$$A\frac{dl(t)}{dt}+q_u(t)=q_i(t)$$

Nel caso la portata in uscita dipenda dal livello nel serbatoio attraverso una costante R (è il caso in cui sulla tubazione di uscita non sia presente una pompa), l'equazione diviene:

$$A\frac{dl(t)}{dt}+R\ l(t)=q_i(t)$$

Si può osservare che questa equazione è assolutamente analoga, ad esempio, a quella del moto di una massa M sottoposta ad una forza esterna f ed all'attrito dovuto allo scorrimento su un piano (quest'ultimo proporzionale alla velocità attraverso un coefficiente di attrito F):



$$M\frac{dv(t)}{dt}+F\ v(t)=f(t)$$

Fig. 7 – Sistema massa-attrito

È quindi chiaro che il legame tra livello e portata in ingresso al serbatoio è uguale a quello tra velocità e forza agente sulla massa ed è del tipo:

$$a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0u(t)$$

essendo *y(t)* l'uscita del sistema (velocità o livello) ed *u(t)* l'ingresso (portata o forza).

Solo a titolo di esempio, proviamo a studiare il comportamento di un tale sistema quando l'ingresso subisce una variazione a gradino, passando dal valore *0* al valore *U* all'istante *t=0*; per risolvere l'equazione differenziale è, inoltre, necessario imporre una condizione al contorno (l'equazione differenziale è del primo ordine) ossia fissare il valore dell'uscita ad un certo istante, poniamo quindi *y(0)=0*.

Ricordiamo che per risolvere l'equazione differenziale è necessario risolvere prima l'omogenea associata:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

ponendo $y(t) = e^{\alpha t}$ e determinando α:

$$a_1 \alpha e^{\alpha t} + a_0 e^{\alpha t} = 0 \qquad a_1 \alpha + a_0 = 0 \qquad \alpha = -\frac{a_0}{a_1}$$

quindi la soluzione dell'omogenea associata è:

$$y = c_1 e^{-\frac{a_0}{a_1} t}$$

mentre la soluzione particolare dell'equazione si ottiene imponendo che y(t) sia costante e quindi la sua derivata sia nulla:

$$a_0 y(t) = 0 \qquad y = 0 \qquad \text{per } t \le 0$$

$$a_0 y(t) = b_0 U \qquad y = \frac{b_0}{a_0} U \qquad \text{per } t \ge 0$$

e quindi la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y = c_1 e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \qquad \text{per } t \le 0$$

$$y = \frac{b_0}{a_0} U + c_1 e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \qquad \text{per } t \ge 0$$

Imponendo la condizione al contorno *y=0* per *t=0* si ottiene

$$c_1 = 0 \cdot e^{\frac{a_0}{a_1} 0} = 0 \qquad \text{per } t \le 0$$

$$c_1 = -\frac{b_0}{a_0} U e^{\frac{a_0}{a_1}0} = -\frac{b_0}{a_0} U \qquad \text{per } t \geq 0$$

quindi:

$$y = 0 \qquad \text{per } t \leq 0$$

$$y = \frac{b_0}{a_0} U \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \right) \qquad \text{per } t \geq 0$$

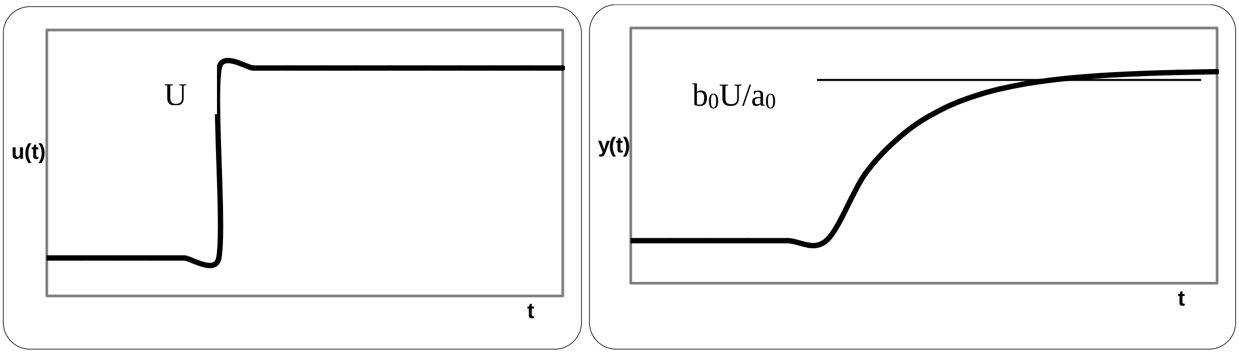


Fig. 8 – Risposta al gradino per $a_0/a_1>0$

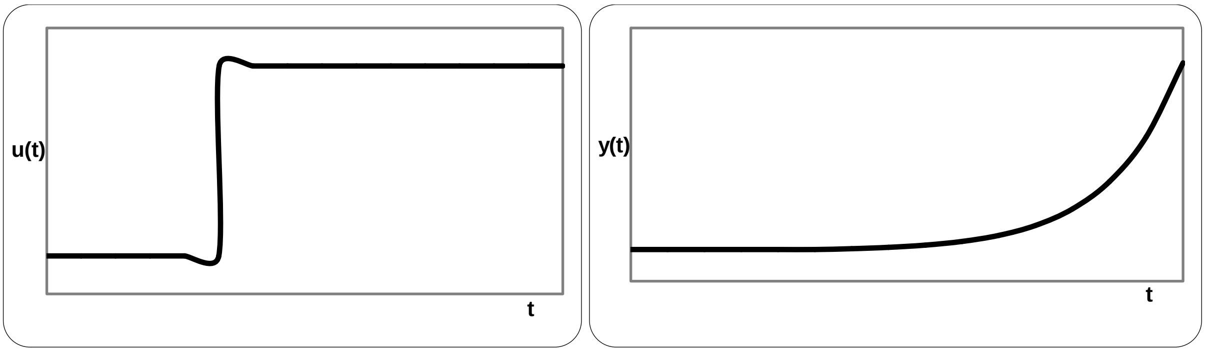


Fig. 9 – Risposta al gradino per $a_0/a_1<0$

3.2 Proprietà di classificazione dei sistemi

Senza addentrarci in ulteriori approfondimenti teorici, diamo qui alcune definizioni riguardanti la classificazione dei sistemi che saranno utili nelle trattazioni successive.

3.2.1 Sistemi continui

Si dice *continuo* un sistema in cui le grandezze di ingresso e di uscita, e quindi le variabili del modello astratto, possono assumere qualsiasi valore nell'insieme dei numeri reali; è questo il caso di gran parte dei sistemi fisici, anche se esistono sistemi in cui le grandezze possono assumere solo determinati valori.

Questi ultimi sistemi si dicono discreti.

Un caso particolare dei sistemi discreti è quello in cui, pur variando le grandezze con continuità, esse possono essere misurate solo in certi istanti; è questo il caso tipico dei calcolatori elettronici in cui la variabile "tempo" è di tipo discreto.

3.2.2 Sistemi lineari

Un sistema si dice *lineare* se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti; in altri termini, dato un sistema con un ingresso $u(t)$ ed un'uscita $y(t)$, detta $y_1(t)$ la risposta ad un ingresso $u_1(t)$ ed $y_2(t)$ la risposta ad un ingresso $u_2(t)$, la risposta ad un ingresso pari ad ($k_1 \bullet u_1(t) + k_2 \bullet u_2(t)$) è data da ($k_1 \bullet y_1(t) + k_2 \bullet y_2(t)$).

La definizione di linearità può essere, con facilità estesa al caso di un sistema con più ingressi $u_a(t)$, $u_b(t)$, …. $u_x(t)$, e più uscite $y_a(t)$, $y_b(t)$, …… $y_x(t)$; sia

$y_{1a}(t)$ l'uscita $y_a(t)$ quando $u_a(t) = u_{1a}(t),\ u_b(t)=0,\ \ldots\ldots\ u_x(t)=0$
$y_{2a}(t)$ l'uscita $y_a(t)$ quando $u_a(t) = 0,\ u_b(t) = u_{1b}(t),\ \ldots\ldots\ u_x(t)=0$
$y_{na}(t)$ l'uscita $y_a(t)$ quando $u_a(t) = 0,\ u_b(t)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ u_x(t) = u_{1x}(t)$

l'uscita $y_a(t)$ quando gli ingressi valgono: $u_a(t) = k_1 \bullet u_{1a}(t),\ k_2 \bullet u_{1b}(t),\ \ldots\ldots\ k_n \bullet u_{1x}(t)$ è data da

$$y_a(t) = k_1 \bullet y_{1a}(t) + k_2 \bullet y_{2a}(t) + \ldots\ k_n \bullet y_{1x}(t)$$

essendo tale proprietà, ovviamente, estesa a tutte le uscite.

È chiaro che perché un sistema sia lineare, deve godere della proprietà di linearità il modello astratto del sistema.

Si ricorda che, perché il modello astratto sia lineare, esso deve contenere solo operatori lineari come quelli di derivazione, integrazione, addizione e moltiplicazione, mentre non debbono essere presenti funzioni trigonometriche o funzioni trascendenti (come esponenziali, logaritmi) che non godono della proprietà di linearità.

3.2.3 Sistemi stazionari

La *stazionarietà* è la proprietà che esprime la costanza del comportamento di un sistema rispetto al tempo, ossia il fatto che la risposta del sistema ad un determinato ingresso è indipendente dall'istante in cui si genera l'ingresso.

In termini analitici, se $y_1(t)$ la risposta ad un ingresso $u_1(t)$, la risposta ad un ingresso $u_1(t-T)$ è data da $y_1(t-T)$; ossia se l'ingresso si sposta solo nel tempo, l'uscita subisce lo stesso spostamento nel tempo senza altre alterazioni.

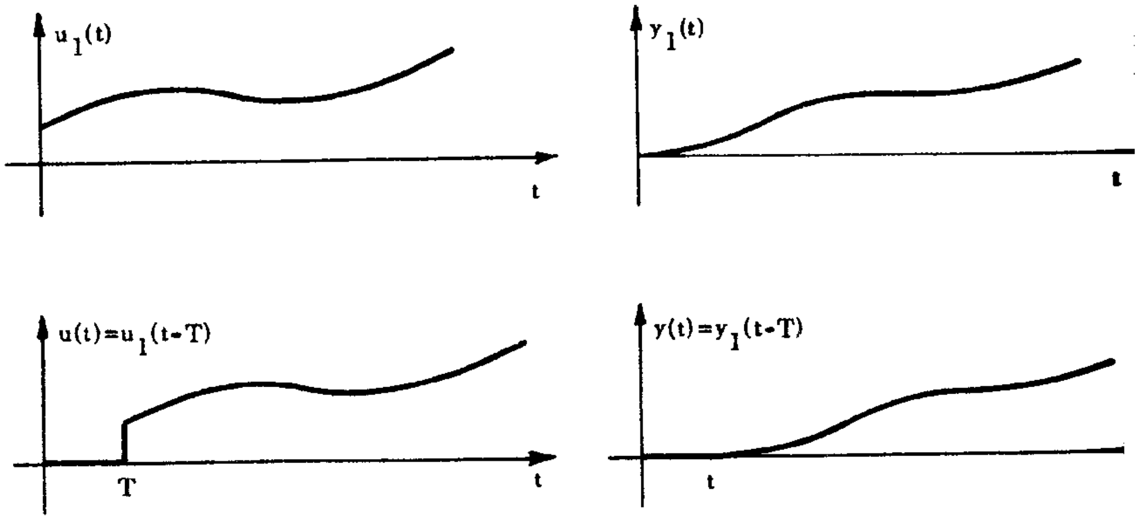


Fig. 10 - Proprietà di stazionarietà dei sistemi

3.3 Analisi dei sistemi mediante la risposta impulsiva

Da quanto detto al paragrafo precedente si intuisce che è possibile studiare il comportamento di un sistema ad un ingresso di tipo qualunque, analizzando la risposta ad uno o più ingressi di tipo prefissato (*risposte canoniche*) ed applicando poi il principio di sovrapposizione degli effetti.

Un ingresso di tipo prefissato molto utile è quello impulsivo, ossia con il valore dell'ingresso che parte da zero, raggiunge un valore prefissato in tempo rapidissimo (tendente a zero) e ritorna poi a zero altrettanto rapidamente (una funzione di questo tipo è detta "funzione δ di Dirac").

Per introdurre questo concetto si immagini un ingresso che assuma un valore $1/\varepsilon$ nell'intervallo di tempo tra 0 ed ε e valori nulli all'esterno di questo intervallo; questa funzione è detta *funzione rettangolare unitaria* (la sua area vale 1) ed indicata con il simbolo $\delta_\varepsilon(t)$ e si indichi con $w_\varepsilon(t)$ la risposta del sistema in analisi all'ingresso $\delta_\varepsilon(t)$.

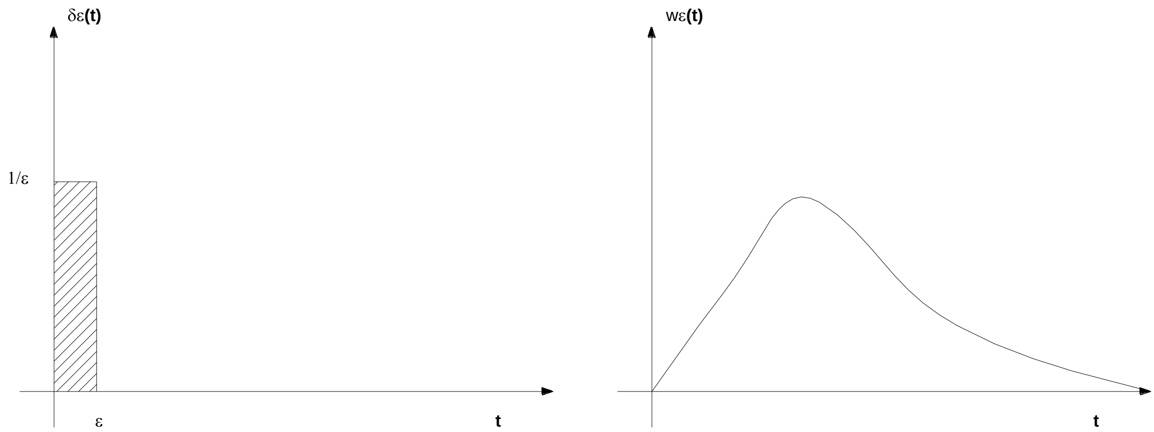


Fig. 11 - Risposta alla funzione rettangolare unitaria

Per la proprietà di stazionarietà, se la funzione rettangolare unitaria si sposta a partire dal tempo T uguale ad un multiplo intero di ε (T=iε), anche la risposta si sposterà della stessa quantità

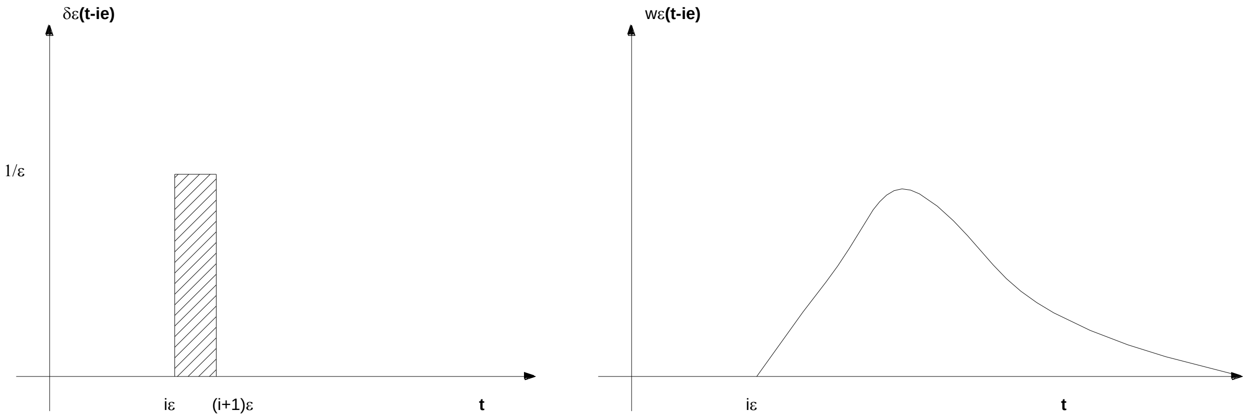


Fig. 12 - Risposta alla funzione rettangolare unitaria traslata di iε

È chiaro che un ingresso u(t) di forma qualunque può essere approssimato come una successione di funzioni rettangolari di ampiezza u(iε) dove i è la numerazione progressiva della funzione rettangolare ed ε è la sua durata.

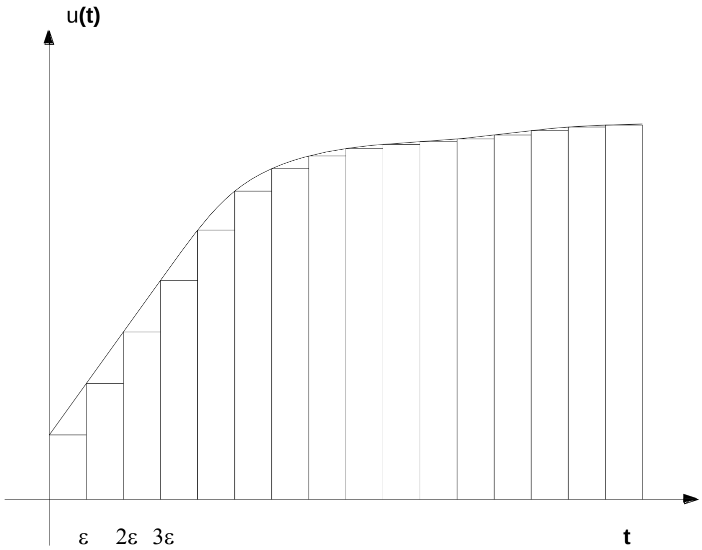


Fig. 13 - Decomposizione di una funzione u(t) in funzioni rettangolari

Per la proprietà di linearità e di stazionarietà la risposta alla generica funzione rettangolare i varrà:

$y_i(t) = u(i\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot w_\varepsilon(t - i\varepsilon)$ (si ricordi che $w_\varepsilon(t\text{-}i\varepsilon)$ è la risposta alla funzione di ampiezza 1/ε mentre l'ingresso ha ampiezza u(iε) e quindi è u(iε)•ε volte l'ingresso di riferimento)

e quindi la risposta *y(t)* all'ingresso *u(t)*, per la proprietà di linearità, vale:

$$y(t) \cong \sum_{i=0}^{\infty} u(i\varepsilon) \cdot w_{\varepsilon}(t - i\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

Si è usato il simbolo $\cong$ invece di = perché l'ingresso è solo approssimato dalla somma delle funzioni rettangolari.

Poiché $w_\varepsilon(t)=0$ per $t<0$ è anche $w_\varepsilon(t-i\varepsilon)=0$ per $t<i\varepsilon$, possiamo quindi limitare la sommatoria precedente tra 0 e t/ε perché tutte le risposte con $i>t/\varepsilon$ saranno nulle.

$$y(t) \cong \sum_{i=0}^{t/\varepsilon} u(i\varepsilon) \cdot w_{\varepsilon}(t - i\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

Se si rende ε sempre più piccolo e lo si fa tendere a zero (la funzione rettangolare tende alla funzione di Dirac) e si pone:

$$w(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} w_{\varepsilon}(t) \qquad i \cdot \varepsilon = \tau \qquad \varepsilon = d\tau \text{ (variazione infinitesimale del tempo)}$$

la sommatoria diventa un integrale con il limite superiore espresso in termini di tempo pari t/ε volte l'intervallo ε, e quindi $t/\varepsilon \cdot \varepsilon = t$:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot w(t - \tau) \cdot d\tau \quad \textit{(integrale di convoluzione)}$$

(questa volta si è utilizzato il simbolo = perché se ε tende a 0 la funzione di ingresso è rappresentata in modo preciso).

Il fatto che l'estremo superiore di integrazione sia uguale all'istante di tempo a cui si vuole la risposta introduce un'altro principio dei sistemi, detto *principio di causalità* che afferma che l'uscita di un sistema all'istante t dipende solo dai valori assunti dall'ingresso per tempi inferiori a t.

4 LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Si è visto al capitolo precedente che l'analisi dei sistemi prevede operazioni matematiche (risoluzione di equazioni differenziali e di integrali di convoluzione) per le quali non sempre è possibile identificare una soluzione analitica.

Per tale motivo sono stati introdotti, già dalla metà del 1700, strumenti matematici che, a fronte di un'apparente complicazione, consentono, come vedremo, una sostanziale semplificazione delle equazioni e delle loro soluzioni.

Per fare questo dobbiamo però introdurre alcuni concetti preliminari.

4.1 Richiami sui numeri complessi

I numeri complessi sono un'entità matematica costituita da una coppia di numeri reali:

$c = (a,b)$

il primo tra i due numeri (a) è detto *parte reale*, mentre il secondo (b) è detto *parte immaginaria*, da questo discende un'altra usuale rappresentazione dei numeri reali:

$c = a + ib$

dove i è detta *unità immaginaria* (talvolta indicata anche con la lettera j).

Mentre i numeri reali possono essere rappresentati su una retta (i valori dei numeri reali sono proporzionali alla distanza da un punto detto origine cui si associa il valore 0), la rappresentazione dei numeri complessi richiede un piano e due assi cartesiani, sul primo dei quali rappresentare la parte reale (detto perciò *asse reale*) e sul secondo la parte immaginaria (detto perciò *asse immaginario*).

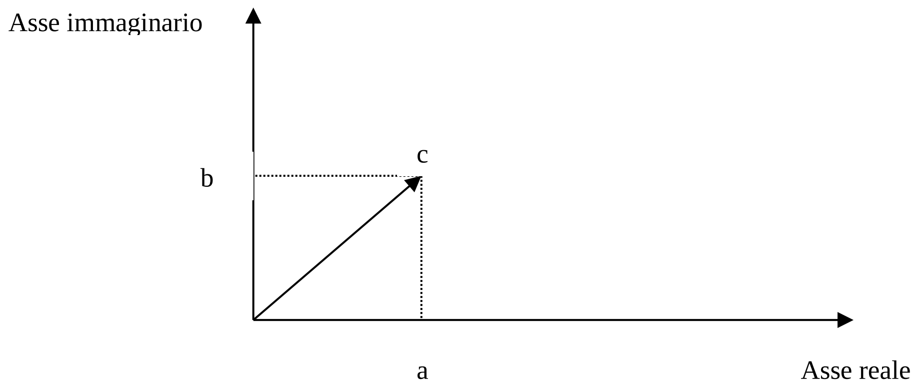


Fig. 14 – Rappresentazione del numero complesso c=(a,b)

É chiaro che l'insieme dei numeri complessi comprende, come sottoinsieme, i numeri reali rappresentati sull'asse reale mentre l'asse immaginario rappresenta il luogo dei numeri che hanno solo parte immaginaria (*numeri immaginari*); è inutile sottolineare che questa terminologia è solo simbolica e non ha nessuna relazione con la reale esistenza dei numeri reali rispetto agli immaginari, entrambi "esistono davvero" e sono pienamente utilizzati, con pari dignità, nelle formulazioni matematiche.

Tra i numeri complessi possono eseguirsi tutte le operazioni valide per i numeri reali, in particolare:

$(a_1,b_1)\pm(a_2,b_2)=(a_1+ib_1) \pm (a_2+ib_2)= (a_1\pm a_2, b_1\pm b_2) = (a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$

$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1+ib_1) \cdot (a_2+ib_2)= (a_1\cdot a_2- b_1\cdot b_2,a_1b_2+ a_2b_1) = (a_1\cdot a_2- b_1\cdot b_2)+i(a_1\cdot b_2+ a_2\cdot b_1)$

$(a_1,b_1)/(a_2,b_2)=(a_1+ib_1) / (a_2+ib_2)= (a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2) / (a_2+ib_2) \cdot (a_2-ib_2)= (a_1\cdot a_2+ b_1\cdot b_2) /(a_2^2+ b_2^2)+$

$+i(a_2\cdot b_1-a_1\cdot b_2)]/(a_2^2+ b_2^2)$

Ricordando che:

$$i^2=i\cdot i=-1$$

superando così la limitazione dei numeri reali secondo cui il quadrato di qualunque numero è sempre positivo; da questo fatto discende la definizione di numeri *immaginari* che rappresentano la radice quadrata di numeri negativi.

Osservando la rappresentazione grafica dei numeri complessi, si nota che questi sono rappresentati da vettori di cui le parti reale ed immaginaria costituiscono le componenti rispetto ai due assi; un vettore può essere rappresentato però anche con il suo *modulo* (lunghezza del vettore che collega l'origine degli assi con il punto rappresentante il numero complesso) e con il suo *angolo di fase* (angolo formato dal vettore con l'asse reale).

Modulo ($|c|$) e fase (φ) del numero complesso sono in relazione con le parti reale ed immaginaria attraverso le seguenti relazioni:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

La fase ϕ del numero complesso *c* viene talvolta indicata anche come *arg(c).*

Utilizzando il modulo e la fase il numero complesso può essere rappresentato anche dalla espressione:

$$c = |c|e^{i\varphi} \qquad \textit{(Formula di Eulero)}$$

Due numeri complessi si dicono *coniugati* quando hanno uguale parte reale e parte immaginaria opposta (vettori simmetrici rispetto all'asse reale), il che si traduce nell'avere lo stesso modulo e fase opposta.

$c=(a,b)$ $\qquad c^*= (a,-b)$
$c=a+ib$ $\qquad c^*=a-ib$
$c = |c|e^{i\varphi}$ $\qquad c^*= c = |c|e^{-i\varphi}$

Dalle definizioni di cui sopra discende che:

$$sen\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

4.2 La trasformata di Laplace

Data una qualunque funzione *f(t)* che rispetti alcune condizioni abbastanza generali (presenti un numero finito di discontinuità, oscilli tra un valore massimo e minimo un numero finito di volte, assuma solamente valori finiti) generalmente soddisfatte nei sistemi reali, e che assuma valori nulli per t<0, si definisce *Trasformata di Laplace F(s)* (indicata anche con *L[f(t)]*), una funzione della variabile complessa *s* ($s=\sigma+i\omega$ è detta anche *frequenza complessa*) ottenuta applicando il seguente operatore:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt$$

Occorre innanzitutto precisare che il legame tra *f(t)* e *F(s)* è *biunivoco*, ossia data una *f(t)* la sua trasformata di Laplace è unica e data una *F(s)* esiste un'unica funzione *f(t)* che ha la *F(s)* come trasformata.
È quindi possibile antitrasformare (si indica con L^{-1}) una qualsiasi funzione di variabile complessa, ottenendo una funzione della variabile tempo:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Si riportano, nel seguito, le trasformate di alcune funzioni tipiche.

f(t)	**F(s)**
δ(t) (funzione di Dirac)	1
η(t) (funzione a gradino nell'origine di ampiezza pari ad 1)	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$

La trasformata di Laplace gode di alcune proprietà che consentono, da una parte, di calcolare la trasformata di funzioni complesse conoscendo (o calcolando) le trasformate di poche funzioni "elementari", dall'altra di semplificare sostanzialmente le equazioni.

In particolare, detta *F(s)* la trasformata della funzione *f(t)* (*F(s)=L[f(t)]*), ricordiamo le seguenti proprietà, tralasciando le dimostrazioni.

1) *Proprietà di sovrapposizione (o di linearità)*
   La trasformata di Laplace di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare delle trasformate delle singole funzioni:

$$L\left[k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t) + ... + k_n \cdot f_n(t)\right] = k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s) + ... + k_n \cdot F_n(s)$$

2) *Proprietà della sostituzione di variabile*
   La trasformata di Laplace di una funzione ottenuta da un'altra dividendo la variabile tempo per una costante si ottiene moltiplicando per la stessa costante sia la trasformata di Laplace della funzione che la variabile complessa:

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = a \cdot F(a \cdot s)$$

3) *Proprietà della traslazione complessa*
   La trasformata di Laplace di una funzione moltiplicata per l'esponenziale e^{at} è pari alla trasformata della funzione traslata di a:

$$L\left[e^{at} \cdot f(t)\right] = F(s-a)$$

4) *Proprietà della traslazione reale*
   La trasformata di Laplace di una funzione traslata di *a* è pari alla trasformata della funzione moltiplicata per e^{-as} è alla trasformata della funzione traslata di a:

$$L\left[f(t-a)\right] = e^{-as} F(s)$$

5) *Proprietà della moltiplicazione*
   La trasformata di Laplace di una funzione moltiplicata per la variabile reale *t* è pari all'opposto della derivata rispetto alla variabile complessa della trasformata della funzione:

$$L\left[t \cdot f(t)\right] = -\frac{d\,F(s)}{ds}$$

6) *Proprietà del valore iniziale*
Il valore assunto da una funzione all'istante *t=0* è pari al valore a cui tende il prodotto tra variabile complessa e la trasformata della funzione al tendere della variabile complessa all'infinito:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

7) *Proprietà del valore finale*
Il valore assunto da una funzione al tendere di *t* all'infinito è pari al valore a cui tende il prodotto tra variabile complessa e la trasformata della funzione al tendere della variabile complessa a zero:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

queste ultime due proprietà permettono di studiare l'andamento della *f(t)* studiando l'andamento della *F(s)*.

8) *Teorema della derivata*
La trasformata di Laplace della derivata di una funzione è data dalla trasformata della funzione moltiplicata per la variabile complessa diminuita del valore che la funzione assume all'istante t=0:

$$L\left[\frac{d\ f(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(t)\big|_{t=0}$$

Detto enunciato esteso alle derivate di ordine superiore (basta applicare più volta la regola) diviene:

$$L\left[\frac{d^n\ f(t)}{dt}\right] = s^n \cdot \left[F(s) - \frac{f(0)}{s} - \frac{1}{s^2}\frac{d\ f(0)}{dt} - \ldots\ldots - \frac{1}{s^n}\frac{d^{n-1}\ f(0)}{dt^{n-1}}\right]$$

9) *Teorema dell'integrale*
La trasformata di Laplace dell'integrale di una funzione è data dalla trasformata della funzione divisa per la variabile complessa:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

da cui si ricava anche:

$$L\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^a f(t)dt$$

Il grande vantaggio di condurre l'analisi nel dominio della frequenza complessa consiste nel fatto che la trasformazione di Laplace consente di ricondurre operazioni con derivate ed integrali ad operazioni algebriche ovvero di ricondurre equazioni differenziali ad equazioni algebriche.

Quindi, in linea del tutto generale, possiamo concludere che assegnata una qualsiasi equazione differenziale, purché siano rispettate le condizioni sopra richiamate, è possibile mediante la trasformata di Laplace passare dal dominio del tempo al dominio della frequenza complessa, risolvere algebricamente l'equazione in *s* così ottenuta, ed infine antitrasformare per avere la soluzione nel dominio del tempo.

4.3 La funzione di trasferimento

Consideriamo un sistema con un ingresso *u(t)*, una risposta impulsiva *w(t)* ed un'uscita *y(t)*.

$$y(t) = \int_0^\infty u(\tau)\cdot w(t-\tau)\cdot d\tau \quad \text{(all'estremo t è stato sostituito } \infty \text{ perché il risultato è lo stesso)}$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento dell'uscita *Y(s)*:

$$Y(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty u(\tau)\cdot w(t-\tau)\cdot d\tau \right]\cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty u(\tau) \left[\int_0^\infty w(t-\tau)\cdot e^{-st} dt \right]\cdot d\tau$$

si può quindi risolvere dapprima l'integrale interno (considerando τ costante) e poi risolvere l'integrale esterno in dτ.

Per effettuare la prima operazione conviene effettuare una sostituzione ponendo $\theta = t - \tau$ col che si ha anche $dt = d\theta$ ed $t = \theta + \tau$

$$Y(s) = \int_0^\infty u(\tau) \left[\int_0^\infty w(\theta)\cdot e^{-s(\tau+\theta)} d\theta \right]\cdot d\tau = \int_0^\infty u(\tau)\cdot e^{-s\tau} \left[\int_0^\infty w(\theta)\cdot e^{-s\theta} d\theta \right]\cdot d\tau$$

L'integrale interno non è ora più funzione di τ e può, quindi, portato fuori dall'integrale in dτ (è una costante rispetto a τ).

$$Y(s) = \int_0^\infty u(\tau)\cdot e^{-s\tau}\cdot d\tau \cdot \int_0^\infty w(\theta)\cdot e^{-s\theta} d\theta$$

Si può ora notare che, a parte il diverso nome dato alle variabili temporali, il primo integrale è la trasformata di Laplace *U(s)* dell'ingresso *u(t)*, mentre il secondo è la trasformata *W(s)* della risposta impulsiva *w(t)*; quindi:

$$Y(s) = U(s)\cdot W(s)$$

Quindi la trasformata dell'integrale di convoluzione è uguale al prodotto delle trasformate delle due funzioni (*teorema di Borel o della convoluzione*)

Il rapporto tra trasformata di Laplace dell'uscita di un sistema e trasformata dell'ingresso è detta *funzione di trasferimento* ed è una caratteristica tipica del sistema.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Per quanto detto in precedenza si ricava che la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta ad un impulso unitario (funzione di Dirac) la quale ha trasformata unitaria.

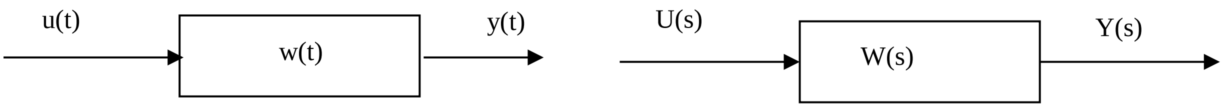


Fig. 15 – Descrizione di un blocco funzionale a mezzo della funzione di trasferimento

L'uscita corrispondente a qualunque ingresso si ottiene moltiplicando la funzione di trasferimento per la trasformata dell'ingresso; si ottiene così la trasformata dell'uscita che può quindi essere antitrasformata per ottenere l'andamento temporale.

Sempre applicando le proprietà della trasformata di Laplace si ottiene che la funzione di trasferimento di più sistemi in serie è pari al prodotto delle funzioni di trasferimento.

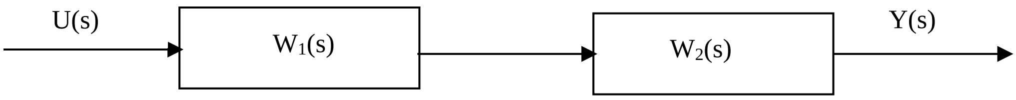


Fig. 16 – Funzione di trasferimento di sistemi in serie

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = W_1(s) \cdot W_2(s)$$

Si lascia al lettore la semplice dimostrazione di questo teorema.

4.4 Proprietà della funzione di trasferimento

Si è visto precedentemente che gran parte delle trasformate di Laplace (e quindi delle funzioni di trasferimento) sono funzioni razionali della variabile complessa, ossia sono date dal rapporto di due polinomi e, potendo scrivere, ogni polinomio di grado *n* nella forma:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_n s^n = k \cdot \prod_{i=1}^{n} (s - x_i)$$

essendo x_i le radici del polinomio; quindi qualunque funzione razionale in s può essere scritta nella forma:

$$W(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = k \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

I valori z_i sono detti zeri della funzione di trasferimento (per $s = z_i$ l'uscita vale 0) mentre i valori p_i sono detti poli della funzione di trasferimento (per $s = p_i$ l'uscita va ad infinito).

Si può dimostrare (e comunque si capirà meglio nel seguito) che, nei sistemi reali il numero di poli deve essere maggiore o uguale del numero di zeri e quindi il denominatore della funzione di trasferimento deve essere di grado superiore o uguale al numeratore.

Se $n>m$ La funzione di trasferimento può essere scritta anche nella forma[2]:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(s - p_i)}$$

Se invece è $n=m$ l'ultima espressione non può essere utilizzata perché al numeratore si avrebbe, al massimo, un polinomio di grado $n-1$, e quindi si adotta uno sviluppo di tipo diverso scrivendo:

$$W(s) = \frac{b_n}{a_n} + \frac{P(s)}{D(s)}$$

Dove a_n è il coefficiente del termine s^n al denominatore, b_n è il coefficiente del termine s^n al numeratore, $D(s)$ è il denominatore della funzione di trasferimento e $P(s)$ un polinomio di grado $n-1$, che, detto $N(s)$ il numeratore della funzione di trasferimento si ottiene tenendo presente che:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{P(s)}{D(s)} \qquad \Rightarrow \qquad P(s) = N(s) - \frac{b_n}{a_n} D(s)$$

Per cui, anche in questo secondo caso si può scrivere (essendo $P(s)$ di ordine inferiore a $D(s)$):

$$W(s) = \frac{b_n}{a_n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(s - p_i)}$$

I valori R_i sono detti *residui della funzione di trasferimento*; per calcolarli isoliamo il termine *k-esimo*:

[2] Sviluppando, a denominatore si ottiene proprio $\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$ mentre il numeratore è un polinomio di grado n-1 che con un'opportuna scelta degli R_i può essere ricondotto a $k\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)$

$$W(s) = \frac{b_n}{a_n} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{R_i}{(s-p_i)} + \frac{R_k}{(s-p_k)} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{R_i}{(s-p_i)}$$

moltiplicando il primo ed il secondo membro per *(s-p_k)* e facendo il limite per *s* che tende a p_k si ottiene:

$$\lim_{s \to p_k} W(s)(s-p_k) = \frac{b_n}{a_n}(s-p_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{R_i(s-p_k)}{(s-p_i)} + R_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{R_i(s-p_k)}{(s-p_i)}$$

dove tutti termini al secondo membro ad eccezione di R_k si annullano perché contengono il termine *(s-p_k)*

$$R_k = \lim_{s \to p_k} W(s)(s-p_k)$$

Ricordando le trasformate principali riportate al § 4.2 si ha che l'antitrasformata della funzione di trasferimento è pari a:

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i e^{p_i t} \qquad n > m$$

$$w(t) = \frac{b_n}{a_n}\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} R_i e^{p_i t} \qquad n = m$$

Quindi, a parte l'impulso presente se numeratore e denominatore sono dello stesso grado, *la risposta impulsiva è dato da una somma di esponenziali con coefficienti reali o complessi* (ed in quest'ultimo caso, per i teoremi dell'algebra, debbono esistere coppie di poli complessi coniugati).

Ciascun termine *Re^{pt}* (o ciascuna coppia quando si tratta di poli complessi coniugati) si dice essere un *modo del sistema.*

Un modo con polo reale si dice *aperiodico* (in quanto da luogo ad un'esponenziale) e può essere *convergente* (polo negativo) o *divergente* (polo positivo).

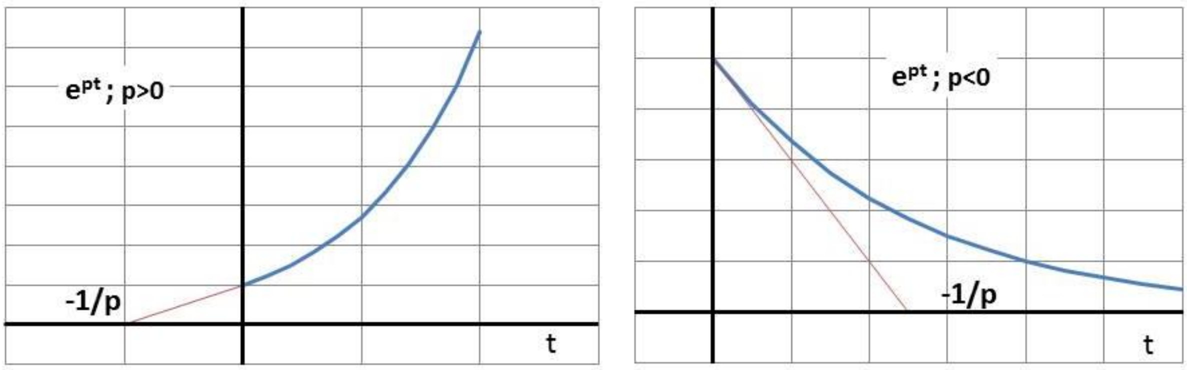


Fig. 17 – Modi aperiodici

Se un polo è immaginario (p=α+iω), deve esistere anche il suo complesso coniugato (p*=α-iω) ed è possibile dimostrare che i residui dei due poli sono complessi coniugati (R ed R*).

L'antitrasformata della somma:

$$\frac{R}{s-p_i}+\frac{R^*}{s-p^*{}_i}$$

È uguale a:

$$L^{-1}\left[\frac{R}{s-p_i}+\frac{R^*}{s-p^*{}_i}\right]=R_i e^{p_i t}+R^*{}_i e^{p^*{}_i t}=|R_i|e^{i\varphi_i}e^{(\alpha_i+i\omega_i)t}+|R_i|e^{-i\varphi_i}e^{(\alpha_i-i\omega_i)t}$$

$$=|R_i|e^{\alpha_i t}\left[e^{i(\omega_i t+\varphi_i)}+e^{-i(\omega_i t+\varphi_i)}\right]=2|R_i|e^{\alpha_i t}sen(\omega_i t+\varphi_i+\frac{\pi}{2})$$

Un tale modo si dice *pseudoperiodico* perché da luogo a oscillazioni con frequenza ω_i.

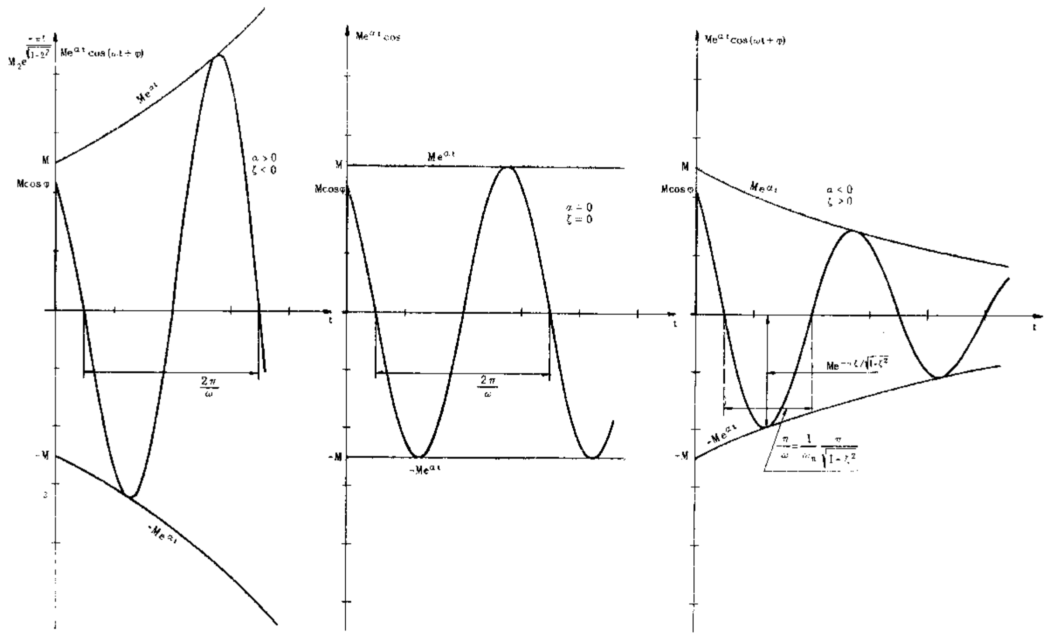


Fig. 18 – Modi pseudoperiodici

La scomposizione in modi è una tecnica generale per studiare qualunque trasformata e non solo la funzione di trasferimento.

Si può dimostrare (ma in questa sede non lo faremo), che dato un qualunque ingresso *u(t)*, l'uscita *y(t)* è composta dai modi dell'ingresso (che può, ovviamente essere analizzato alla stessa maniera della funzione di trasferimento) e dai modi del sistema (e quindi della sua funzione di trasferimento).

Se, come avviene di solito, il sistema ha solo modi convergenti (e se la loro velocità di convergenza è superiore a quella dei modi dell'ingresso) l'uscita può essere scomposta in due parti di cui la prima, detta *risposta transitoria*, dovuta alla combinazione dei modi del sistema e di quelli dell'ingresso si estingue rapidamente mentre la seconda, dovuta solo ai modi dell'ingresso, detta *risposta a regime*, perdura nel tempo:

$$y(t) = y_t(t) + y_r(t) \qquad \underset{al\,crescere\,di\,t}{\Rightarrow} \qquad y(t) = y_r(t)$$

Per la linearità della trasformata, ne consegue che può anche scriversi:

$$Y(s) = Y_t(s) + Y_r(s)$$

5 RISPOSTA ARMONICA

Si consideri un ingresso nullo per tempi negativi e che per tempi positivi assume il valore:

$$u(t) = sen\,\omega t$$

la cui trasformata vale:

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

L'uscita di un sistema con funzione di trasferimento W(s) sottoposta a tale ingresso sarà quindi:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = W(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Per quanto detto precedentemente, l'uscita presenterà i poli del sistema raggruppati nella risposta transitoria, mentre nella risposta a regime presenterà i due poli complessi coniugati dell'ingresso ($\pm i\omega$)

$$Y(s) = Y_t(s) + \frac{R}{s - i\omega} + \frac{R^*}{s + i\omega}$$

Calcoliamo il residuo R:

$$R = \lim_{s \to i\omega}(s - i\omega) \cdot Y(s) = \lim_{s \to i\omega}(s - i\omega) \cdot W(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \lim_{s \to i\omega}(s - i\omega) \cdot W(s) \cdot \frac{\omega}{(s + i\omega)(s - i\omega)}$$

$$= \lim_{s \to i\omega} \cdot W(s) \cdot \frac{\omega}{(s + i\omega)} = \frac{1}{2i} W(i\omega)$$

e quindi R* varrà:

$$R^* = -\frac{1}{2i} W^*(i\omega) \quad con: \quad W^*(i\omega) = |W(i\omega)| \cdot e^{-i \cdot \arg(W(i\omega))} \quad e \quad W(i\omega) = |W(i\omega)| \cdot e^{i \cdot \arg(W(i\omega))}$$

Quindi:

$$Y(s) = Y_t(s) + \frac{1}{2i}\left(\frac{|W(i\omega)| e^{i \cdot \arg(W(i\omega))}}{s - i\omega} - \frac{|W(i\omega)| e^{-i \cdot \arg(W(i\omega))}}{s + i\omega} \right)$$

$$Y(s) = Y_t(s) + \frac{|W(i\omega)|}{2i}\left(\frac{e^{i \cdot \arg(W(i\omega))}}{s - i\omega} - \frac{e^{-i \cdot \arg(W(i\omega))}}{s + i\omega} \right)$$

antitrasformando la Y(s) e ricordando che: $L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{\alpha t}$ si ottiene l'andamento dell'uscita:

$$y(t) = y_t(t) + \frac{|W(i\omega)|}{2i}\left(e^{i \cdot \arg(W(i\omega))} \cdot e^{i\omega t} - e^{-i \cdot \arg(W(i\omega))} \cdot e^{-i\omega t} \right)$$

$$y(t) = y_t(t) + |W(i\omega)| \frac{\left(e^{i[\omega t + \arg(W(i\omega))]} - e^{-i[\omega t + \arg(W(i\omega))]}\right)}{2i}$$

Tenendo conto che (v. par. 4.1): $sen\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

$$y(t) = y_t(t) + |W(i\omega)| \cdot sen[\omega t + \arg(W(i\omega))]$$

Siccome $y_t(t)$ (risposta transitoria) tende a diventare trascurabile al crescere del tempo, la risposta a regime vale:

$$y_r(t) = |W(i\omega)| \cdot sen[\omega t + \arg(W(i\omega))]$$

e quindi sarà costituita da una sinusoide (come era l'ingresso) con frequenza ω uguale a quella dell'ingresso, con ampiezza pari al modulo della funzione di trasferimento calcolata per $s=i\omega$ e sfasata, rispetto all'ingresso di un angolo pari alla fase della funzione di trasferimento calcolata sempre per $s=i\omega$.

La funzione W(iω) (con ω>0) è detta *risposta armonica* (o *risposta frequenziale*) del sistema e descrive completamente (in modulo, frequenza e fase) la risposta del sistema ad uni ingresso sinusoidale di ampiezza unitaria.

5.1 Importanza della risposta armonica nell'analisi dei sistemi

Per comprendere l'importanza della risposta armonica nell'analisi dei sistemi occorre tener presente che essa può trovare impiego non solo per analizzare la risposta ad ingressi sinusoidali ma anche per ingressi di tipo diverso.

Si ricorda, infatti, che per il Teorema di Fourier, qualunque funzione periodica, con periodo T, può essere espressa come la somma di infiniti termini sinusoidali (serie di Fourier):

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(i \cdot \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos\left(i \cdot \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Le diverse componenti sinusoidali si chiamano "armoniche" ed il valore i costituisce "l'ordine" dell'armonica.

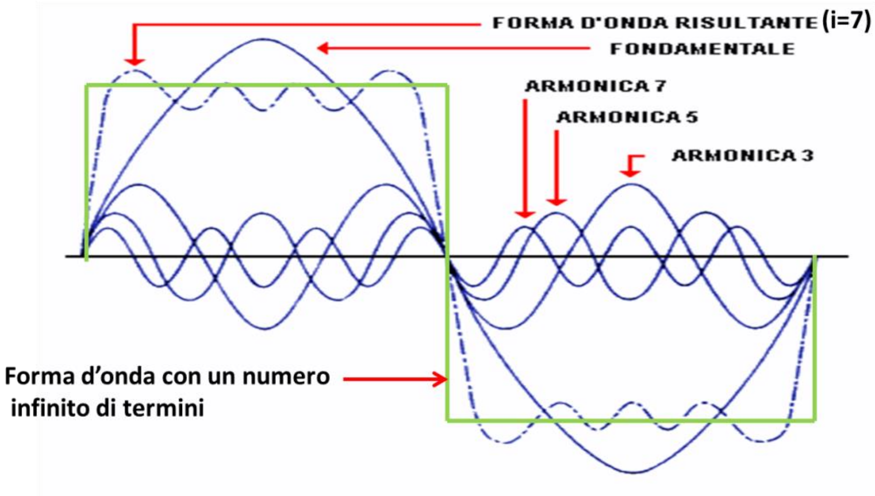


Fig. 19 – Scomposizione in serie di Fourier (i=7)

Generalizzando lo sviluppo in serie di Fourier può essere applicato anche a funzioni non periodiche considerando la funzione in studio come una porzione di una funzione periodica.

Se ne deduce che la risposta armonica fornisce indicazioni sulla risposta alle armoniche di qualsiasi ingresso.

5.2 La rappresentazione grafica della risposta armonica

La risposta armonica è una funzione complessa della variabile reale ω, quindi ogni suo valore è un numero complesso.

Per una sua rappresentazione grafica si possono utilizzare due vie: o si utilizzano due diagrammi separati, che rappresentano i due valori della coppia di numeri, al variare di ω, oppure si rappresenta ciascun valore nel piano complesso ottenendo un solo diagramma graduato in ω.

La prima via porta ai diagrammi logaritmici o di ***Bode*** che sono lo strumento fondamentale per il lavoro di sintesi nel campo delle frequenze ed in cui sono rappresentati su due diversi diagrammi l'andamento del modulo e della fase della risposta armonica in funzione della frequenza; il diagramma del modulo presenta entrambi gli assi logaritmici mentre quello della fase usa solo l'ascissa (asse della frequenza) logaritmico mentre l'ordinata è lineare.

Spesso, nel diagramma del modulo, in ordinata invece del logaritmo del modulo viene riportata una grandezza ad essa proporzionale detta *decibel* (indicata con il simbolo *dB*).

La misura in *dB* di una grandezza è espressa come:

$K(dB) = 20 \log K$

La rappresentazione con doppia scala logaritmica, oltre a comprimere la scala quando il "range" di variazione delle grandezze da rappresentare è molto ampio, semplifica anche la rappresentazione grafica delle funzioni del tipo $|W(i\omega)|=K\cdot\omega^n$. Si consideri la funzione $|W(i\omega)|=10/\omega^2$.

Se calcoliamo il logaritmo di entrambi i termini, si ottiene:

$Log_{10}|W(i\omega)| = Log_{10}(\left(10/_{\omega^2}\right) = 1-2 \cdot Log_{10}\omega$

Nella doppia scala logaritmica la funzione |W(iω)| è rappresentata da una retta con la pendenza pari a -2 (v. fig. 20) e che per ω =10 vale $Log_{10}|W(i\omega)| = 1-2 \cdot Log_{10}10 = -1$ cioè $|W(i\omega)| = 0.1$

Lavorando in dB si ha: $20 \cdot Log_{10}|W(i\omega)| = |W(i\omega)|\ (dB) = 20 - 40 \cdot Log_{10}\omega$. Anche rappresentando la funzione in dB la $|W(i\omega)|_{dB}$ in funzione di $Log_{10}\omega$ è ancora una retta con pendenza -40db/decade ed assume il valore dB=0 per $\omega = 3.16$.

Nel grafico in dB la scala dell'asse delle ordinate è lineare in dB (ma sempre logaritmica rispetto al valore della funzione), mentre l'asse delle ascisse è ancora in scala logaritmica. In tali grafici la pendenza della retta si misura in dB per decade (dB/decade), il cui significato si evidenzia in figura 21. Infatti nel grafico si nota che, presi due valori delle ascisse differenti per una potenza di 10, cioè una decade (ad esempio 10 e 100), la funzione varia di 40 dB. In tal caso, quindi, la pendenza della retta nel piano logaritmico vale 40dB/decade.

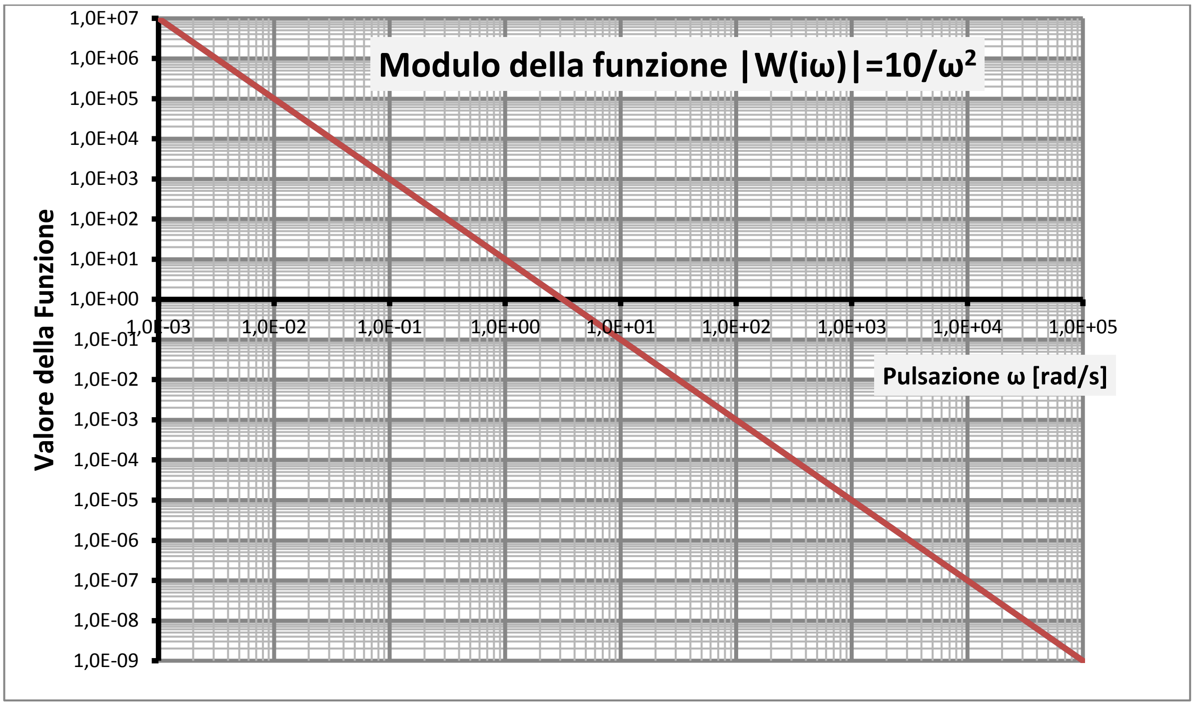


Fig. 20 – Esempio di diagramma bi-logaritmico per il modulo

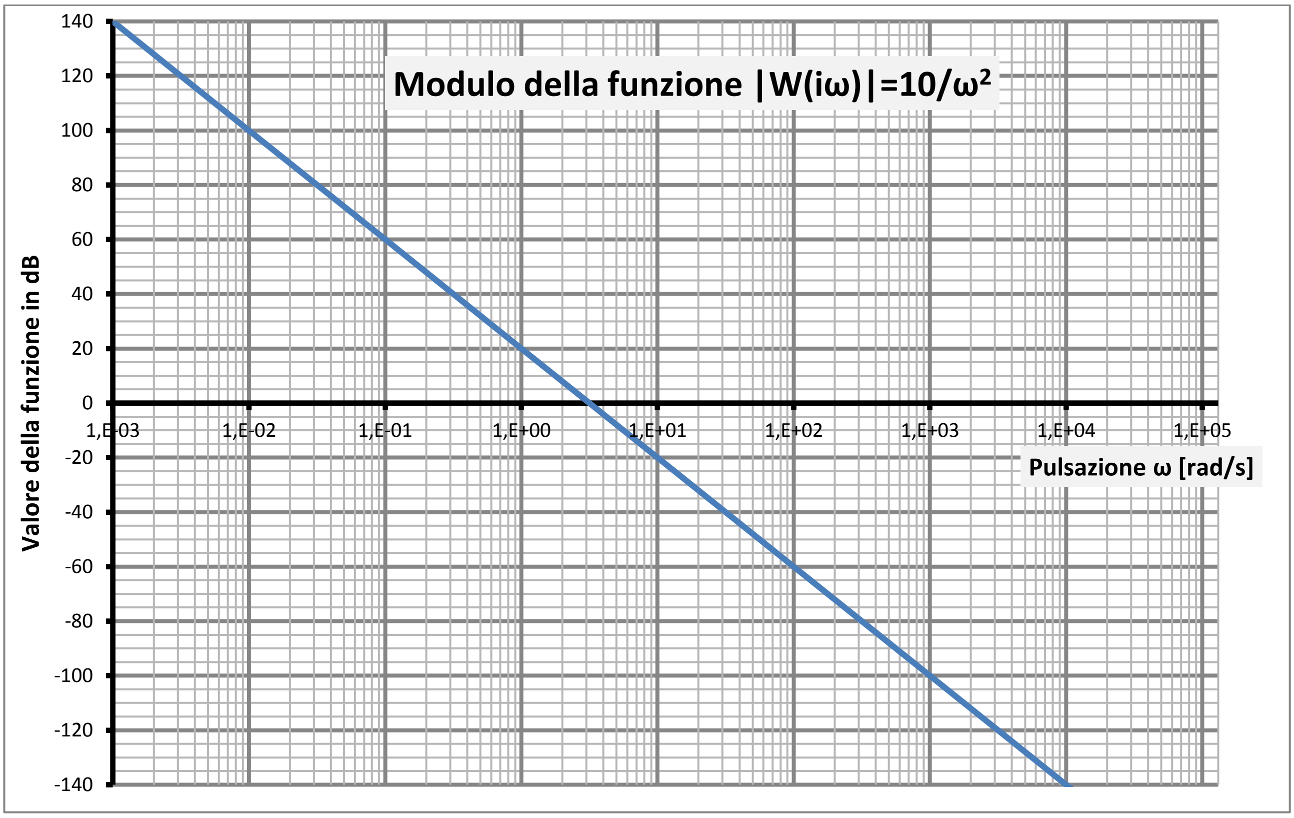


Fig. 21 – Esempio di diagramma in dB per il modulo

Si riporta di seguito, come esempio, il diagramma di Bode per la funzione di trasferimento del tipo:

$W(s) = \frac{1}{1+\tau\cdot s}$ con τ numero reale positivo

La funzione ha un polo $p = -{}^{1}\!/_{\tau}$ reale negativo. $p = -{}^{1}\!/_{\tau}$

Sostituendo a τ $-{}^{1}\!/_{p}$ la FdT diventa: $W(s) = \frac{1}{1-\cdot s/p}$

La risposta armonica W(iω) vale: $W(i\omega) = \frac{1}{1-\frac{i\omega}{p}}$ con p numero reale negativo.

Per il tracciamento dei diagrammi di *Bode* la risposta armonica va scomposta in parte Reale R e parte Immaginaria I. Nel caso che esistano termini immaginari al denominatore della risposta armonica, tale termine va eliminato moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore.

Si possono quindi calcolare:

$$|W(i\omega)| = \sqrt{R^2 + I^2} \quad \text{e} \quad Arg[W(i\omega)] = \arctan(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}})$$

I grafici di Bode del modulo e della fase si ottengono analizzando l'andamento delle due grandezze in funzione della pulsazione ω.

Nel nostro caso quindi, moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del numeratore si ha:

$$W(i\omega) = \frac{1+\frac{i\omega}{p}}{(1-\frac{i\omega}{p})\cdot(1+\frac{i\omega}{p})} = \frac{1+\frac{i\omega}{p}}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$$

La reale R vale $R = \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$ mentre la parte immaginaria I vale $I = \frac{\frac{\omega}{p}}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$ quindi:

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\omega}{p}}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}}$$

$Arg[W(i\omega)] = \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right)$ dove p è un numero reale negativo

Riportando in ascissa il valore di ω/p invece di ω si ottengono i diagrammi di Bode riportati in Fig. 22 e 23.

Fig. 22 – Diagramma di Bode – Modulo

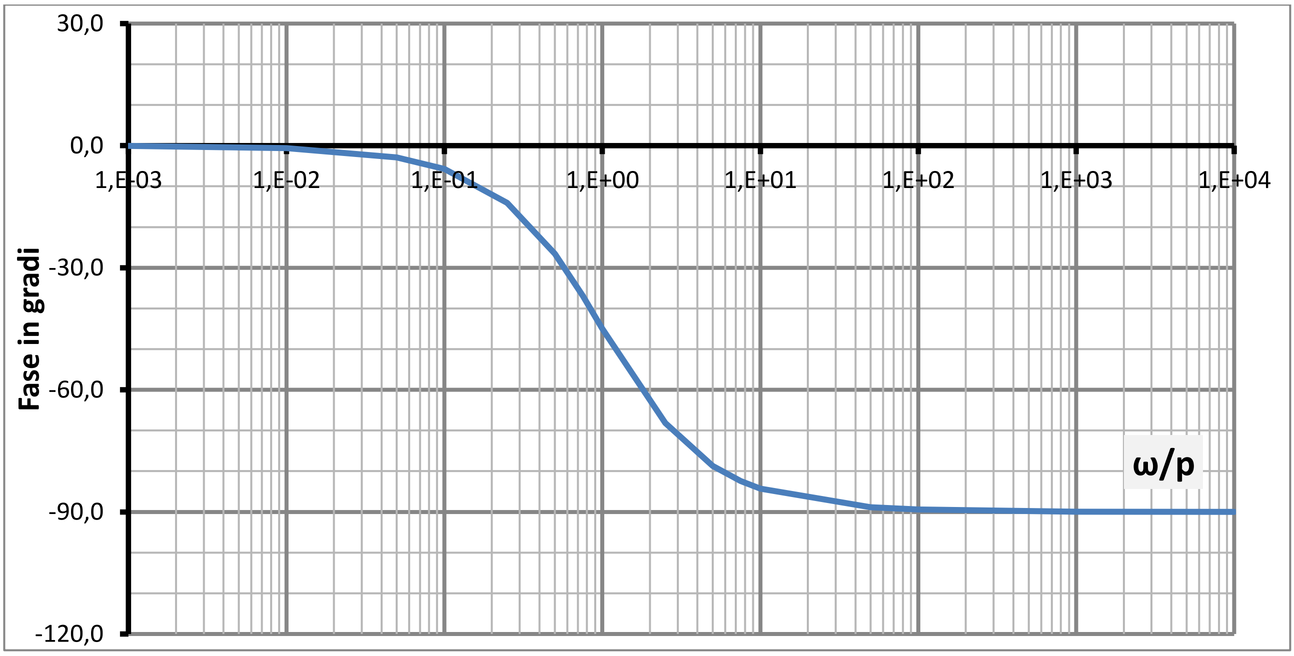


Fig. 23 – Diagramma di Bode – Fase

La seconda via porta ai diagrammi polari o di ***Nyquist***, importanti per l'analisi della stabilità e perché forniscono significativi parametri di sintesi.
Anche in questo caso la risposta armonica va scomposta in parte Reale R e parte Immaginaria I. Si riportano quindi sul diagramma complesso gli n valori di R ed I calcolati per gli n valori di ω (ω_1, ω_2,.., ω_n). Il diagramma di Nyquist va calcolato nei campi $-\infty < \omega \leq 0 \; e \; 0 \leq \omega \leq \infty$. C'è da considerare però che i due semi-diagrammi sono simmetrici rispetto all'asse reale, quindi basta calcolare il diagramma in uno dei due semi-campi precedentemente descritti.

Il verso di percorrenza del diagramma di Nyquist (vedere le frecce sul grafico) va da $-\infty$ a $+\infty$.

Nella figura seguente è ripotato il diagramma di Nyquist della risposta armonica:

$$W(i\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+j\omega)}$$

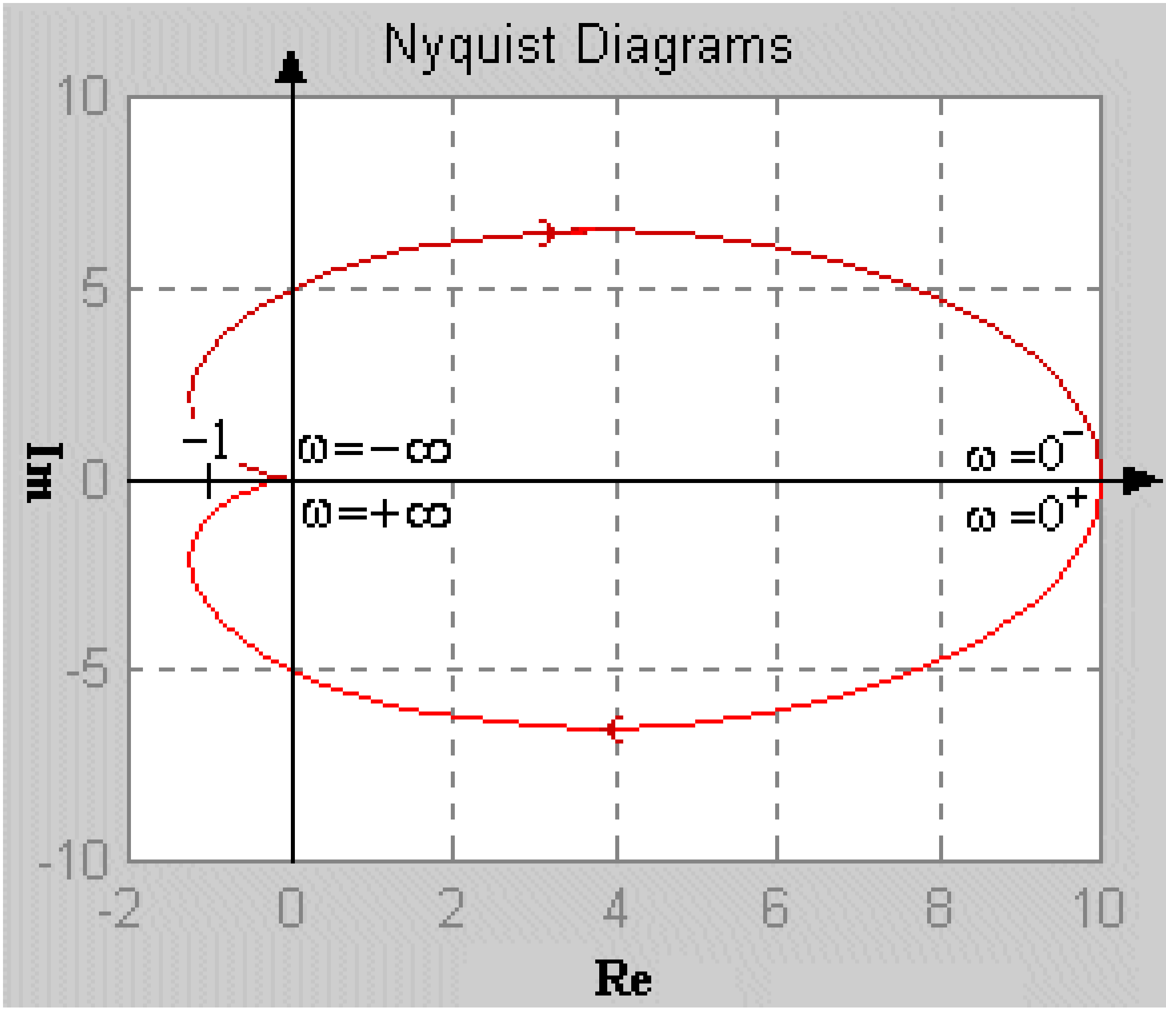


Fig. 24 – Esempio di diagramma di Nyquist

6 APPLICAZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E DELLA RISPOSTA ARMONICA

6.1 Esempio 1 – Calcolo funzione di trasferimento

Applicando le tecniche esposte ai capitoli precedenti ai sistemi introdotti al § 3 (serbatoio o sistema massa-attrito) caratterizzato dall'equazione del tipo:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Trasformando (ed applicando la proprietà di linearità ed il teorema della derivata con la condizione al contorno y(0)=0) otteniamo:

$$a_1 s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s) \qquad (a_1 s + a_0) \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento del sistema vale:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{b_0 / a_1}{s + a_0 / a_1}$$

La quale presenta un polo reale in:

$$a_1 s + a_0 = 0 \qquad s = -\frac{a_0}{a_1}$$

mentre non presenta zeri (il numeratore non si annulla mai se non per $b_0=0$)

6.2 Esempio 1 – Calcolo della risposta all'impulso

Poiché la trasformata dell'impulso vale 1, si ha che la trasformata della risposta all'impulso vale:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = W(s) \cdot 1 = \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

Anti-trasformando la Y(s), si ottiene che la risposta all'impulso che vale:

$$y(t) = \frac{b_0}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} t}$$

6.3 Esempio 1 – Calcolo della risposta al gradino di ampiezza U0

La trasformata della risposta ad un ingresso a gradino di ampiezza U_0 vale, invece:

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{U_0}{s} = \frac{U_0 \cdot b_0}{a_1 s^2 + a_0 s} = \frac{U_0 \cdot \left(b_0/a_1 \right)}{s \cdot \left(s + a_0/a_1 \right)}$$

La quale presenta due poli in:

$$s = 0 \qquad s = -\frac{a_0}{a_1}$$

Per poter effettuare l'anti-trasformata di Y(s) (e quindi poter analizzare la risposta nel tempo), dobbiamo riportarci alla forma:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2} \frac{R_i}{(s - p_i)}$$

essendo presenti 2 poli nella Y(s)

La trasformata dell'uscita Y(s) può quindi essere scritta come:

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

Calcoliamo i due residui:

$$R_1 = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{Ub_0}{a_1 s^2 + a_0 s} = \lim_{s\to -0} \frac{Ub_0}{a_1 s + a_0} = U \frac{b_0}{a_0}$$

$$R_2 = \lim_{s\to -\frac{a_0}{a_1}} (s + \frac{a_0}{a_1}) Y(s) = \lim_{s\to -\frac{a_0}{a_1}} (s + \frac{a_0}{a_1}) \frac{Ub_0}{a_1 s^2 + a_0 s} = \lim_{s\to -\frac{a_0}{a_1}} (s + \frac{a_0}{a_1}) \frac{U\, b_0/a1}{s(s + a_0/a_1)} = \lim_{s\to -\frac{a_0}{a_1}} \frac{U\, b_0/a_1}{s} = -U \frac{b_0}{a_0}$$

Quindi:

$$Y(s) = \frac{U \frac{b_0}{a_0}}{s} + \frac{-U \frac{b_0}{a_0}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

Ricordando che *1/s* è la trasformata della funzione a gradino di ampiezza unitaria (vale 0 per t minore o uguale a 0 e vale 1 per *t>0*, l'antitrasformata di *Y(s)* vale:

$$y(t) = \left(U \frac{b_0}{a_0} \right) \cdot 1 - \left(U \frac{b_0}{a_0} \right) \cdot \left(e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \right) = U \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} t}) \quad \text{per t>0}$$

Che è la stessa espressione che abbiamo ricavato al capitolo 3, questa volta però senza necessità di risolvere equazioni differenziali.

6.4 Esempio 1 – Calcolo della risposta armonica

Scriviamo ora la risposta armonica del nostro sistema:

$$W(i\omega) = \frac{b_0}{a_1 i\omega + a_0}$$

e proviamo a tracciare il diagramma di Bode.

Innanzitutto razionalizziamo l'espressione di *W(iω)* moltiplicando numeratore e denominatore per $(a_0 - a_1 i\omega)$

$$W(i\omega) = \frac{b_0}{a_1 i\omega + a_0} \frac{-a_1 i\omega + a_0}{-a_1 i\omega + a_0} = \frac{-b_0 a_1 i\omega + b_0 a_0}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} = \frac{b_0 a_0}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} - i \frac{b_0 a_1 \omega}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}$$

Quindi la parte reale e quella immaginaria valgono:

$$W_R(i\omega) = \frac{b_0 a_0}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}$$

$$W_I(i\omega) = -\frac{b_0 a_1 \omega}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}$$

Il modulo e la fase di *W(iω)* valgono quindi:

$$|W(i\omega)| = \sqrt{W_R^2(i\omega) + W_I^2(i\omega)} = \sqrt{\frac{b_0^2 a_0^2}{\left(a_1^2 \omega^2 + a_0^2\right)^2} + \frac{b_0^2 a_1^2 \omega^2}{\left(a_1^2 \omega^2 + a_0^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{b_0^2 \left(a_0^2 + a_1^2 \omega^2\right)}{\left(a_1^2 \omega^2 + a_0^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{b_0^2}{a_0^2 + a_1^2 \omega^2}}$$

$$|W(i\omega)| = b_0/a_1 \sqrt{\frac{1}{\left(a_0/a_1\right)^2 + \omega^2}}$$

$$|W(i\omega)| = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 \omega^2}} = \frac{b_0/a_1}{\sqrt{\frac{a_0^2}{a_1^2} + \omega^2}} = \frac{b_0/a_0}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{a_1}{a_0}\omega\right)^2\right)}}$$

$$Arg(W(i\omega)) = \arctan\frac{W_I(i\omega)}{W_R(i\omega)} = \left(-\frac{\dfrac{b_0 a_1 \omega}{a_1^2\omega^2 + a_0^2}}{\dfrac{b_0 a_0}{a_1^2\omega^2 + a_0^2}}\right) = \arctan\left(-\frac{b_0 a_1 \omega}{b_0 a_0}\right) = \arctan\left(-\frac{a_1 \omega}{a_0}\right)$$

Senza entrare in ulteriori dettagli possiamo notare che, per basse frequenze dell'ingresso, l'uscita è indipendente dalla frequenza, mentre per frequenze elevate l'uscita è inversamente proporzionale, su scala logaritmica, alla frequenza.

Nel caso $a_0/a_1>0$ l'uscita è sfasata di 90° in ritardo alle alte frequenze, mentre è in fase con l'ingresso alle basse frequenze.

Nel caso $a_0/a_1<0$ l'uscita è sfasata di 90° in anticipo alle alte frequenze, mentre è in fase con l'ingresso alle basse frequenze.

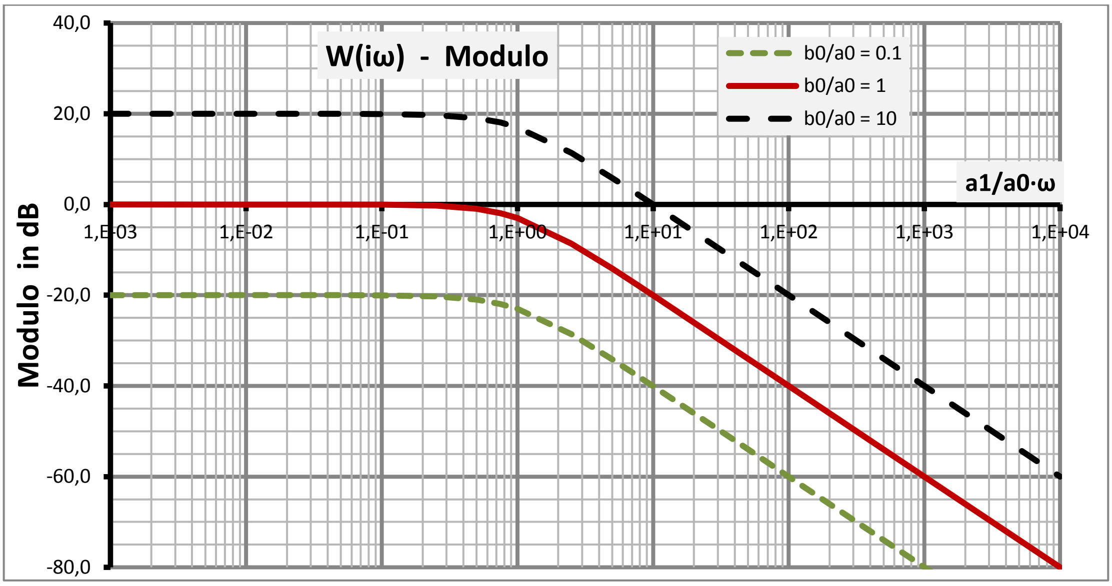


Fig. 25 - Diagramma di Bode del sistema di controllo del livello

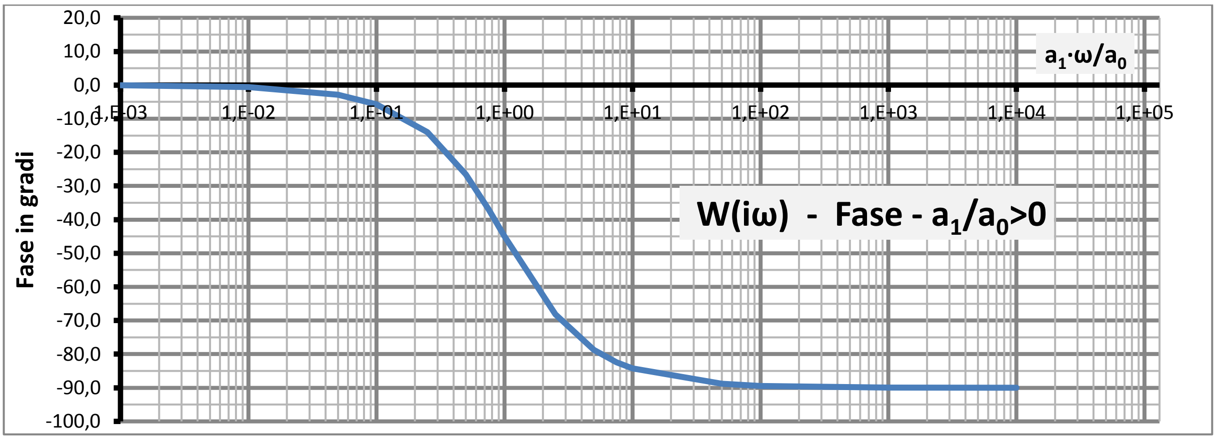


Fig. 26 - Diagramma di Bode del sistema di controllo del livello

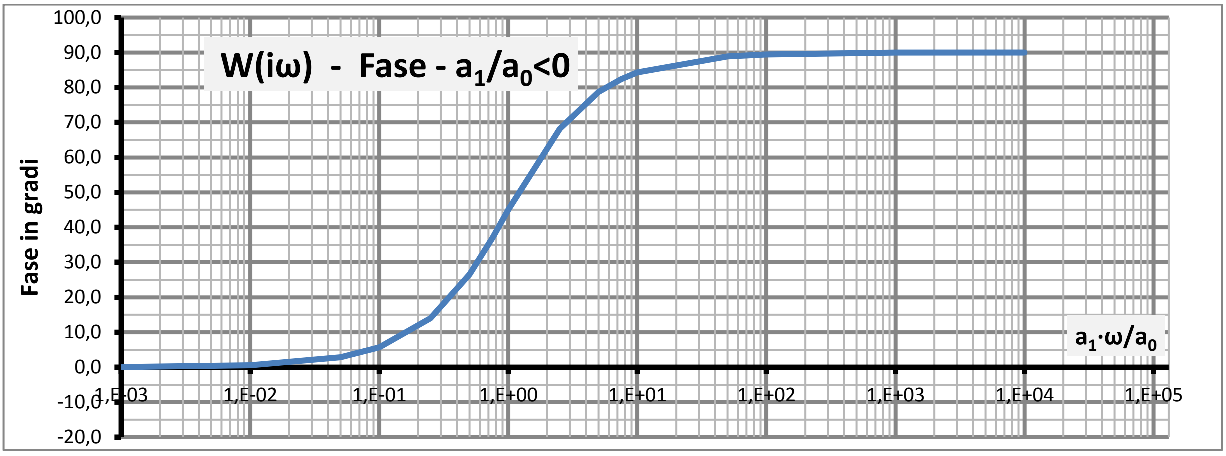


Fig. 27 - Diagramma di Bode del sistema di controllo del livello

Analizzando i risultati dal punto di vista fisico e pensando al modello matematico del serbatoio riportato al par. 3.1, i coefficienti a_0 e a_1 hanno senso solo se sono ambedue positivi. Infatti il valore di a_0 corrisponde all'area del serbatoio, mentre a_1 determina il legame tra livello nel serbatoio e la portata in uscita. Quindi il grafico della fase in Fig. 27 non ha significato fisico, a differenza del grafico della fase in Fig. 26.