http://www.integr-abile.unito.it/Libri/Analisi1/Capitolo8.pdf

Capitolo II

Introduzione alla teoria delle Equazioni differenziali

1 Equazioni lineari del primo ordine

In questo capitolo tratteremo equazioni differenziali del primo e del secondo ordine, esponendo tecniche elementari di soluzione. Menzioneremo alcuni problemi elementari di fisica e di ingegneria in cui li equazioni differenziali, qui discusse, trovano applicazione.

Una equazione differenziale è una equazione del tipo

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$
$$y' = \frac{d}{dx} y, ..., y^{(n)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n y \quad (1.1)$$

che può essere anche scritta in forma esplicita come

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

Assumeremo che la variabile x sia definita sull'asse reale e che y(x) sia una funzione derivabile almeno n-volte.

Il problema posto dalla (1.1) o (2.1) consiste nella ricerca della funzione incognita y. In termini estremamente grossolani potremo anche dire che una equazione differenziale è una equazione in cui l'incognita è una funzione[1].

Se le derivate coinvolte nelle relazioni precedenti si limitano alla prima, allora si dice che l'equazione è del primo ordine.

Facciamo ora riferimento all'esempio di una equazione differenziale del primo ordine a ***coefficienti costanti,*** ovvero

$$y' = k - \alpha\, y^n \qquad (3.1)$$

[1] Tale definizione è estremamente generica e si adatta ad altri tipi di equazioni, quali quelle ***funzionali,*** nel seguito saremo meno imprecisi.

I coefficienti α, k, al secondo membro della (3.1), si dicono costanti se non dipendono dalla variabile x. Se ci limitiamo al caso n=1 allora l'equazione si dice ***lineare del primo ordine.***

Consideriamo ora il caso in cui $\alpha = 0$, l'equazione è semplicemente data da

$y' = k$ (4.1)

Che può essere riscritta come

$\frac{d}{dx} y = k$ (5.1)

La soluzione del problema precedente si riduce alla ricerca di una funzione la cui derivata è una costante. La risposta è banale, ma proviamo a definirla in termini un poco pletorici, però utili per una migliore comprensione di quello che segue. Riscriviamo l'eq. (5.1) come

$dy = k\,dx$ (6.1)

e integriamo ambo i membri, per cui

$y(x) = k\,x + c$ (7.1)

La costante arbitraria *c* potrà essere fissata specificando un ***"valore iniziale"*** ovvero un valore assunto dalla funzione in corrispondenza di un determinato x_0, ovvero

$y(x_0) = y_0$ (8.1)

La costante c che appare nella eq. (7.1) sarà dunque definita tenendo conto che

$y(x_0) = k\,x_0 + c$ (9.1)

Pertanto la soluzione del nostro problema è infine scrivibile come

$y(x) = k\,(x - x_0) + y_0$ (10.1)

Per rendere meglio conto del risultato precedente, torniamo all'equazione (6.1) e integriamo ambo i termini, tenendo conto che questa viene fatta nell'intervallo (x_0, x) in corrispondenza dei quali la funzione incognita assume i valori ($y(x_0), y(x)$). Scriveremo dunque

$$\int_{y_0}^{y} d\eta = k\int_{x_0}^{x} d\xi \rightarrow$$
$$\rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \rightarrow$$
$$\rightarrow y(x) = k(x - x_0) + y_0 \quad (11.1)$$

E' evidente che la soluzione del problema è altrettanto banale se k non è una costante ma una funzione di x, in questo caso avremo semplicemente

$$\int_{y_0}^{y} d\eta = \int_{x_0}^{x} k(\xi)d\xi \rightarrow$$
$$\rightarrow y = \int_{x_0}^{x} k(\xi)d\xi + y_0 \quad (12.1).$$

Consideriamo ora il problema discusso fino a questo punto, inserendolo nell'ambito di una prospettiva associata alla Fisica del moto accelerato. Prendiamo come esempio il moto di un corpo puntiforme, soggetto ad una certa accelerazione. Ricordiamo che la derivata del vettore velocità è l'accelerazione impressa al corpo

$$\frac{d}{dt}v = a \qquad (13.1)$$

Mentre la derivata del vettore posizione definisce la il vettore velocità, ovvero

$$\frac{d}{dt}s = v \qquad (14.1)$$

Nel caso del moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante, per cui riscrivendo la (13.1) senza il simbolo di vettore e assumendo che al tempo t=0 la velocità (iniziale) è v_0, possiamo scrivere la velocità in termini dell'accelerazione come

$$v(t) = at + v_0 \quad (15.1)$$

La (14.1) ci permette di determinare lo spazio percorso in termini della accelerazione e della velocità iniziale. Combinando la (14.1) e la (15.1) scriveremo

$$\frac{d}{dt}s = at + v_0 \qquad (16.1)$$

Che, integrata sotto l'assunzione che al tempo iniziale t=0 lo spazio percorso sia s_0,

fornisce il risultato

$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$ (17.1)

Un ulteriore esempio di soluzione di equazioni differenziali per problemi fisici è quello del moto dei proiettili, che illustreremo brevemente nel seguito.

Consideriamo quanto mostrato in Fig. 1, ovvero un punto materiale lanciato con una velocità iniziale con componenti (orizzontale x e verticale y)

$$v_{0,y}=v_0\sin(\alpha)$$
$$v_{0,x}=v_0\cos(\alpha) \quad (18.1)$$

Tenuto conto dell'effetto dell'accelerazione di gravità lungo la direzione verticale, e del fatto che lungo l'asse x il punto materiale non è soggetto ad alcuna accelerazione, possiamo scriveremo le equazioni differenziali del moto come

$$\frac{dv_y}{dt}=-g\to v_y=-gt+v_0\sin(\alpha)$$
$$\frac{dv_x}{dt}=0\to v_x=v_0\cos(\alpha) \qquad (19.1)$$

Integrando le velocità otteniamo lo spazio percorso lungo gli assi y e x, ovvero

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-gt+v_0\sin(\alpha)\to y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin(\alpha)t$$
$$v_x=\frac{dx}{dt}\to v_0\cos(\alpha)\to \qquad x(t)=v_0\cos(\alpha)t \qquad (20.1)$$

Le equazioni (20.1) sono il risultato del ***principio della indipendenza dei moti simultanei.*** Sulla base di tale principio i moti lungo gli assi verticale si sviluppano indipendentemente e il legame tra l'uno e l'altro è costituito dalla variabile tempo[2].

Le equazioni sulla destra, relative alle equazioni orarie $y(t),x(t)$, rappresentano una forma parametrica dell'equazione della parabola. Esprimendo t in termini di x, otteniamo

$$t=\frac{x(t)}{v_0\cos(\alpha)} \quad (21.1)$$

Che una volta sostituito nella (20.1) fornisce l'equazione della parabola

[2] Per ulteriori dettagli si veda il libro, Appunti di Fisica Generale Applicata di F. Ciocci e G. Dattoli, disponibile in https://www.researchgate.net/profile/Giuseppe-Dattoli/publication/260750163_APPUNTI_DI_FISICA_GENERALE_APPLICATA/links/0deec5321e69aacb77000000/APPUNTI-DI-FISICA-GENERALE-APPLICATA.pdf

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\cos(\alpha))^2}x^2 + \tan(\alpha)x \quad (22.1)$$

I cui coefficienti sono espressi in termini dell'accelerazione di gravità, della velocità iniziale e dell'angolo di inclinazione.

Un utile esercizio è il calcolo della gittata e la determinazione del massimo della parabola di equazione (22.1) e la relativa interpretazione in termini del principio di indipendenza dei moti.

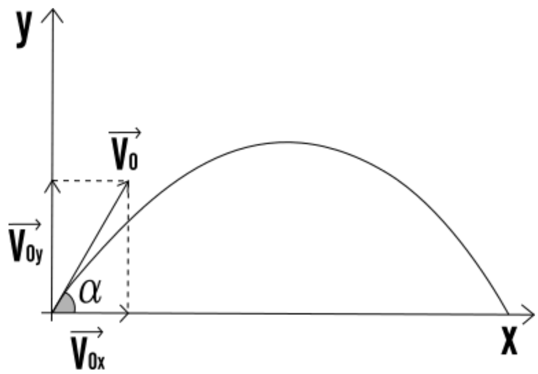


Fig. 1

Moto parabolico di un corpo lanciato con velocità iniziale di modulo v_0 e inclinazione α rispetto all'asse orizzontale. La posizione iniziale coincide con l'origine degli assi, per cui $x(0) = y(0) = 0$

2 Equazioni differenziali del primo ordine,omogenee e non

Consideriamo ora l'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$y' = k - \alpha\, y,$$
$$y(0) = y_0 \quad (1.2)$$

e, assumiamo in via preliminare, k=0, ovvero

$$y' = -\alpha\, y$$
$$y(0) = y_0 \, (2.2)$$

L'equazione precedente è detta omogenea del primo ordine. La ricerca della relativa soluzione è semplificata dalla proprietà delle funzioni esponenziali di essere "autofunzioni" dell'operatore derivata, ovvero

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad (3.2)$$

con λ costante.

Possiamo allora assumere che la nostra funzione incognita sia esprimibile in termine di un esponenziale, che scriveremo come

$$y(x) = Ae^{\lambda x} \quad (4.2)$$

dove sia A che λ sono costanti da determinare. Sostituendo la (4.2) nella (2.2) otteniamo

$$y' = \frac{d}{dx}(Ae^{\lambda x}) = \lambda\left(Ae^{\lambda x}\right) = -\alpha(Ae^{\lambda x}) \quad (5.2)$$

La determinazione della costante λ è implicitamente contenuta nella relazione precedente che fornisce

$$\lambda = -\alpha \quad (6.2)$$

Possiamo dunque scrivere

$$y(x) = Ae^{-\alpha x} \quad (7.2)$$

Imponendo infine la condizione iniziale avremo

$$y(0) = A \quad (8.2)$$

La soluzione del nostro problema è dunque

$$y(x) = y_0 e^{-\alpha x} \quad (9.2)$$

Che è l'***unica*** compatibile con la (2.2) e con la relativa condizione iniziale.

Consideriamo ora l'equazione completa (1.2), che diremo non omogenea, e notiamo che non ammette una semplice soluzione del tipo (9.2). Possiamo però provare a ridurla ad una forma omogenea. Riscriviamo la (1.2) come

$$y' + \alpha\left(y - \frac{k}{\alpha}\right) = 0 \quad (10.2)$$

Poniamo

$$\bar{y} = y - \frac{k}{\alpha} \quad (11.2)$$

e notiamo che, essendo $\frac{k}{\alpha}$ costante, avremo

$$\bar{y}' = y' \quad (12.2)$$

possiamo dunque scrivere la (10.2) nella forma omogenea

$$\bar{y}' + \alpha\,\bar{y} = 0 \quad (13.2)$$

Con la costante iniziale che, conformemente alla (11.2), diviene

$$\bar{y}_0 = y_0 - \frac{k}{\alpha} \quad (14.2)$$

La soluzione del problema si ottiene utilizzando la (9.2), trascritta nella forma

$$\bar{y} = \bar{y}_0 e^{-\alpha x} \quad (15.2)$$

Tornando alla variabile y avremo

$$y = y_0 e^{-\alpha x} + \frac{k}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right) \quad (16.2)$$

che rappresenta la soluzione della (1.2) e che contiene per k=0 la soluzione della forma omogenea (2.2) e per $\alpha = 0$ la soluzione(7.1), notiamo infatti che

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[y_0 e^{-\alpha x} + \frac{k}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)\right] = y_0 + k \lim_{\alpha\to 0} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} \quad (17.2)$$

Poiché, applicando la regola di de l'Hopital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} x \frac{e^{-\alpha x}}{1} = x \lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha x} = x \quad (18.2)$$

avremo

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[y_0 e^{-\alpha x} + \frac{k}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)\right] = y_0 + kx \quad (19.2)$$

In accordo con i risultati precedenti.

Il problema matematico, appena trattato, ha una applicazione importante concernente lo studio del moto dei corpi sotto l'effetto della gravità e di una forza di attrito dipendente dalla velocità. Le equazioni del moto sono in questo caso date da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$
$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v, \alpha = \frac{\gamma}{m}$$
$$v(0) = v_0 \qquad (20.2)$$

Il cui significato viene chiarito dalla Fig. 2

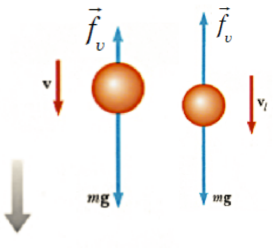


Fig. 2

Caduta di un grave in presenza di una forza resistente dipendente dalla velocità

La soluzione della equazione (20.2) si ottiene semplicemente dalla (16.2) e può essere scritta come

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} + v_L(1 - e^{-\alpha t})$$
$$v_L = \frac{g}{\alpha} \qquad (21.2)$$

Dove v_L rappresenta la cosiddetta velocità limite; l'andamento della velocità in funzione del tempo dato dalla eq. (21.2) e relativo al caso di velocità iniziale nulla è riportato in Fig. (3). Inizialmente (ovvero a piccole velocità) il moto è (essenzialmente) uniformemente accelerato, perché il termine resistente è ininfluente. All'aumentare della velocità l'effetto della forza d'attrito diventa tale da annullare quello della forza peso e il corpo si muove a velocità costante, data dalla velocità limite.

Un esercizio utile è il calcolo dello spazio percorso ottenuto integrando ulteriormente l'equazione (21.2).

Ricordando la definizione della velocità in termini di derivata dello spazio avremo

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) \qquad (22.2)$$

Che, in base a quanto detto nel paragrafo precedente, fornisce per la legge oraria dello spazio la seguente relazione

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + s_0 \quad (23.2)$$

Per la relativa espressione esplicita si vedano gli esercizi proposti alla fine del paragrafo 7.

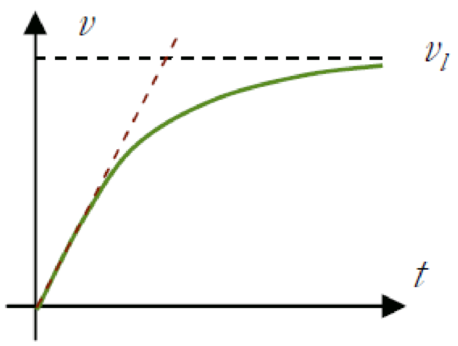


Fig. 3

Velocità in funzione del tempo, eq. (21.2) per $v_0 = 0$

3 Equazioni differenziali del primo ordine lineari a coefficienti non costanti

In questo paragrafo ci occuperemo della soluzione di equazioni di tipo (2.2) quando i coefficienti α, k non sono costanti ma dipendenti da x.

Prima di entrare nello specifico riconsideriamo la soluzione (16.2) e notiamo che consta di due parti, specificate nel seguito

$$y = y_h + y_g \quad (1.3)$$

Che rappresentano la parte omogenea (h, homogeneous) and (g, general)

$$y_h = y_0 e^{-\alpha x}, y_g = \frac{ke^{-\alpha x}}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right) \quad (2.3)$$

I due contributi una volta derivati rispetto a x, soddisfano le seguenti relazioni

$$\frac{dy_h}{dx} = -\alpha y_h,$$
$$\frac{dy_g}{dx} = -\alpha y_g + \frac{k}{\alpha} e^{-\alpha x} (\alpha\, e^{\alpha x}) = -\alpha y_g + k \quad (3.3)$$

Che, sommati membro a membro, danno

$$\frac{d}{dx}\left(y_h + y_g\right) = -\alpha\left(y_h + y_g\right) + k \quad (4.3)$$

Il ragionamento, fatto in precedenza, serve a chiarire come la parte omogenea e quella generale contribuiscano alla soluzione di una equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti.

Consideriamo ora il caso a coefficienti non costanti

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(x)\, y + k(x)$$
$$y(0) = y_0 \qquad (5.3)$$

e operiamo la stessa distinzione tra parte omogenea e soluzione generale, che scriveremo come

$$y = y_h + y_g$$
$$y_h = \varepsilon_0 e^{A(x)}$$
$$y_g = e^{A(x)} B(x) \quad (6.3)$$

dove $A(x), B(x)$ sono funzioni da determinare, come illustrato nel seguito.

La quantità ε_0 è una costante di comodo, il cui ruolo apparirà evidente nella discussione che segue.

La parte omogenea è, per definizione, la soluzione di

$$\frac{d}{dx} y_h = \alpha(x)\, y_h \quad (7.3)$$

Inserendo la y_h, definita nella (6.3), si ottiene $A(x)$ in termini di $\alpha(x)$, come indicato nel seguito

$$\frac{d}{dx} y_h = \varepsilon_0 \frac{d}{dx} e^{A(x)} = A'(x)\left(y_0 e^{A(x)}\right) = A'(x)\, y_h = \alpha(x)\, y_h \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{d}{dx} A(x) = \alpha(x) \rightarrow \mathrm{A}(x) = \int_0^x \alpha(\xi) d\xi \qquad (8.3)$$

Per quanto concerne la funzione $B(x)$ operiamo in maniera analoga, notando che

$$\frac{d}{dx} y_g = \alpha(x) y_g + k(x) \quad (9.3)$$

Utilizzando la definizione di y_g data nella terza della (9.3), otteniamo

$$\frac{d}{dx} y_g = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}B(x)\right) = A' y_g + e^{A(x)}B'(x) \quad (10.3)$$

Uguagliando l'ultimo termine della precedente equazione con il secondo membro della (9.3), troviamo l'ulteriore identità

$$A' y_g + B'(x)e^{A(x)} = \alpha(x) y_g + k(x) \quad (11.3)$$

Poiché $A' = \alpha(x)$, è evidente che l'equazione precedente fornisce la relazione che ci permette di determinare la funzione $B(x)$, infatti si ottiene

$$B'(x)e^{A(x)} = k(x) \quad (12.3)$$

Da cui segue

$$B'(x) = e^{-A(x)}k(x) \quad (14.3)$$

ed infine

$$B(x) = \int_0^x e^{-A(\xi)}k(\xi)d\xi \quad (15.3)$$

La soluzione della eq. (5.3) è dunque data da

$$\begin{aligned}
&y(x) = y_h(x) + y_g(x) \\
&y_h(x) = \varepsilon_0 e^{A(x)} \\
&y_g(x) = e^{A(x)} + e^{A(x)}\int_0^x e^{-A(\xi)}k(\xi)d\xi \\
&A(x) = \int_0^x \alpha(\xi)d\xi
\end{aligned} \quad (16.3a).$$

Per riconciliare il precedente risultato con la condizione iniziale, poniamo

$y(0) = \varepsilon_0 + 1$ e otteniamo infine

$$y_g(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)}\int_0^x e^{-A(\xi)}k(\xi)d\xi \quad (16.3b)$$

Proviamo ora ad applicare quanto imparato prendendo come esempio il seguente esercizio

$$y' = 3x\,y - x$$
$$y(0) = -3 \quad (17.3)$$

La ricerca della soluzione dell'esercizio proposto richiede l'applicazione pedissequa della formula risolutiva (16.3), prendendo nota che

$$\alpha(x) = 3x$$
$$k(x) = -x \quad (18.3)$$

avremo

$$y(x) = -3e^{\frac{3}{2}x^2} - e^{\frac{3}{2}x^2}\int_0^x \xi\, e^{-\frac{3}{2}\xi^2}\, d\xi \quad (19.3)$$

La scrittura della forma finale della soluzione richiede ora un passo in più, ovvero la derivazione in forma esplicita dell'integrale nel membro a destra della precedente equazione. A tale scopo, procederemo come segue

$$\int_0^x \xi\, e^{-\frac{3}{2}\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\frac{3}{2}\xi^2}\, d\xi^2 \quad (20.3)$$

Operiamo ora la sostituzione $\xi^2 = t$, in modo da riscrivere

$$\frac{1}{2}\int_0^x e^{-\frac{3}{2}\xi^2}\, d\xi^2 = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} e^{-\frac{3}{2}t}\, dt \quad (21.4)$$

A questo punto, il calcolo si riduce alla derivazione di un integrale del tipo

$$\int_0^x e^{-\lambda\xi} d\xi = -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda\xi}\right]_0^x = -\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x} - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) \quad (22.4)$$

Che fornisce, per l'integrale nel membro di destra della equazione (21.4), il risultato

$$\frac{1}{2}\int_0^{x^2} e^{-\frac{3}{2}t}\, dt = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}x^2}\right) \quad (23.4).$$

In conclusione la soluzione della equazione (17.3) si scrive

$$y(x) = -3e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{e^{\frac{3}{2}x^2}}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}x^2}\right) =$$
$$= -3e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3}{2}x^2} - 1\right) \qquad (24.4)$$

Ritorniamo ora alla nostra equazione originale scritta come

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(x)\,y + k(x)$$
$$y(x_0) = y_0 \qquad (25.4)$$

Ovvero, nella stessa forma di prima, ma con la condizione iniziale in $x_0 \neq 0$.

La soluzione è, evidentemente la stessa data in precedenza, con l'unica differenza che i limiti inferiori di integrazione contengono x_0, ovvero

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(\xi)} k(\xi) d\xi$$
$$A(x) = \int_{x_0}^{x} \alpha(\xi) d\xi \qquad (26.4)$$

Come esempio chiarificante discuteremo il seguente esercizio

$$y' = \frac{1}{x} y + 1$$
$$y(1) = 1 \qquad (27.4)$$

La cui soluzione, applicando la (26.4), può essere espressa come

$$y(x) = y(x_0) e^{\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi} + e^{\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi} \int_1^x e^{-\int_1^{\xi} \frac{1}{\xi'} d\xi'} d\xi \qquad (28.4)$$

Che scriveremo in forma meno compatta, tenendo conto delle seguenti relazioni

$$\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi = \ln(\xi)\,|_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$$
$$e^{\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi} = e^{\ln(x)} = x$$
$$e^{-\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x} \qquad (29.4)$$

e, una volta inserite nella (28.4), danno

$$y(x) = x + x\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi = x + x[\ln(\xi)]_1^x = x + x\ln(x) \quad (30.4)$$

A riprova della correttezza della soluzione, notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y(x) &= \frac{d}{dx}(x + x\ln(x)) = (1 + \ln(x)) + 1 = \\ &= \frac{(x + x\ln(x))}{x} + 1 = \frac{1}{x} y + 1 \end{aligned} \quad (31.4)$$

Ulteriori esempi sono disponibili nel seguito.

5. Equazioni del primo ordini a variabili separabili

Proviamo ora a risolvere con un ulteriore metodo l'equazione del primo ordine a coefficienti costanti

$$\begin{aligned} &y' = k - \alpha\, y, \\ &y(x_0) = y_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Che riscriveremo nella forma

$$\frac{d}{dx} y = k - \alpha\, y \quad (2.5)$$

Operiamo l'ulteriore trasformazione

$$\frac{dy}{k - \alpha\, y} = dx \quad (3.5)$$

Che, ulteriormente manipolata, fornisce la relazione

$$\frac{dy}{y - \frac{k}{\alpha}} = -\alpha dx \quad (4.5)$$

Scrivendo in forma integrale ambo i membri

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta - \frac{k}{\alpha}} = -\alpha \int_{x_0}^{x} d\xi \quad (5.5)$$

Eseguendo esplicitamente gli integrali, otteniamo il risultato

$$\ln\left(\frac{y-\frac{k}{\alpha}}{y_0-\frac{k}{\alpha}}\right)=-\alpha(x-x_0)$$ (6.5)

Una volta invertita la funzione logaritmo troviamo

$$\frac{y-\frac{k}{\alpha}}{y_0-\frac{k}{\alpha}}=e^{-\alpha(x-x_0)}$$ (7.5)

Che si riduce facilmente alla forma “canonica”

$$y=y_0e^{-\alpha(x-x_0)}+\frac{k}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(x-x_0)}\right)$$ (8.5).

Cerchiamo ora di capire che cosa ha di diverso la procedura testé adottata per la soluzione di un problema, già processato utilizzando tecniche differenti.

Il metodo da noi applicato è quello della ***separazioni di variabili***, che ci ha permesso di scrivere la variabile y al membro di sinistra, mentre, in quello di destra, la variabile x.

In termini più generali diremo che, se il nostro problema è esprimibile come

$$y'=f(x,y)$$
$$y(x_0)=y_0$$ (9.5)

e se la funzione $f(x,y)$ è a variabili separabili, ovvero

$$f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$$ (10.5)

allora si ha

$$y'=g(x)h(y)$$ (11.5)

Che ci permette di risolvere il nostro problema nella forma

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$$ (12.5)

Integrando, come già fatto prima, ambo i membri dell’ultima equazione (12.5) si ottiene

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)dx \quad (13.5)$$

Il problema è ora virtualmente risolto. La possibilità di una soluzione della forma

$$y = S(x) \quad (14.5)$$

dipende dalla possibilità di ottenere gli integrali in forma esplicita ed invertire le equazioni risultanti in maniera da esprimere y come una funzione di x.

Cerchiamo di capire cosa vogliamo dire con qualche esempio.

L'equazione

$$y' = \frac{x}{1+y}$$

$$y(-1) = 2 \quad (15.5)$$

è della forma a variabili separabile e possiamo riscriverla come

$$(1+y)dy = xdx \quad (16.5)$$

Dalla integrazione di ambo i membri si ha

$$\int_{y_0}^{y} (1+\eta)d\eta = \int_{x_0}^{x} \xi d\xi \quad (17.5)$$

eseguendo gli integrali di entrambi i membri, si ottiene

$$\left(\eta + \frac{\eta^2}{2}\right)_2^y = \frac{1}{2}[\xi]_{-1}^x \quad (18.5)$$

o, in forma quasi definitiva

$$y - 2 + \frac{y^2}{2} - 2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (19.5)$$

Che in ultima istanza fornisce il risultato

$$y^2 + 2y = x^2 + 7 \quad (20.5)$$

Si rifletta ora su come scrivere la (20.5) nella forma (14.5).

Questo punto verrà discusso in dettaglio negli esercizi alla fine del paragrafo 7.

L’equazione

$$y' = \left(1 + y^2\right)x$$
$$y(1) = 1 \qquad (21.5)$$

È un ulteriore esempio di equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, la cui soluzione si ottiene come indicato nel seguito

$$\frac{dy}{1+y^2} = xdx \quad (22.5)$$

Dalla relativa integrazione si ha

$$\int_1^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \int_1^x \xi d\xi \quad (23.5)$$

Ossia

$$\arctan(\eta)\,|_1^y = \frac{\xi^2}{2}\,|_1^x \rightarrow$$
$$\arctan(y) - \arctan(1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (24.5)$$

Tenuto conto che $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ si ha

$$\arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (25.5)$$

che risulta essere facilmente invertibile e quindi scrivibile come

$$y = \tan\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (26.5).$$

Per ulteriori esempi si vedano gli esercizi proposti nel seguito.

6. Cenno alla soluzione delle equazioni di Bernoulli

La parte che segue richiederebbe una trattazione pi accurata, sarà però aggiunta e discussa da un punto di vista elementare, solo per ragioni di completezza.

Nei paragrafi precedenti abbiamo girato intorno a varie forme di equazioni differenziali del primo ordine, alcune delle quali omogenee non-lineari, altre a coefficienti non costanti lineari e non. Non abbiamo però considerato il caso di equazioni a coefficienti non costanti non lineari omogenee, come ad esempio

$$y' = k(x)y + \alpha(x)\,y^n$$
$$y(0) = y_0 \qquad (1.6)$$

I metodi fino ad ora sviluppati non sono adeguati per risolvere il problema in questa forma, per cui proveremo ad operare una trasformazione della variabile che ci permetta di ricondurre il problema ad una forma con soluzione nota.

Dividiamo ambo i membri per y^n e otteniamo

$$\frac{y'}{y^n} = k(x)\frac{1}{y^{n-1}} + \alpha(x) \qquad (2.6)$$

e poniamo

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \qquad (3.6)$$

Da cui segue

$$z' = \frac{d}{dx}\left[y^{-(n-1)}\right]$$
$$= -(n-1)\frac{y'}{y^n} \qquad (4.6)$$

e anche

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{1}{1-n}z' \qquad (5.6)$$

Il problema è virtualmente risolto. In virtù della (3.6) e della (5.6) la nostra equazione originale viene riscritta come

$$\frac{1}{1-n}z' = k(x)z + \alpha(x) \qquad (6.6)$$

la cui soluzione è nota, utilizzando infatti l'equazione (26.4) avremo

$$z' = -(n-1)k(x)z - (n-1)\alpha(x)$$
$$z(x) = z_0 e^{K(x)} - (n-1)e^{K(x)}\int_0^x \alpha(\xi)e^{-K(\xi)}d\xi$$
$$K(x) = -(n-1)\int_0^x k(\xi)d\xi \qquad (7.6)$$

Cosicché la soluzione del problema (1.6) risulta essere

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = e^{\frac{K(x)}{1-n}} \sqrt[1-n]{y_0^{1-n} - (n-1)\int_0^x \alpha(\xi) e^{-K(\xi)} d\xi} \quad (8.6)$$

Non entreremo in ulteriori dettagli sull'argomento e questa aggiunta serve solo a fornire, al lettore interessato qualche informazione in più.

7 Commenti e precisazioni

L'espressione "equazione differenziale", utilizzata fino ad ora, copre un campo ben più ampio e avanzato di quello da noi esplorato e costituisce un ramo centrale della Analisi Matematica. Le relative applicazioni nelle scienze applicate sono praticamente sterminate.
Come già detto, si tratta di una equazione in cui l'incognita è una funzione; l'appellativo differenziale indica, che essendo presente almeno una derivata, il calcolo differenziale è l'elemento dirimente per la ricerca delle soluzioni è il calcolo differenziale.
Nel corso di queste lezioni ci occuperemo principalmente di ***equazioni differenziali ordinarie (ode)***, in cui la funzione è definita in termini di una sola variabile ($y = y(x)$).
Il caso più generale in cui l'incognita è definita in termini di più variabili ($z = z(x, y)$) riguarda le ***equazioni differenziali alle derivate parziali (pde)***[3],cui daremo solo un cenno nella parte conclusiva delle lezioni.
Abbiamo anche sottolineato che l'ordine di una equazione differenziale è legato al massimo ordine di derivazione della funzione incognita, presente nell'equazione stessa. Nel corso di questa prima parte di lezioni, abbiamo trattato solo equazioni del primo ordine.

Il problema definito dall'equazione

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0 \quad (1.7)$$

si chiama problema di Cauchy.

Ricordiamo che la funzione f è assunta essere una funzione reale definita in un sottoinsieme $E \subseteq R^2$.

Il problema (1.7) ha una soluzione $y(x)$ nell'intervallo $I \subseteq R$ se le seguenti condizioni sono verificate

a) La funzione y è derivabile (e continua) in ogni punto $x \in I$
b) In corrispondenza di ogni punto $x \in I$ si ha $(x, y(x)) \in E$

[3] Dove ***ode*** e ***pde*** stanno rispettivamente per ***"ordinary- differential -equations"*** and "***partial-differential-equations".***

c) In corrispondenza di ogni punto $x \in I$ si ha $(x, y'(x)) \in E$

Il problema della esistenza e unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy, come definito in precedenza, è una delle questioni centrali della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Toccheremo brevemente questi problemi nel seguito. Cominceremo a discutere il problema della unicità sulla base di un esempio specifico, ovvero la ricerca della soluzione della seguente equazione differenziale.

$$y' = \frac{4x^3}{y},$$
$$y(0) = 2 \quad (2.7)$$

Che può essere ottenuta come segue

$$\int_2^y \eta d\eta = 4\int_0^x \xi^3 d\xi \quad (3.7)$$

Ovvero

$$y^2 = 2x^4 + 4 \quad (4.7)$$

Da cui si avrebbe una ambiguità di segno perché $y = \pm\sqrt{2x^4 + 4}$, scartiamo il segno negativo perché la condizione ($y(0) = 2$) impone il segno +. In conclusione la soluzione è (Si veda la Fig. 4)

$$y(x) = \sqrt{2x^4 + 4} \quad (5.7)$$

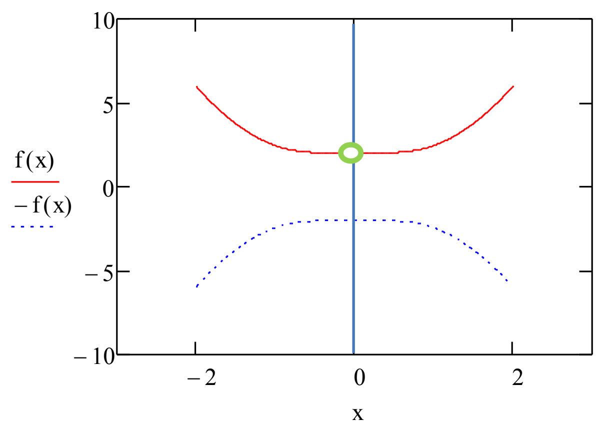


Fig. 4

Grafico della soluzione del problema (2.7) (linea continua)

Grafico della soluzione scartata (linea tratteggiata).

Il punto indicato con il tondino rappresenta la condizione iniziale

Esiste (perché l'abbiamo trovata) ed è unica, in virtù del ragionamento precedente.

Evidentemente, la conclusione cui siamo pervenuti è semplicemente un caso particolare, per cui proveremo a trarre conseguenze più generali.

Nel prosieguo faremo riferimento al problema di Cauchy (1.7) in cui la f è una funzione di due variabili definita come $f: E \subseteq R^2 \to R$

Prima di continuare,facciamo una distinzione tra soluzioni locali e globali.

La soluzione del problema di Cauchy del primo ordine (1.7) si dice ***locale***, se sono valide le condizioni a)-c) discusse in precedenza.

Vale allora il seguente Teorema di esistenza ed unicità di una soluzione locale del problema.

Se la funzione $f(x,y)$ è continua in E, esistono allora un $h>0$ ed una funzione $y:]x_0-h, x_0+h[\to R$ (soluzione del problema (1.7)) se, inoltre esiste ed è continua la derivata di f rispetto a y, allora la soluzione è unica.

Si dice ***globale*** una soluzione y del problema (9.5) quando definito un intervallo $]a,b[$ (che non escluda $a=-\infty, b=+\infty$) $f:]a,b[\times R \to R$ e $x_0 \in]a,b[$.

Il Teorema di esistenza e unicità di una soluzione globale può essere formulato come segue.

Se $f:]a,b[\times R \to R$ è continua e limitata, se $\frac{\partial}{\partial y} f:]a,b[\times R \to R$ [4]è continua e limitata allora esiste una ed una sola soluzione globale $y:]a,b[\to R$ del problema (6.1).
Si consideri pertanto il seguente problema

$$y' = f(x,y) = \frac{y}{1+y^2}, y(x_0) = y_0 \quad (6.7)$$

Se ne cerchi la soluzione e si dimostri che è unica e globale.

---

[4] Discuteremo nel seguito le derivate parziali, qui intendiamo $\frac{\partial}{\partial y} f$ la derivata della funzione f rispetto a y tenendo x costante.

Evidentemente l'eq. (6.7) è risolvibile con il metodo della separazione di variabili, infatti

$$\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{\eta}+\eta\right)d\eta = x - x_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)+\left(\frac{y^2-y_0^2}{2}\right) = x - x_0 \quad (7.6)$$

La forma esplicita della soluzione (7.6) non è facilmente ottenibile, per cui abbiamo proceduto alla relativa ricerca utilizzando un metodo numerico, il risultato è mostrato nella Fig. (5), dove abbiamo riportato la soluzione per due condizioni iniziali diverse. Notiamo che ognuna delle soluzioni è "unica", nel senso che non si ravvisano punti di sovrapposizione tra le due curve.

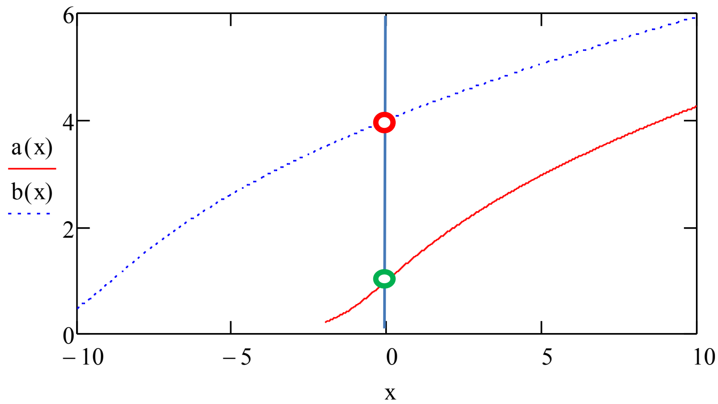


Fig. 5

Rappresentazione grafica della soluzione (7.6) per condizioni iniziali diverse (linea continua $y_0 = 1, x_0 = 0$***, linea tratteggiata*** $y_0 = 4, x_0 = 0$***), i punti indicati con il tondino rappresentano le condizioni iniziali***

In merito alla dimostrazione dell'unicità e globalità della soluzione basterà notare che la funzione $f(x,y)$ è globalmente continua (in tutto $R^2 = R \times R$), inoltre è derivabile in y e si ha

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{1-y^2}{\left(1+y^2\right)^2}\right| \le 1$$

Le condizioni del teorema sono verificate e pertanto si può affermare che la soluzione trovata è unica e globale.

Esercizi proposti

1) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\alpha t} + v_L(1 - e^{-\alpha t})$$
$$s(0) = s_0$$

(R. $s(t) = \frac{v_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + v_L\left(t - \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}\right) + s_0$)

2) $$(1 + x^2)y' = y^2$$
$$y(1) = \frac{3}{4}$$

(R. $y = \frac{3}{4}\frac{1}{1 - \frac{3}{4}\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{4}\right)}$)

3) $$y' = x\tan(y)$$
$$y(0) = \frac{1}{2}\pi$$

(R. $y = \arcsin\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$)

4) $$y' = \frac{x}{(x-1)^2}y$$
$$y(2) = 1$$

(R. $y = (x-1)e^{\frac{x-2}{x-1}}$)

La soluzione dell'esercizio 3) richiede qualche commento, che sarà presentato durante il corso della lezione.

5) $$y' = -y(y+1)x$$
$$y(0) = b$$

(R. $y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1 + \frac{1}{b} - e^{-\frac{x^2}{2}}}$)

Discutere le soluzioni in corrispondenza di $b = 0, -1$.

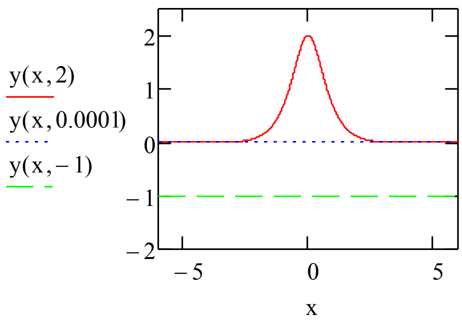


Fig. 6

Rappresentazione grafica della soluzione del problema proposta nell'esercizio 5 5) in corrispondenza di b=2 (linea continua) b=0 (linea punteggiata) e b=-1 (linea tratteggiata). Negli ultimi due casi la soluzione è data da y=0 e y=-1 ***tutte e tre le soluzioni sono uniche e globali***

$$y' = \frac{2x}{y\,e^{y}}$$

6) $y(1) = 3$

(R. $e^{y(x)}(y(x)-1) - 2e^{3} = x^{2} - 1$)

Commentare in che cosa si differenzia la soluzione di questo esercizio dagli altri.

7) Si consideri la soluzione (20.5) della eq. (19.5) e se ne scriva la soluzione esplicita

(R. $y(x) = -1 + \sqrt{x^{2}+8}$

Si ricordi che la soluzione in forma implicita è data da $y^{2} + 2y = x^{2} + 7$

La soluzione esplicita si ottiene risolvendo l'equazione di secondo grado in y, ottenendo

$$y = -1 \pm \sqrt{x^{2}+8}$$

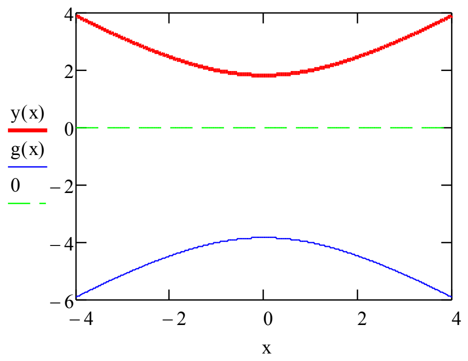


Fig. 7

Rami di iperbole rappresentanti la soluzione del problema di Cauchy (19.5).

Il punto indicato con il tondino sul ramo superiore rappresenta la condizione iniziale

nella Fig. 5 vengono riportati i due rami di iperbole, rappresentati dalla funzione implicita soluzione della nostra equazione, evidentemente poiché $y(-1)=2$ la soluzione da scegliere è quella con il segno positivo).

8) Si consideri l'equazione

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$y(x_0) = y_0$$

e se ne cerchi una soluzione.

(R. Si ponga

$$y(x) = x\,u(x)$$

Così da ottenere

$$y'(x) = u(x) + xu'(x)$$

In maniera tale che

$$u + xu' = f(u)$$
$$u(x_0) = \frac{y(x_0)}{x_0}$$

Che è una equazioni a variabili separabili, per cui

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$
$$\int_{\frac{y(x_0)}{x_0}}^{u}\frac{d\upsilon}{f(\upsilon)-\upsilon}=\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

9) Si utilizzi il metodo illustrato in precedenza per risolvere l'equazione

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)+\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$y(1)=2$$

(R. $y(x)=x\arcsin(kx)$)

8 Equazioni del secondo ordine

In questo paragrafo e nei prossimi ci occuperemo di equazioni differenziali del secondo ordine, ovvero di equazioni del tipo

$$y''=f(x,y,y')$$
$$y(x_0)=y_0$$
$$y(x_0)'=y_0'$$

dove il doppio apice deve intendersi come

$$F(x)''=\frac{d^2}{dx^2}F(x) \qquad (1.8)$$

Discuteremo, nel paragrafo conclusivo, le condizioni cui deve soddisfare la funzione $f(x,y,y')$ perché la (1.8) ammetta soluzioni. Per il momento ci limitiamo ad osservare

a) Se $f(x,y,y')=0$, la soluzione è ottenibile notando che

$$y''=0\rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right)=0$$
$$y(x_0)=y_0$$
$$y(x_0)'=y_0' \qquad (2.8)$$

Integrando una prima volta otteniamo

$$\frac{d}{dx}y=y_0' \quad (3.8)$$

L'equazione precedente è semplicemente una del primo ordine

$y = y_0' x + y_0$ (4.8)

b) Se $f(x, y, y') = k$ (con k costante) applicando le stesso criterio precedente si ha

$$y'' = k$$
$$y' = kx + y_0'$$
$$y(x) = \frac{1}{2} kx^2 + y_0' x + y_0 \quad (5.8)$$

c) Se $f(x, y, y') = f(x)$ si generalizzano le soluzioni precedenti come

$$y'' = f(x, y, y') \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) = f(x) \rightarrow$$
$$\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) = \int_0^x f(\xi) d\xi + y_0' \rightarrow$$
$$y(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta) d\eta + y_0' x + y_0 \qquad (6.8)$$

Consideriamo ora il caso $f(x, y, y') \propto y$. Nel Capitolo precedente abbiamo sottolineato l'esistenza di equazioni differenziali del secondo ordine, del tipo

$$y'' = \kappa^2 y$$
$$y'' = -\omega^2 y \quad (7.8)$$

Sappiamo che le funzioni iperboliche costituiscono una possibile soluzione della prima e quelle circolari lo sono della seconda.

Prendendo in considerazione la prima delle eq. (7.8), non possiamo concludere se la soluzione della prima sia fornita da un coseno o un seno iperbolico. Abbiamo infatti che

$$\cosh(x)|_{x=0} = 1$$
$$\frac{d}{dx} \cosh(x)|_{x=0} = 0 \quad (8.8)$$

In assenza di una precisazione sul comportamento della derivata prima (almeno in un punto), non possiamo risolvere l'ambiguità. Può dunque venirci il sospetto che per determinare la soluzione di una equazione del secondo ordine del tipo (6.8) abbiamo bisogno di più di una condizione iniziale.

Facciamo pertanto l'ipotesi che equazioni del tipo precedente siano risolubili tramite una funzione di prova

$y = e^{\lambda x}$ (9.8)

Il nostro problema è di nuovo quello di determinare la costante λ affinché l'equazione sia compatibile con le equazioni di partenza (7.8). Inserendo la soluzione di prova nella prima delle (7.8) avremo

$\lambda^2 = \kappa^2$ (10.8)

Una equazione algebrica di secondo grado che ammette due soluzioni, ovvero

$\lambda = \pm\kappa$ (11.8)

E' ora evidente che le soluzioni sono due

$y_1 = e^{-\kappa x}, y_2 = e^{\kappa x}$ (12.8)

entrambe soddisfano l'equazione di partenza, per cui ammetteremo che la soluzione è fornita da una combinazione lineare delle (12.8), ovvero

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \\ &= c_1 e^{\kappa x} + c_2 e^{-\kappa x} \end{aligned} \qquad (13.8)$$

Dove $c_{1,2}$ sono due costanti che si determineremo, imponendo due specifiche condizioni iniziali. Il problema correttamente posto va dunque definito come segue

$$\begin{aligned} &y(x)'' = \kappa^2 y(x) \\ &y(0) = y_0 \\ &y'(0) = y'_0 \end{aligned} \qquad (14.8)$$

Imponendo queste condizioni avremo

$$\begin{aligned} &c_1 + c_2 = y_0 \\ &\kappa(c_1 - c_2) = y'_0 \end{aligned} \quad (15.8)$$

Le costanti iniziali del nostro problema sono dunque la soluzione del sistema algebrico di primo grado (15.8), ovvero

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{1}{\kappa} y'_0 \right) \\ c_2 &= \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{1}{\kappa} y'_0 \right) \end{aligned} \quad (16.8)$$

Inserite le relazioni precedenti nella soluzione (13.8), otteniamo

$$y(x) = \frac{y_0}{2}\left(e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}\right) + \frac{y'_0}{2\kappa}\left(e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}\right) \quad (17.8)$$

Che ci permette infine di concludere

$$y(x) = y_0 \cosh(\kappa x) + \frac{y'_0}{\kappa}\sinh(\kappa x) \quad (18.8).$$

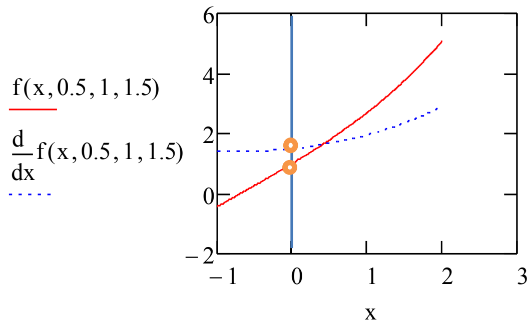


Fig. 8

Grafico della soluzione del problema (8.8) (linea continua)

E grafico della sua derivata per $\kappa = 0.5, y(0) = 1, y'(0) = 1.5$

La soluzione precedente contiene implicitamente quella relativa alla seconda delle (1.8), che correttamente andrebbe formulato come

$$\begin{aligned} &y'' = -\omega^2 y, \\ &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y'_0 \end{aligned} \quad (19.8)$$

basterà infatti operare la seguente sostituzione $\kappa \to i\omega$ nella equazione (12.8), cosicché

$$y(x) = y_0 \cosh(i\omega x) + \frac{y'_0}{i\omega}\sinh(i\omega x) \quad (20.8)$$

Se si utilizzano le relazioni discusse nel Capitolo I

$$\begin{aligned} &\cosh(i\omega x) = \cos(\omega x) \\ &\sinh(i\omega x) = i\sin(\omega x) \end{aligned} \quad (21.8)$$

possiamo concludere che la soluzione del secondo problema in (7.8) è

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{y'_0}{\omega} \sin(\omega x) \quad (22.8)$$

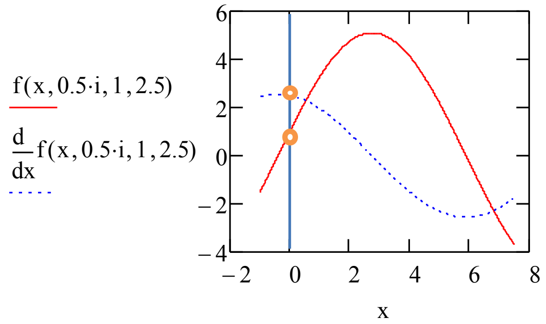


Fig. 9

Grafico della soluzione del problema (8.8) (linea continua)

e grafico della sua derivata per $\omega = 0.5, y(0) = 1, y'(0) = 2.5$

Un ulteriore esempio è fornito da una funzione $f(x, y, y') \propto y + \beta y'$, consideriamo pertanto l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\begin{aligned} & y(x)'' + \gamma\, y(x)' + \omega^2 y(x) = 0 \\ & y(x_0) = y_0 \\ & y'(x_0) = y'_0 \end{aligned} \quad (23.8)$$

La tecnica di soluzione non è diversa da quella affrontata in precedenza. Assumeremo la stessa funzione di prova e notiamo che in questo caso il parametro λ è definito dalla seguente equazione algebrica di secondo grado

$$\lambda^2 + \gamma\, \lambda + \omega^2 = 0 \quad (24.8)$$

detta ***equazione caratteristica (e.c.)*** del problema (23.8). Le radici della e. c. sono

$$\begin{aligned} & \lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \\ & \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \\ & \Delta = \gamma^2 - 4\omega^2 \end{aligned} \quad (25.8)$$

avremo pertanto 3 possibilità

a) $\Delta < 0$

$$y(x) = e^{-\frac{\gamma}{2}x}\left(c_1 e^{i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x} + c_2 e^{-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x}\right) \quad (26.8)$$

Riscrivibile, tramite le formule di Eulero come

$$y(x) = e^{-\frac{\gamma}{2}x}\left((c_1 + c_2)\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right) + i(c_1 - c_2)\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)\right) \quad (27.8)$$

e le costanti $c_{1,2}$ sono derivabili dalle condizioni iniziali che forniscono le identità

$$y_0 = c_1 + c_2$$
$$y_0' = -\frac{\gamma}{2}(c_1 + c_2) + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}(c_1 - c_2) \quad (28.8)$$

che, unitamente alla eq. (28.8), danno la soluzione del problema (23.8) nella forma

$$y(x) = e^{-\frac{\gamma}{2}x}\left\{y_o\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right) + \left(y_0' + \frac{\gamma}{2}y_0\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)}{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}}\right]\right\} \quad (29.8).$$

Nella Figura (10) viene riportato l'andamento della soluzione (29.8) e della sua derivata prima.

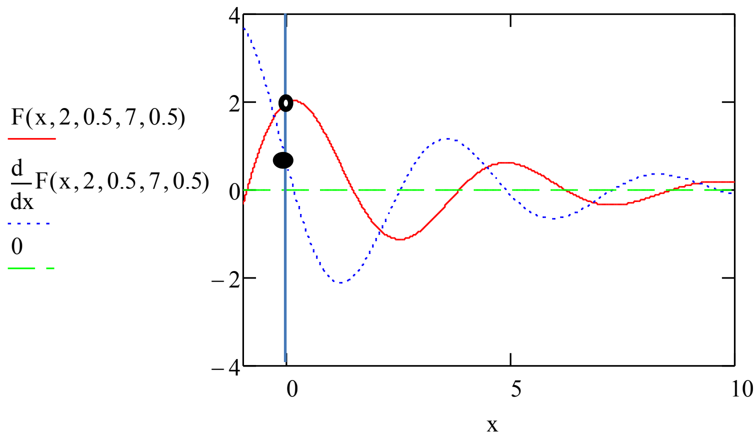


Fig. (10)

Andamento delle soluzione (29.8) in funzione della variabile x (linea continua)

e della sua derivata (linea tratteggiata) per ($y_o = 2, y_0' = 0.5, \gamma = 0.5, \omega = 1.346$)

Il grafico mostra un andamento oscillatorio smorzato, il cui significato sarà discusso nel seguito.

b) $\Delta = 0$

In questo caso dalla eq. (29.8) , sostituendo $\Delta = 0$ e utilizzando il limite notevole nella parentesi quadra, la soluzione precedente si riduce a

$$y(x) = e^{-\frac{\gamma}{2}x}\left\{ y_o + \left(y_0' + \frac{\gamma}{2} y_0 \right) x \right\} \quad (30.8)$$

c) $\Delta > 0$

La soluzione della (23.8) si ottiene sostituendo nella (29.8) le funzioni iperboliche a quelle circolari, ovvero

$$y(x) = e^{-\frac{\gamma}{2}x}\left\{ y_o \cosh\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} x \right) + \left(y_0' + \frac{\gamma}{2} y_0 \right) \left[\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} x \right)}{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}} \right] \right\} \quad (31.8)$$

Nei prossimi paragrafi discuteremo i risultati fino ad ora ottenuti nell’ambito di applicazioni a problemi di natura fisica e ingegneristica.

Prima di procedere oltre, consideriamo il seguente esempio

$$\begin{aligned} &y'' + \alpha^2 y = k \\ &y'(0) = y_0' \\ &y(0) = y_0 \end{aligned} \quad (32.8)$$

e, per la ricerca della relativa soluzione, utilizziamola seguente trasformazione

$$\begin{aligned} &\bar{y}'' + \omega^2 \bar{y} = 0 \\ &\bar{y} = y - \frac{k}{\omega^2} \\ &\bar{y}_0 = y_0 - \frac{k}{\omega^2} \end{aligned} \quad (33.8)$$

non dissimile da quanto già fatto nel caso delle equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti.

La soluzione della (33.8) è, pertanto

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_0 \cos(\omega x) + \frac{\bar{y}'_0}{\omega} \sin(\omega x) \quad (34.8)$$

che, esplicitata per la variabile originale, fornisce il risultato

$$y(x) = y_0 \cos(\omega x) + \frac{y'_0}{\omega} \sin(\omega x) + \frac{k}{\omega^2}(1 - \cos(\omega x)) \quad (35.8)$$

E' il caso di notare che per $\omega \to 0$ la precedente soluzione fornisce il risultato

$$\lim_{\omega \to 0} y(x) = y_0 + y_0' x + \frac{1}{2} k x^2 \quad (36.8)$$

che è la soluzione dell'equazione del secondo ordine $y'' = k$ con le condizioni iniziali riportate in eq. (32.8).

9. Elementi di calcolo operazionale

In questo paragrafo tratteremo il problema di equazioni differenziali del secondo ordine (e anche superiori) utilizzando un metodo detto "operazionale" che sarà illustrato sulla base di un esempio, relativo alla soluzione del seguente problema del secondo ordine

L'equazione

$$\begin{aligned} & y'' + \alpha\, y' = f(x) \\ & y(0) = y_0 \\ & y'(0) = y_0' \end{aligned} \quad (1.9)$$

Utilizzando la notazione $y' = \left(\frac{d}{dx}\right) y,\ y'' = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y, \ldots$, notiamo che, trattando l'operatore derivata come una ordinaria quantità algebrica, è possibile scrivere che

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}\right), \\ & \left(\frac{d}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^2, \\ & \ldots. \\ & \left(\frac{d}{dx}\right)^{p+q} = \left(\frac{d}{dx}\right)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^q \end{aligned} \quad (2.9)$$

Consideriamo ora l'eq. (1.9) e notiamo che è possibile mettere una derivata a fattor comune e scrivere il lato sinistro della prima delle (1.9) come

$$y''+\alpha\, y'=\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}y\right) \quad (3.9)$$

ed infine

$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}y\right)=f(x) \quad (4.9).$$

L'equazione precedente può essere scomposta in due parti

$$\frac{d}{dx}y=z$$
$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)z=f(x) \quad (5.9)$$

La seconda delle quali è una equazione differenziale del primo ordine, con condizione iniziale

$$z(0)=y_0^{'} \quad (6.9)$$

La soluzione si ottiene dunque facilmente come

$$z(x)=y_0^{'}e^{-\alpha x}+e^{-\alpha x}F(x)$$
$$F(x)=\int_0^x e^{\alpha\xi}f(\xi)d\xi \quad (7.9).$$

Tenuto conto della prima delle equazioni (1.9) otteniamo facilmente la soluzione del nostro problema in termini della funzione $y(x)$, semplicemente data da

$$y(x)=y_0+\int_0^x z(\xi')d\xi' \quad (8.9°)$$

ovvero, in termini espliciti

$$y(x)=y_0+y_0^{'}\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}+\int_0^x e^{-\alpha\xi}F(\xi)d\xi \quad (8.9b).$$

Scriviamo ora la nostra equazione di partenza come

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)y\right]=f(x) \quad (9.9)$$

e poniamo

$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)y=\eta$$
$$\frac{d}{dx}\eta=f(x) \qquad (10.9)$$

Evidentemente la soluzione del problema viene fornita integrando direttamente la seconda delle (10.9) come

$$\eta=\eta_0+\int_0^x f(\xi)d\xi$$
$$\eta_0=y_0^{'}+\alpha\, y_0 \qquad (11.9)$$

e utilizzandola per ottenere la soluzione della prima, ovvero

$$y(x)=y_0e^{-\alpha x}+e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha\xi}\eta(\xi)d\xi \qquad (12.9)$$

che è lo stesso risultato riportato in (8.9b), ma scritto in maniera diversa.

Consideriamo ora l'equazione (19.8) e riscriviamola utilizzando il metodo appena illustrato, ovvero

$$\left(\frac{d}{dx}+i\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-i\alpha\right)y=0 \qquad (13.9)$$

Se si pone

$$\left(\frac{d}{dx}-i\alpha\right)y=z \qquad (14.9)$$

Si ottiene anche

$$\left(\frac{d}{dx}+i\alpha\right)z=0$$
$$z_0=y_0^{'}-i\alpha y_0 \qquad (15.9)$$

La soluzione della precedente equazione è ovviamente data da

$$z(x)=z_0e^{-i\alpha x} \qquad (16.9)$$

e pertanto

$$\left(\frac{d}{dx}-i\alpha\right)y = z_0 e^{-i\alpha x} \quad (17.9)$$

La cui soluzione è

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 e^{i\alpha x} + e^{i\alpha x} z_0 \int_0^x e^{-2i\alpha\xi} d\xi = \\
&= y_0 e^{i\alpha x} + z_0 \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} = \\
&= y_0 \cos(\alpha x) + y_0^{'} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \qquad (18.9)
\end{aligned}$$

è evidente che la soluzione (18.9) è la stessa scritta nella (22.8) ma derivata in un diverso contesto formale.

La tecnica del calcolo operazionale utilizzato sin qui offre alcuni vantaggi, che saranno ulteriormente discussi nel prossimo paragrafo e negli esercizi alla fine del capitolo.

10 Equazioni del secondo ordine non omogenee

Alla fine del precedente paragrafo abbiamo presentato un esempio di soluzione di un problema del secondo ordine (a coefficienti costanti e non omogenea). Il problema è stato risolto utilizzando un "trucco", ovvero abbiamo fatto in modo da aggirare il problema stesso, trasformando l'equazione in una corrispondente forma omogenea.

L'equazione

$$\begin{aligned}
&y'' + \alpha^2 y = f(x) \\
&y(0) = y_0 \\
&y'(0) = y_0^{'} \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Applicando il metodo operazionale avremo

$$\left(\frac{d}{dx}+i\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-i\alpha\right)y = f(x) \quad (2.10)$$

Equazione che può essere infine spezzata in due relazione, riportate nel seguito

$$\left(\frac{d}{dx}-i\alpha\right)y=z,$$
$$\left(\frac{d}{dx}+i\alpha\right)z=f(x) \quad (3.10)$$

la seconda delle quali è una differenziale del primo ordine non omogenea, la cui soluzione è

$$y(x)=z_0e^{-i\alpha x}+e^{-i\alpha x}\int_0^x e^{i\alpha\xi}f(\xi)d\xi$$

La quale fornisce, insieme alla prima delle (3.10), la soluzione del problema (1.10) in termini della y, ovvero

$$y(x)=y_h(x)+y_g(x)$$
$$y_h(x)=y_0\cos(\alpha x)+y_0^{'}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$$
$$y_g(x)=e^{i\alpha x}\int_0^x e^{-2i\alpha\xi}F(\xi)d\xi$$
$$F(x)=\int_0^x e^{i\alpha\xi}f(\xi)d\xi \qquad (4.10)$$

Il risultato precedente costituisce la soluzione del problema (1.10) a prescindere dalla specifica forma della funzione nota $f(x)$. Evidentemente la (4.10) consta di due parti tali che

$$y(x)=y_h(x)+y_g(x)$$
$$y_h''(x)=\alpha^2y_h(x)$$
$$y_g''(x)=\alpha^2y_g(x)+f(x) \quad (5.10)$$

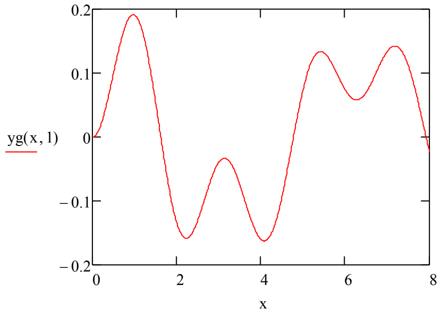
che una volta sommati membro a membro danno

$$\left(y_h(x)+y_g(x)\right)''=\alpha^2(y_h(x)+y_g(x))+f(x) \quad (6.10)$$

Per eccesso di scrupolo, possiamo verificare direttamente come $y_g(x)$ soddisfi la terza delle equazioni (5.10).Tramite riscontro diretto, troviamo

$$y_g'(x)=i\alpha\, y_g(x)+e^{-i\alpha x}F(x)$$
$$y_g''(x)=i\alpha\, y_g'(x)-i\alpha\, e^{-i\alpha x}F(x)+f(x)$$
$$=-\alpha^2y(x)+f(x) \qquad (7.10)$$

Inoltre, nelle Fig. (11) riportiamo il grafico di alcune soluzioni specifiche della eq. (10).



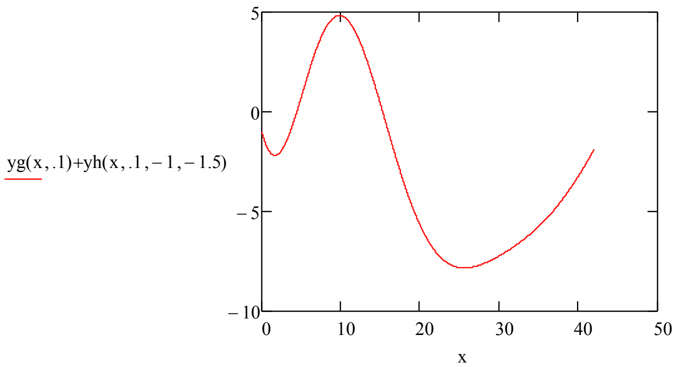


Fig. 11

Grafico delle soluzioni della equazione (1.10)

a) $f(x) = \cos(0.3x)e^{-0.1x}, y_0 = 0, y_0' = 0$

b) $f(x) = \cos(0.5x)e^{-0.1x} y_0 = 0, y_0' = 0$

c) $f(x) = \cos(0.3x)e^{-0.1x} y_0 = -1, y_0' = -1.5$

Supponiamo ora che la $f(x)$ sia semplicemente una costante k, in questo caso si ottiene (si vedano gli esercizi alla fine del capitolo)

$$y_g(x) = \frac{k}{\alpha^2}(1 - \cos(\alpha x))$$

che coincide con la soluzione generale data nella eq. (35.8).

Nel caso in cui $f(x) = x$ abbiamo(si veda nel seguito)

$$y_g(x) = \frac{\alpha x - \sin(\alpha x)}{\alpha^3} \quad (8.10)$$

Evidentemente la possibilità di ottenere una soluzione in forma esplicita dipende da quella di ottenere gli integrali nella equazioni (4.10) tramite funzioni note.

Completiamo ora il quadro introducendo il concetto di integrale particolare, consideriamo pertanto l'equazione

$$y''(x) = x$$
$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = y_0^{'} \quad (9.10)$$

La soluzione è

$$y(x) = y_0 + y_0^{'} x + y_p(x) \quad (10.10)$$

L'integrale generale è dunque fornita della parte omogenea (dipendente dalle condizioni iniziali) e dall'integrale particolare. Quest'ultimo contributo può essere ottenuto facendo l'ipotesi che $y_p(x)$ sia di tipo polinomiale, ovvero

$$y_p(x) = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad (11.10)$$

i coefficienti incogniti A_3, A_2, A_1 si ottengono semplicemente inserendo la (10.10) nella prima delle (9.10) in modo da ottenere $6A_3 x + A_2 = x$

Utilizziamo, a questo punto il metodo del confronto, uguagliando i coefficienti polinomiali del membro di sinistra a quello di destra, così da ottenere le seguenti identità $A_3 = \frac{1}{6}, A_2 = 0$, concludendo dunque che

$$y_p(x) = \frac{1}{6} x^3 \quad (12.10)$$

Gli esercizi che seguono chiariscono come effettivamente funzioni il metodo.

Nel caso dell'equazione

$$y'' + \omega^2 y = x^2 \quad (13.10)$$

L'integrale particolare si trova assumendo che abbia la forma

$$y_p(x) = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad (14.10)$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x} + \left(\frac{(\omega x)^2 - 2}{\omega^4} \right) \quad (15.10)$$

Mentre riguardo a

$$y'' - y' - 2y = 4x^2 \qquad (16.10)$$

Si ottiene

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - (2x^2 - 2x + 3) \qquad (17.10)$$

Esempi che generalizzano quanto discusso fino ad ora, saranno esaminati nel prossimo paragrafo.

11 Equazioni differenziali del secondo ordine non omogenee: discussione generale

Nel paragrafo precedente abbiamo affrontato il problema della ricerca delle soluzioni particolari di equazioni del secondo ordine non omogenee in maniera piuttosto superficiale, in questo affronteremo le cose in modo leggermente più sistematico.

Un esempio che generalizza lo studi dell'equazione (16.10) è la ricerca dell'integrale particolare di

$$\begin{aligned} &ay'' + by' + cy = P_n(x) \\ &P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \end{aligned} \qquad (1.11)$$

dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado generico n.

Per la relativa soluzione procederemo come segue

$$y_p(x) = \begin{array}{c} B_n(x),\ B_n(x) = \sum_{r=0}^{n} A_r x^r, \text{ se } c \neq 0 \\ xB_n(x), \text{se } c = 0, c = 0, b \neq 0 \\ x^2 B_n(x), \text{se } c = b = 0 \end{array} \qquad (2.11)$$

La dimostrazione di quanto riportato in (2.11) è piuttosto semplice è può essere ottenuta per sostituzione diretta.

Una ulteriore generalizzazione viene offerta dall'esempio

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} P_n(x) \qquad (3.11)$$

Il cui integrale particolare può essere scritto come

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} B_n(x), \text{ se } \alpha \text{ non è soluzione della ec associata all'omogenea} \\ x e^{\alpha x} B_n(x), \text{ se } \alpha \text{ è una soluzione semplice della ec associata all'omogenea} \\ x^2 B_n(x), \text{ se } \alpha \text{ non è soluzione doppia della ec associata all'omogenea} \end{cases} \quad (4.11)$$

Consideriamo ora l'esempio l'ulteriore forma generalizzata

$$ay''+by'+cy = e^{\alpha x}\sin(\beta x)P_n(x) \qquad (5.11)$$

Che può essere facilmente ricondotta ai casi precedenti utilizzando le formule di Eulero, ottenendo così

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}\left[\sin(\beta x)C_n(x) + \cos(\beta x)S_n(x)\right], \text{ se } \alpha \pm i\beta \text{ non è soluzione della ec} \\ x e^{\alpha x}\left[\sin(\beta x)C_n(x) + \cos(\beta x)S_n(x)\right], \text{ se } \alpha \pm i\beta \text{ è una soluzione della ec} \end{cases}$$
$$C_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \qquad (6.11)$$

Anche in questo caso la veridicità delle precedenti affermazioni ottenibile per verifica diretta e invitiamo il lettore a considerare i seguenti esercizi

a) Verificare la correttezza delle seguenti forme di soluzioni particolari di equazioni del secondo ordine del tipo

$$ay''+by'+cy = g(x)$$

$g(x)$	y_p
1. 1	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\sin 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
6. $\cos 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x}\sin 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x$
11. $5x^2\sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Ex^2 + Fx + G)\sin 4x$
12. $xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x}\cos 4x + (Cx + E)e^{3x}\sin 4x$

b) Trovare le soluzioni particolari per le seguenti equazioni del secondo ordine non omogenee

1) $$y''-3y'-4y=3e^{2t}$$
$$R.\,y_p(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}$$

2) $$y''-3y'-4y=2\sin(t)$$
$$R.y_p(t)=-\frac{5}{17}\sin(t)+\frac{3}{17}\cos(t)$$

L'esercizio (2) può essere risolto ponendo

$$y_p(t)=A\cos(t)+B\sin(t)$$

E notando che, una volta inserita nella equazione originale, fornisce

$$(-A+3B-4A)\sin(t)+(-B-3A-4B)\sin(t)=2\sin(t)\rightarrow$$
$$\rightarrow -5A+3B=2,5B+3A=0$$

3) Dimostrare che se

$y_{p,1}(t)$ e $y_{p,2}(t)$ sono soluzioni particolari delle equazioni

$$ay''+by'+cy=g_1(t)$$
$$ay''+by'+cy=g_2(t)$$

allora $y_{p,1}(t)+y_{p,2}(t)$ è soluzione particolare di

$$ay''+by'+cy=g_1(t)+g_2(t)$$

4) Si trovi la soluzioni particolare dell'equazione

$$y''-4y'-12y=g_1(t)+g_2(t)+g_3(t)$$
$$g_1(t)=3e^{5t},g_2(t)=\sin(2t),g_3(t)=te^{4t}$$
$$R.\ Y_p(t)=y_{p,1}(t)+y_{p,2}(t)+y_{p,3}(t)$$
$$y_{p,1}(t)=-\frac{3}{7}e^{5t},y_{p,2}(t)=\frac{1}{40}\cos(2t)-\frac{1}{20}\sin(2t),y_{p,3}(t)=-\frac{1}{36}(3t+1)e^{4t}$$

5) Si trovi la soluzione generale della seguente equazione non omogenea

$$y''-4y'-12y=3e^{5t}$$
$$y(0)=\frac{18}{7},y'(0)=-\frac{1}{7}$$

Si noti che in questo caso la soluzione generale è data dalla somma dei termini omogeneo e particolare, ovvero

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{6t}-\frac{3}{7}e^{5t}$$

i coefficienti $c_{1,2}$ sono calcolati tramite le condizioni iniziali, che forniscono le seguenti identità

$$c_1+c_2-\frac{3}{7}=\frac{18}{7},$$
$$6c_2-2c_1-\frac{15}{7}=-\frac{1}{7}$$

12 Equazioni differenziali di ordine superiore al secondo non omogenee

Anche se non detto esplicitamente una equazione differenziale a coefficienti costanti di ordine superiore al secondo può essere risolta utilizzando il metodo della equazione caratteristica. Consideriamo ad esempio l'equazione del quarto ordine

$$y''''(x)-a^2y(x)''+b^4y(x)=0 \quad (1.12)$$

La cui equazione caratteristica è

$$\lambda^4-a^2\lambda^2+b^4=0 \quad (2.12)$$

L'equazione precedente ammette quattro radici distinte

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{\Delta}}{2}}$$
$$\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{\Delta}}{2}}$$
$$\Delta=a^4-4b^2>0 \quad (3.12)$$

e la soluzione della (1.12) è semplicemente

$$y(x)=(c_1+c_2)\cosh\left(\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{\Delta}}{2}}\right)+(c_1-c_2)\sinh\left(\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{\Delta}}{2}}\right)$$
$$+(c_3+c_4)\cosh\left(\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{\Delta}}{2}}\right)+(c_3-c_4)\sinh\left(\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{\Delta}}{2}}\right) \quad (4.12)$$

Come già sottolineato, l'equazione caratteristica del nostro problema ha tutte radici distinte, le cose cambiano se le radici non sono distinte e hanno una certa molteplicità. Consideriamo pertanto l'equazione

$y''''(x)+a^2 y(x)''=0$ (5.12)

La relativa equazione caratteristica ammette le seguenti soluzioni

$\lambda_{1,2}=0, \lambda_{3,4}=\pm ia$ (6.12)

Le prime hanno molteplicità 2 in questo caso la soluzione si scrive

$y(x)=c_1+c_2 x+(c_3+c_4)\cos(ax)+(c_3-c_4)\sin(ax)$ (7.12)

L'equazione differenziale di ordine r

$\sum_{s=0}^{r} a_s y^{(s)}(x)=0$ (8.12)

Ammette l'equazione caratteristica

$\sum_{s=0}^{r} a_s \lambda^s=0$ (9.12)

con r radici. Se una di queste (λ_0) ha molteplicità m, la soluzione della (7.11)si scrive come

$y(x)=\sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k e^{\lambda_0 x}+\sum_{s=m}^{r} c_s e^{\lambda_s x}$ (10.11)

Torniamo ora al problema (18.10) lasciato in sospeso e notiamo che la relativa soluzione si ottiene utilizzando il metodo del confronto, ovvero assumendo come soluzione particolare la funzione

$y_p(x)=Q(x)e^{\alpha x}$ (11.11)

Dove $Q(x)$è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$o di un grado k-volte maggiore se α radice con molteplicità k della equazione caratteristica.

La stesso tipo di soluzione particolare vale per equazioni di ordine superiore al secondo, del tipo

$\sum_{s=0}^{r} a_s y^{(s)}(x)=Q(x)e^{\alpha x}$ (12.11)

Ulteriori commenti e precisazioni si trovano negli esercizi alla fine del capitolo.

Un quadro sinottico relativo alle soluzioni dei vari possibili casi di equazioni differenziali viene riportato nella seguente tabella

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI DEL SECONDO ORDINE

$$y'' + a\,y' + by = f(x) \qquad (*)$$

L'integrale generale di (*) ha la forma $y(x) = z(x) + \varphi(x)$, dove $z(x)$ e' l'integrale generale della omogenea associata, mentre $\varphi(x)$ e' UNA soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Equazione caratteristica dell'omogenea associata: $\lambda^2+a\lambda+b=0$, con soluzioni λ_1 , λ_2

z(x)	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \in$ **R**	$z(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
	$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \in$ **R**	$z(x) = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2x)$
	$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$z(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

Come trovare $\varphi(x)$ (ossia determinare i valori delle costanti) col metodo di somiglianza

Se $f(x)$ = polinomio di grado n

Se $\alpha=0$ NON è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$, cioè $b\neq0$	$\varphi(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ \ldots$
Se $\alpha=0$ è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ di molteplicità 1, cioè $b=0 \;\; a\neq0$	$\varphi(x) = x(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ \ldots$
Se $\alpha=0$ è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ di molteplicità 2, cioè $b=a=0$	$\varphi(x) = x^2\,(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ \ldots$

Se $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, con $P(x)$ = polinomio di grado n

Se α NON è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$	$\varphi(x) = e^{\alpha x}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)$
Se α è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ di molteplicità r	$\varphi(x) = x^re^{\alpha x}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)$

Se $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x$, con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi di grado rispettivamente m, n ≥ 0

Se $\alpha+i\beta$ NON è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$	$\varphi(x) = e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi di grado non superiore al più grande fra i gradi di $P(x)$ e $Q(X)$
Se $\alpha+i\beta$ è soluzione di $\lambda^2+a\lambda+b=0$	$\varphi(x) = x[e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)]$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi di grado non superiore al più grande fra i gradi di $P(x)$ e $Q(X)$

Se $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Sovrapposizione delle soluzioni
Applico 2 volte uno dei procedimenti precedenti, una volta per $f(x) = f_1(x)$ e ottengo $\varphi_1(x)$; poi lo applico a $f(x) = f_2(x)$ e ottengo $\varphi_2(x)$. La soluzione cercata sarà quindi $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$

13 Utilizzo delle equazioni differenziali per il calcolo di integrali Impropri

In questo paragrafo discuteremo alcuni esempi che illustrano come le equazioni differenziali siano uno strumento utile anche per lo studio di alcune forme di integrali. Dato il legame stretto tra equazioni differenziali ed integrali la cosa non è affatto sorprendente, ma il metodo che esporremo è, in alcuni caso, estremamente efficace nel semplificare problemi apparentemente complessi.

Consideriamo, dunque, il seguente integrale

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(at^2+\frac{b}{t^2}\right)}dt \qquad (1.13)$$

calcoliamo la derivata di ambo i membri della (1.13) rispetto a *b*, ottenendo

$$\frac{d}{db}I(a,b)=-\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-\left(at^2+\frac{b}{t^2}\right)}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-\left(at^2+\frac{b}{t^2}\right)}d\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (2.13)$$

Conviene ora cambiare la variabile di integrazione, ponendo

$$t=\sqrt{\frac{b}{a}}\sigma^{-1} \qquad (3.13)$$

In modo tale che la relazione precedente possa essere riscritta come

$$\frac{d}{db}I(a,b)=-\sqrt{\frac{a}{b}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\left(\frac{b}{\sigma^2}+a\sigma^2\right)}d\sigma \qquad (4.13)$$

Che confrontata con la (1.13), fornisce l’ulteriore identità

$$\frac{d}{db}I(a,b)=-\sqrt{\frac{a}{b}}I(a,b)$$
$$I(a,0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (5.13).$$

Abbiamo, pertanto, ridotto il problema del calcolo dell’integrale (1.13) a quello della ricerca della soluzione di una equazione differenziale del primo ordine. Utilizzando quanto appreso nella prima parte di questo capitolo, la soluzione del problema di Cauchy (5.13) fornisce per l’integrale (1.13) la seguente espressione

$$I(a,b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}} \qquad (6.13)$$

Un secondo esempio viene offerto dal seguente integrale improprio

$$I=\int_{0}^{1}\frac{x-1}{\ln(x)}dx \qquad (7.13)$$

Che può essere ricondotto ad una forma facilmente risolvibile, se riscritto come

$$I(\alpha)=\int_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}-1}{\ln(x)}dx \qquad (8.13)$$

derivando ambo i lati della (8.13) rispetta ad α , tenuto conto che

$$\frac{d}{d\alpha}x^{\alpha} = \ln(x)x^{\alpha} \qquad (9.13)$$

Otteniamo

$$I'(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1},$$
$$I(0) = 0 \qquad (10.13)$$

Ovvero

$$I(\alpha) = \ln(\alpha+1) \qquad (11.13)$$

e pertanto, per quanto riguarda l'integrale originale, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx = \ln(2) \qquad (12.13)$$

La discussione e gli esempi precedenti sono basati sull'utilizzo di integrali dipendenti da un parametro e sulla derivazione, rispetto a tale parametro, sotto il segno di integrale. Qualche chiarimento sulle condizioni d utilizzo della tecnica sono pertanto necessarie.

Le condizioni per la derivabilità sotto il segno di integrale sono precisate dal seguente teorema.

Sia definita la funzione

$$F(t) = \int_c^d f(x,t)dx \qquad (13.13)$$

dove la $f(x,t)$ è una funzione continua per $c \le x \le d, a \le t \le b$, se questa ha derivate continue rispetto sia a x che a t, allora esiste nell'intervallo [a,b], la derivata

$$F'(t) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \qquad (14.13)$$

Dove il simbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ rappresenta la derivata "parziale" della funzione rispetto a x , considerando la x come una costante.

Il concetto di derivata parziale sarà discusso nel prossimo capitolo e non nasconde alcuna operazione particolarmente nuova. Negli esercizi precedenti è stata, infatti, eseguita in maniera naturale, quando è stata effettuata la derivazione rispetto ai parametri b o α.

Il teorema precedente implica l'esistenza di una funzione $g(x)$ integrabile su tutto l'asse reale e tale che

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| < g(x) \qquad (15.13)$$

La precedente relazione fissa un criterio molto semplice per l'applicabilità del metodo. Consideriamo pertanto il calcolo del seguente integrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)} dx \qquad (16.13)$$

che può essere portato a termine utilizzando la seguente forma integrale

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \tan(x))}{\tan(x)} dx$$
$$I(1) = I \qquad (17.13)$$

Che una volta derivata rispetto ad α, fornisce la seguente espressione

$$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left[1+\alpha^2 \tan(x)^2\right]} dx$$

Che dopo la trasformazione di variabile $t = \tan(x)$ diventa

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\left[1+\alpha^2 t^2\right](1+t^2)} dt$$

Possiamo a questo punto affermare che la procedura di derivazione è ammissibile, visto che

$$\left|\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t,\alpha)\right| = \frac{1}{\left[1+\alpha^2 t^2\right](1+t^2)} < \frac{1}{1+t^2} = g(t)$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2}$$

Invitiamo infine il lettore a dimostrare che

$$
\begin{aligned}
&I'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha + 1} \\
&I(0) = 0 \qquad (18.13)
\end{aligned}
$$

Ovvero

$$
I(1) = \frac{\pi}{2} \ln(2) \qquad (19.13)
$$

Nei prossimi paragrafi discuteremo ulteriori esempi di applicazioni, in ambito non strettamente matematico.

14 Applicazioni differenziali del secondo ordine a problemi di Fisica

Il ruolo giocato in Fisica dalle equazioni differenziali del secondo ordine è assolutamente cruciale. Il secondo principio della dinamica, che lega la forza agente su un corpo e la conseguente accelerazione ad esso impressa, si esprime come

$$
m \frac{d^2}{dt^2} s = F \qquad (1.14)
$$

dove m è la massa del corpo, s è il vettore posizione e F la forza applicata.

In Fig. 11 viene mostrata un corpo vincolato ad una molla su cui agisce una forza di ***richiamo.*** La forza in questione agisce sempre in direzione opposta allo spostamento dalla condizione di equilibrio, sia esso un allungamento o un accorciamento.

La legge che regola ***la forza di richiamo elastica*** è nota come legge di Hooke ed è valida per "piccoli" spostamenti dalla condizione di equilibrio e si scrive come

$$
m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx \qquad (2.14)
$$

dove k è detta costante della molla. L'equazione differenziale risultante

$$
\begin{aligned}
&x = -\omega^2 x, f = \frac{d^2}{dt^2} f \\
&x(0) = x_0, x(0) = x_0 \\
&f = \frac{d}{dt} f, f = \frac{d^2}{dt^2} f, f = \frac{d^2}{dt^2} f \ldots \\
&\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

è nota in Fisica come ***equazione dell'oscillatore armonico*** ed è una di quelle cardini della fisica (e non solo). E' inoltre opportuno notare che le dimensioni fisiche di k sono

$$[k]=\left[\frac{F}{L}\right]=\left[\frac{MLT^{-2}}{L}\right]=\left[MT^{-2}\right] \quad (4.14)$$

Pertanto la quantità ω, detta pulsazione ha le dimensioni fisiche fissate dalle seguenti relazioni

$$\left[\frac{k}{m}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[T^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[T^{-1}\right] \quad (5.14)$$

Il cui significato sarà descritto ulteriormente nel seguito.

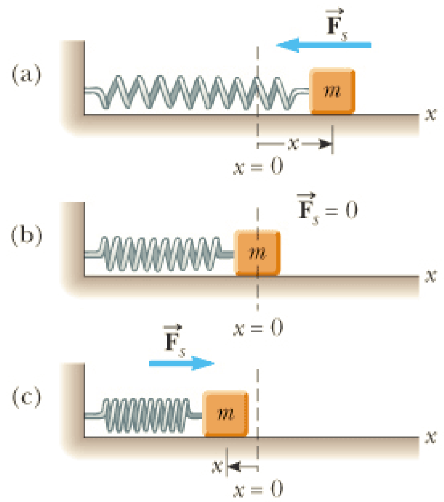


Fig. 11

Illustrazione della legge di Hooke

A parte il contesto diverso in cui abbiamo inserito le nostre considerazioni, il problema matematico è sempre lo stesso e consiste nel cercare le soluzioni, come illustrato in precedenza.

Nella Fig. 12 abbiamo riportato un corpo di massa m vincolato ad una molla sospesa.

L'equazione differenziale che regola il moto si ottiene facilmente tenendo conto del diagramma delle forze, riportato in figura

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks + mg \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s + g \quad (6.14)$$

Si invita il lettore a riflettere sul fatto che la condizione di equilibrio non è $s = 0$, ma

$$s^* = \frac{g}{\omega^2} \quad (7.14)$$

Si discuta il significato della (7.14) alla luce delle trasformazioni (discusse nelle equazioni (33.8).

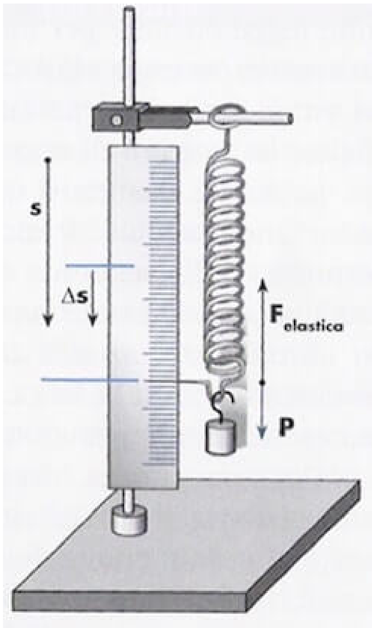


Fig. 12

Corpo materiale appeso ad una molla. La forza di richiamo si oppone al moto diretto verso il basso parallelamente alla forza peso

Nella figura (13) si mostra qualche cosa di simile alla precedente, ovvero un corpo appeso ad una molla con l'aggiunta di una forza di attrito proporzionale alla velocità.

Anche in questo caso le relative equazioni del moto si ottengono facilmente

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks - \alpha\frac{ds}{dt} + mg \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s - \gamma\frac{ds}{dt} + g$$
$$\gamma = \frac{\alpha}{m} \quad (8.14)$$

Il coefficiente γ, con le dimensioni dell'inverso di un tempo, tiene conto dell'effetto di "damping" ovvero della riduzione esponenziali dell'ampiezza del moto a causa dell'effetto di resistenza dell'aria.

Si risolva l'eq. (8.14) e se ne illustri il significato fisico. In base a quanto discusso nei paragrafi precedenti la soluzione del problema è

$$s(t) = s^* + Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) \qquad (9.14)$$

La precedente soluzione è espressa in termini di due costanti arbitrarie, l'ampiezza A e la fase ϕ legate alle condizioni iniziali da

$$s(0) = A\cos(\phi)$$
$$s(0) = -(\gamma\cos(\phi) + \omega\sin(\phi))A \qquad (10.14)$$

e rappresenta un moto oscillatorio smorzato (si veda la Fig. (12))

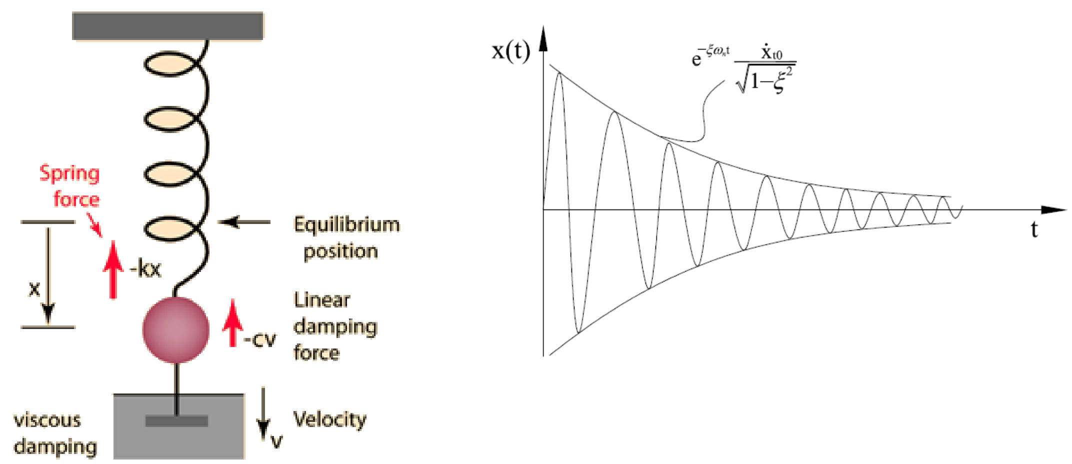


Fig. 13

a) Corpo appeso ad una molla e forza resistente

b) Oscillazioni Smorzate indotte dalla forza di attrito, sul moto di un corpo appeso ad una molla

Prima di concludere questo paragrafo riteniamo utile fare menzione dei meccanismi di risonanza.

Consideriamo la seguente equazione del secondo ordine non omogenea

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}+kx=F_0e^{i\Omega t} \qquad (11.14)$$

Il termine a destra è detto ***forzante armonica***.

Assumeremo che la soluzione del problema (11.14) sia della forma

$$x=Ae^{i\Omega t} \qquad (13.14)$$

La quantità A rappresenta l'ampiezza dell'oscillazione e si ottiene inserendo l'equazione precedente (12.14) nella (11.14)

$$A=\frac{X_0}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2+i\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2}\right)}$$

$$X_0=\frac{F_0}{k},\omega_0=\frac{k}{m},\gamma=\frac{\alpha}{m} \qquad (14.14)$$

È ora opportuno osservare che A è una quantità complessa, che può anche essere riscritta come

$$A=\frac{X_0e^{i\phi}}{\sqrt{\left(1-\sigma^2\right)^2+\left(\lambda\sigma\right)^2}}$$

$$\tan(\phi)=-\frac{\lambda\sigma}{1-\sigma^2}$$

$$\sigma=\frac{\Omega}{\omega_0},\lambda=\frac{\gamma}{\omega_0} \qquad (15.14)$$

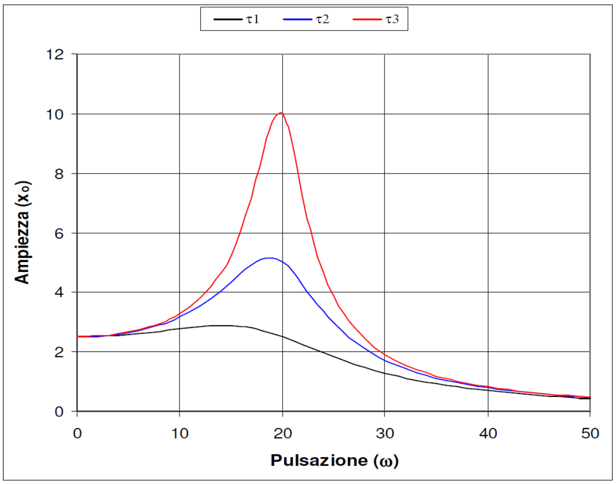
L'ampiezza delle oscillazioni dipende dalla frequenza ***naturale*** ω_0 associata alla soluzione dell'equazione caratteristica dell'omogenea e dal coefficiente di attrito.

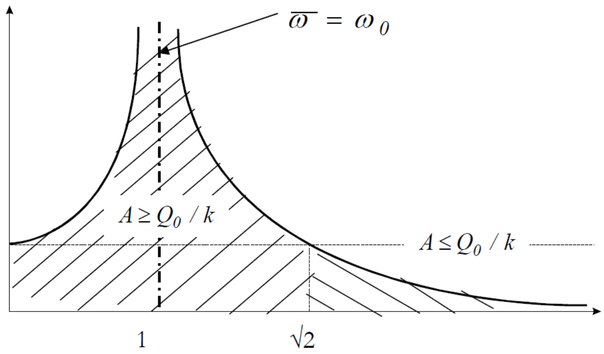
La soluzione del nostro problema, ovvero l'andamento delle oscillazioni indotte dalla forza esterna, può essere finalmente scritto come

$$X=A\sin(\Omega t+\phi)$$

Nella Fig. (14a) riportiamo il modulo dell'ampiezza A in funzione di σ per diversi valori di λ. Il massimo dell'ampiezza si ha per $\Omega\cong\omega_0$ e tende a spostarsi verso valori piccoli di λ (ovvero per basi valori dell'attrito) mentre tende a spostarsi verso $\Omega<\omega_o$

In assenza di attrito l'ampiezza delle oscillazioni in prossimità di $\Omega \cong \omega_0$ può assumere valori molto grandi (tendenti d infinito). Questo fenomeno noto come risonanza ha





Una applicazione importante di quanto appena discusso è quella del sismografo, ovvero di uno strumento utilizzato per la misura della magnitudo di un sisma. Il sistema consta di una massa m appesa ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 posta in un bagno di olio che causa l'effetto di forza di attrito proporzionale alla velocità. Durante una scossa sismica di tipo sussultorio, una accelerazione verticale mette in moto il sistema, che determina una certa oscillazione del pennino che riporta il segnale su un foglio rotante (si veda la Fig. (14).

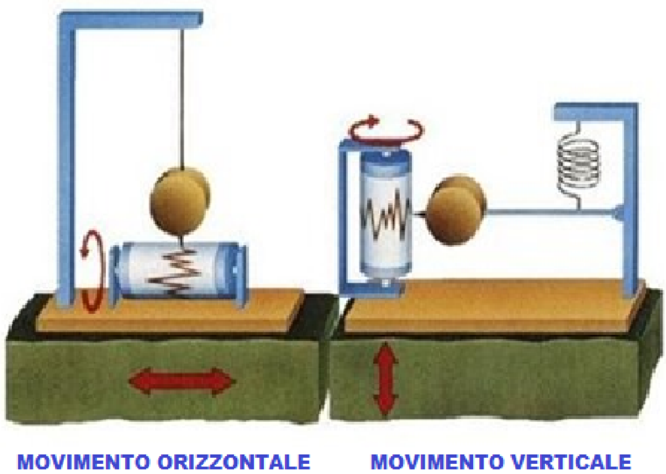


Fig. (14)

Sismografo per oscillazioni orizzontali e verticali

In assenza di attrito e quando $\omega_0 \cong \Omega$, l'ampiezza può diventare praticamente infinita. Questo fenomeno viene detto effetto di ***risonanza,*** potenzialmente pericoloso in ingegneria.

Il fenomeno può essere sintetizzato come segue. Una certa struttura oscilla alla sua frequenza naturale. Una forza periodica esterna, per quanto piccola e con frequenza uguale a quella naturale, può produrre oscillazioni di ampiezza molto grandi e dannose per l'integrità della struttura stessa. Le ragioni fisiche del meccanismo di risonanza, sono associate ad un accumulo di energia, indotto dalla forza esterna, che a sua volta produce l'aumento di ampiezza che eventualmente può portare al collasso della struttura.

15 Esempi di applicazione a Problemi di Ingegneria

Abbiamo già detto che le equazioni differenziali giocano un ruolo di fondamentale importanza in qualsiasi ambito applicativo, in cui la matematica giochi, un se pur minimo, ruolo. In questo paragrafo discuteremo alcuni aspetti elementari relativi alle applicazioni in Scienza delle Costruzioni.

Considereremo pertanto quanto illustrato in Fig. (15a) che riporta una trave incastrata ad un estremo con l'altro libero. Una forza applicata in B produce una deflessione $v(x)$, massima all'estremo libero e nulla nel punto di vincolo A.

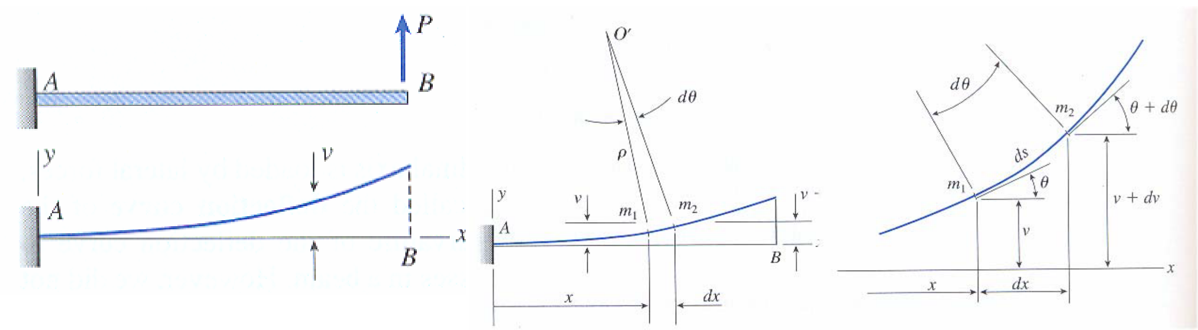


Fig. 15

a) Trave con estremo libero, forza applicata e flessione indotta

b) Angoli di flessione e raggio di curvatura

Nel resto della discussione assumeremo che i carichi agiscano solo nel piano $x-y$.

Insieme alla deflessione $v(x)$ (detta in gergo ***freccia***) la forza produce un angolo (si veda la Fig. (15b)) che è legato alla derivata prima della funzione di deflessione. Evidentemente in ciascun punto della trave deflessa possiamo definire il relativo raggio di curvatura e la curvatura associata

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{v''(x)}{(1+v'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$ds = \rho d\theta \qquad (1.15)$$

La curvatura indotta dalla forza applicata, o meglio dal momento flettente $M(x)$ associato alla forza applicata, è esprimibile come[5]

$$\kappa = \frac{M(x)}{E\,I} \qquad (2.15)$$

dove EI tiene conto della cosiddetta rigidità della trave (evidentemente al crescere della rigidità corrisponde una minore curvatura indotta dal momento e, al limite, per rigidità infinite la curvatura è nulla).

Assumendo ora $v'(x)$ sia sufficientemente piccolo che il suo quadrato possa essere trascurato, possiamo scrivere l'equazione differenziale che specifica la freccia come

$$v''(x) \cong \frac{M(x)}{E\,I} \qquad (3.15)$$

Che costituisce l'equazione della linea elastica.

In base alla (3.15) concludiamo che, noto il momento flettente, possiamo risolvere Che può essere risolta facilmente come

$$v(x) \cong \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\sigma \frac{M(\sigma)}{E\,I} + c_1 x + c_2 \qquad (4.15)$$

Le condizioni "iniziali" $c_{1,2}$ (più propriamente condizioni al ***contorno***) dipendono dal modo in cui la trave e vincolata, come illustrato nell'esempio che segue.

Ad esempio nel caso mostrato in Fig. (16), relativa ad una trave incastrata con un estremo libero,

---

[5] Per essere più precisi, notiamo che E è il modulo di Young e costituisce una misura del materiale che compone la trave, mentre I è il momento di inerzia è l'***inerzia*** associata ad un corpo in rotazione.

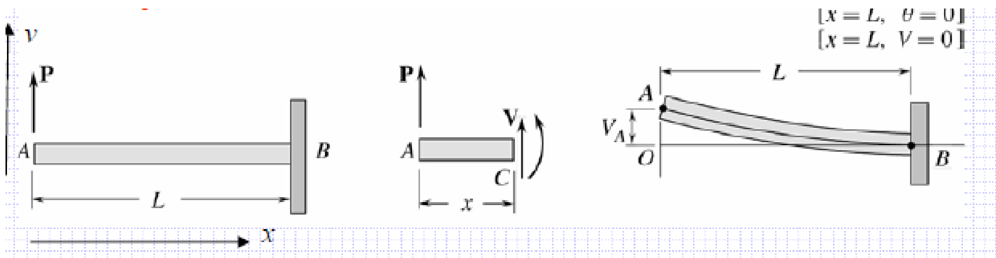


Fig. (16)

Trave con un estremo libero ed uno incastrato e relative condizioni al contorno

il momento flettente assume la semplice forma

$$M(x) = Px$$

Utilizzando la soluzione (4.15) della linea elastica, otteniamo

$$v'(x) = \frac{1}{2}\frac{P\,x^2}{E\,I} + c_1$$

$$v(x) = \frac{1}{6}\frac{P\,x^3}{E\,I} + c_1 x + c_2$$

Che, calcolate all'estremo vincolato, forniscono le condizioni

$$v'(0) = 0 = \frac{1}{2}\frac{P\,L^2}{E\,I} + c_1$$

$$v(0) = 0 = \frac{1}{6}\frac{P\,L^3}{E\,I} + c_1 L + c_2$$

necessarie per il calcolo delle costanti, che risultano essere

$$c_1 = -\frac{1}{2}\frac{P\,L^2}{EI},$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\frac{P\,L^3}{EI}$$

La discussione è stata tenuta ad un livello estremamente elementare e le equazioni differenziali ottenute sono necessariamente molto semplici.

Forme più complicate appaiono se si considerano il momento di inerzia dipendente dalla coordinata ($I = I(x)$) e le ulteriori equazioni di equilibrio della trave date da[6]

---

[6] Dove $q(x)$ è un carico distribuito e $v(x)$ lo sforzo di taglio

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$
$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$

Senza entrare nel significato ingegneristico delle relazioni precedenti, si dimostri che le equazioni della linea elastica diventano

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E\,I(x)\frac{d^2M(x)}{dx^2} \right) = -q(x)$$

Che è una equazione del quarto ordine, a coefficienti non costanti, di non facile soluzione nel caso generale.

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato dell'oscillatore armonico forzato, introdotto il fenomeno della risonanza e abbiamo fatto menzione della relativa importanza in ingegneria.

Come già detto la manifestazione di tale effetto è legata all'aumento delle oscillazioni meccaniche dovuto essenzialmente all'accumulo di energia trasferita dalla la forza esterna all'oscillatore. La potenza istantanea W dell'oscillatore armonico forzato è data dalla derivata del lavoro compiuto dalla forza esterna e sarà semplicemente scritta come[7]

$$W = F\,v = F\frac{dX}{dt}$$
$$F = F_0 \cos(\Omega t)$$
$$X = A\cos(\Omega t + \phi)$$

Senza entrare nello specifico dei calcoli, notiamo che la potenza media

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T W dt$$
$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Può essere scritta come

[7] Si ricordi che la potenza è l'energia prodotta (lavoro compiuto) per unità di tempo.

$$\langle W \rangle = \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}} \frac{m\Omega^2 X_0^2}{2\tau}$$

$$\tau = \gamma^{-1}$$

relazione che certifica il fatto che il trasferimento di energia tra la forzante e l'oscillatore armonico è massimo in prossimità di ω_0.

Prima di concludere il paragrafo, riteniamo accennare al problema della ***catenaria*** , curva di notevole importanza per le sue applicazioni in ingegneria.

La curva catenaria, ovvero il coseno iperbolico, deve i suo nome al fatto che è la forma da un filo omogeneo, flessibile e inestensibile, fissato agli estremi e soggetto solo all'azione della sua forza peso. Abbiamo già detto delle sue proprietà matematiche e nel seguito accenneremo alle proprietà caratteristiche in ambito fisico e ingegneristico.
Nella Fig. (17) si mostra un filo omogeneo di densità μ, simmetricamente fissata nei punti indicati in rosso. La forma della curva può essere derivata scrivendo le condizioni di equilibrio, che vanno scritte, in termini delle tensioni T, come

$$T_y = \mu g s,$$
$$T_x = T_0 \qquad (5.15)$$

dove s è la lunghezza della curva, ovvero

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2}\, d\xi$$
$$y'(x) = \frac{d}{dx} y(x) \qquad (6.15)$$

Notando inoltre che

$$\frac{T_y}{T_x} = \tan(\psi) = y' \qquad (7.15)$$

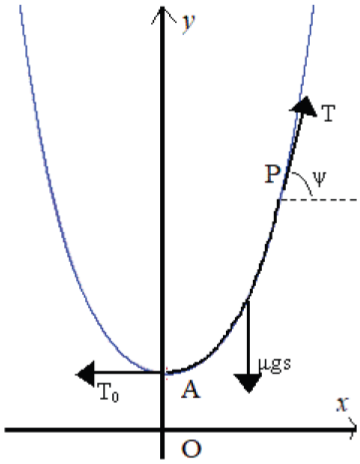


Fig. (17)
Catenaria e condizioni di equilibrio

Combinando le relazioni (5-7,15) si ottiene

$$y'(x) = \frac{\mu g}{T_0}\int_0^x \sqrt{1+y'(\xi)^2}\,d\xi \qquad (8.15)$$

Che dopo aver derivato ambo i membri fornisce l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} & y''(x) = \frac{\mu g}{T_0}\sqrt{1+y'(x)^2} \\ & y(0) = a \\ & y'(0) = 0 \end{aligned} \qquad (9.15)$$

Ponendo $z = y'(x)$ l'equazione precedente diviene una del primo ordine

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\mu g}{T_0}dx \qquad (10.15)$$

Che una volta integrata, fornisce la soluzione

$$z(x) = \sinh\left(\frac{\mu g}{T_0}x\right) \qquad (11.15)$$

Integrando nuovamente si ha

$$y(x) - y(0) = \frac{T_0}{\mu g}\left(\cosh\left(\frac{\mu g}{T_0}x\right) - 1\right) \qquad (12.15a)$$

Infine, ponendo $a = \frac{T_0}{\mu g}$, si ottiene

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (12.15b)$$

Nella Fig. (18) viene riportato la foto di un ponte sospeso, in cui si mette in evidenza il profilo a catenaria.
Non possiamo entrare in ulteriori dettagli per non debordare dagli scopi del corso.
Le indicazioni sulle applicazioni in ingegneria forniscono comunque una idea che, seppur parziali, può essere di stimolo per ulteriori approfondimenti.

Fig. (18)
Campate di un ponte sospeso e profilo di catenaria sovraimposto

16 Considerazioni Conclusive

In questo Capitolo abbiamo affrontato i primi rudimenti relativi alla teoria delle equazioni differenziali, sollevando un velo su un campo di ricerca sterminato, che costituisce uno degli aspetti costitutivi dell'analisi matematica stessa.

Le problematiche, che abbiamo toccato, hanno messo in luce quanto ognuna di queste possa costituire un filone autonomo di ricerca e in questo paragrafo conclusivo proveremo a mettere in evidenza come da problemi apparentemente insignificanti possano emergere spunti per ricerche di estremo interesse.

Consideriamo, pertanto, la seguente equazione differenziale

$$y' = \alpha\, y\left(1 - \frac{y}{K}\right) \qquad (1.16)$$

Che dal punto di vista strettamente matematico è una equazione del primo ordine non lineare. La struttura è quella di una equazione a variabili separabili, ma noi utilizzeremo un metodo alternativo. Sulla base di quanto discusso, a proposito delle equazioni differenziali di Bernoulli, utilizzeremo la seguente trasformazione

$$y = \frac{1}{\xi} \qquad (2.16)$$

che permette di scrivere l'equazione originale in una forma lineare, non omogenea del primo ordine

$$\xi' = -\alpha\left(\xi - \frac{1}{K}\right) \qquad (3.16)$$

In base a quanto appreso nei paragrafi iniziali, scriveremo la soluzione della (3.16) come

$$\xi(t) = \xi_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{K}\left(1 - e^{\alpha t}\right)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{y_0} \qquad (4.16)$$

Tenuto conto della condizione (2.16) avremo, in termini della variabile originale,

$$y(t) = y_0 \frac{e^{\alpha t}}{1 + \frac{y_0}{K}\left(e^{\alpha t} - 1\right)} \qquad (5.16)$$

La funzione a destra della (5.16) rappresenta la cosiddetta funzione ***logistica***, che costituisce un importante ausilio in alcuni problemi come la crescita di popolazioni. La forma in cui è stata scritta nella (1.16) è proprio quella che viene utilizzata in ecologia con α che rappresenta il tasso di crescita il tasso di crescita di un certo sistema biologico (popolazioni di batteri, di animali …) e K (detta in inglese ***carrying capacity)*** sono le risorse fornite dall'ambiente per supportare la crescita del sistema,

è infatti importante notare che

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K \qquad (6.16)$$

Un esempio di crescita logistica viene riportata nella Fig. (17), dove è stata riportato il grafico della y per diversi valori del tasso di crescita e per un singolo valore di K.

Evidentemente il grafico consta di due parti, che rappresentano una fase di crescita di tipo esponenziale e una di tipo ***saturazione,*** ovvero la crescita rallenta fino a ridursi cosicché y (per tempi sufficientemente grandi) tende a K.

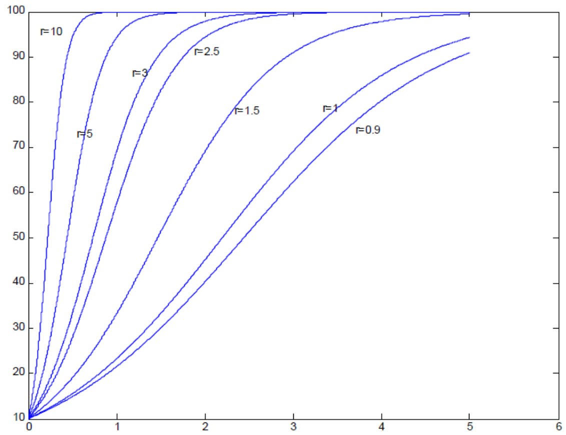


Fig. (17)

Evoluzioni di tipo logistico

Anche se estremamente interessante non possiamo, per ragioni di brevità, discutere ulteriori aspetti del problema in questione. Vogliamo però introdurre un ulteriore argomento, associato alle equazione differenziali, che è legato ad equazioni di tipo Bernoulli.

Le equazioni differenziali del secondo ordine che abbiamo considerato fino ad ora sono del tipo a coefficienti costanti. Accenneremo ora ad un esempio di equazione a coefficienti non costanti, come ad esempio

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad (7.16)$$

Dove i coefficienti $a(t), b(t)$ sono funzioni della stessa variabile di derivazione $\left(y'' = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 y\right)$, la soluzione esplicita della precedente equazione non è sempre ottenibile. Possiamo però mostrare come in generale la relativa soluzione possa essere ricondotta ad una del primo ordine non lineare.

Assumeremo infatti che

$$y(t) = e^{-h(t)} \qquad (8.16)$$

Che sarà inserita nell'equazione di partenza, dopo aver notato che

$$y' = -h'(t)e^{-h(t)}$$
$$y'' = -\left[h'' - (h')^2\right]e^{-h(t)} \qquad (9.16)$$

In modo da trasformare l'equazione originale nella seguente forma

$$\zeta' - a(t)\zeta - \zeta^2 = b(t)$$
$$\zeta = h' \qquad (10.16)$$

Nota come equazione di Riccati, che può essere considerata come un caso particolare dell'equazione di Bernoulli.

Nel caso in cui le funzioni $a(t), b(t)$ siano semplicemente delle costanti cosicché l'equazione (10.16) diventa una a variabili separabili e può essere risolta esattamente, ovvero

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = a\zeta + \zeta^2 + b \rightarrow$$
$$\rightarrow \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\xi}{\xi^2 + a\xi + b} = \tau \qquad (11.16)$$

Si invita il lettore a conciliare le soluzioni ottenute per questa via con le altre derivate tramite il metodo della equazione caratteristica.

Vogliamo infine accennare alle cosiddette equazioni di Eulero, ovvero equazioni differenziali del tipo

$$a t^2 y'' + b t y' + c y = 0 \qquad (12.16)$$

Che, sebbene non a coefficienti costanti, possono essere trattate utilizzando metodi non diversi da quelli che coinvolgono la tecnica della equazione caratteristica.

Cercheremo pertanto una soluzione del tipo

$$y = t^r \qquad (13.16)$$

dove r è una costante da determinare. Inserendo la precedente soluzione di prova nella eq. (2.16) otteniamo infatti

$$a r(r-1) + br + c = 0 \qquad (14.16)$$

Cosicché l'esponente r può essere determinato come soluzione di una equazione di secondo grado (corrispondente all'equazione caratteristica del problema in questione). Le radici della equazione (14.16) sono

$$r = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = (b-a)^2 - 4ac \qquad (15.16)$$

E possono essere

a) $\Delta > 0$ (reali e distinte) in questo caso la soluzione può essere scritta come (le costanti $c_{1,2}$ dipendono, come nel caso ordinario, dalle condizioni iniziali)

$$y = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2} = t^{-\frac{b-a}{2a}} \left(c_1 t^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} + c_2 t^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} \right) =$$
$$= t^{-\frac{b-a}{2a}} \left[(c_1 + c_2)\cosh(X) + (c_1 - c_2)\sinh(X) \right]$$
$$X = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ln(t) \qquad (16.16)$$

c) $\Delta < 0$ (complesse e coniugate) con soluzione

$$y = t^{-\frac{b-a}{2a}} \left[(c_1 + c_2)\cos(X) + (c_1 - c_2)\sin(X) \right] \qquad (17.16)$$

d) $\Delta = 0$ (radice doppia)

$$y = t^{-\frac{b-a}{2a}} \left[c_1 + c_2 \ln(t) \right] \qquad (18.16)$$

Il risultato precedente è facilmente ottenibile notando che le soluzioni (16.16) e (17.16) possono anche essere scritte come

$$y = t^{-\frac{b-a}{2a}} \left[a_1 \cos(X) + a_2 \sin(X) \right] =$$
$$= t^{-\frac{b-a}{2a}} \left[a_1 \cos(X) + a_2 \frac{\sin(X)}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} \right]$$

Per cui calcolando il limite

$$\lim_{\Delta \to 0} y = t^{-\frac{b-a}{2a}} \left[a_1 + a_2 \ln(t) \right]$$

si ottiene lo stesso risultato riportato nella eq. (2.16).

L’analogia con il metodo dell’equazione caratteristica diviene evidente se si nota che l’utilizzo delle tecniche sui metodi operazionali ci permettono di scrivere

$$t^2\left(\frac{d}{dt}\right)^2=\left(t\frac{d}{dt}\right)^2-t\frac{d}{dt}$$

Per cui l’equazione (12.16) può essere riscritta nella forma

$$a\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 y+(b-a)\left(t\frac{d}{dt}\right)y+cy=0$$

A questo punto è sufficiente notare che l’autofunzione dell’operatore $t\frac{d}{dt}$ è proprio t^r, il che giustifica l’uso del metodo dell’equazione caratteristica anche per questa classe di equazioni differenziali.

La discussione e le tecniche di soluzione sviluppate in questo Capitolo, pur nella loro limitatezza, costituiscono una buona base di partenza per studi più approfonditi.