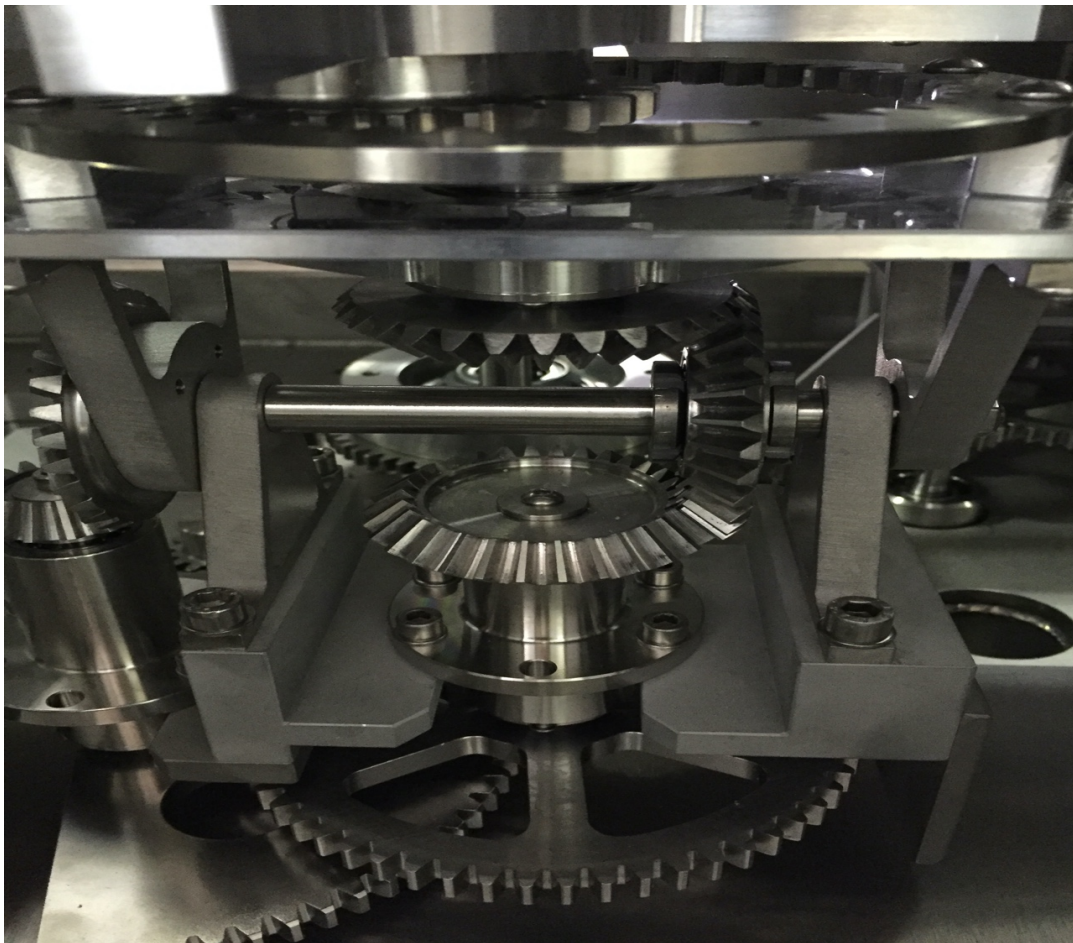


La progettazione dei sistemi meccanici



Parti 1 e 2 – Introduzione, ciclo di vita e strumenti di Progetto

Cattedra di Progetto di Macchine

Rev 2.0 – A.A. 2019/2020

SOMMARIO

1	Introduzione	4
1.1	La formazione del progettista: innovazione e visione sistemica	4
1.2	Formazione di base e innovazione.....	5
2	PARTE PRIMA: IL CICLO DI VITA E LE FASI COMPONENTI IL PROGETTO DI UN SISTEMA	7
2.1	DEFINIZIONI.....	7
2.2	IL CICLO DI VITA DI UN PROGETTO.....	10
2.3	Le fasi del ciclo di vita e lo standard MIL-STD	13
2.3.1	Pre-fattibilità.....	14
2.3.2	Analisi di fattibilità.....	14
2.3.3	Definizione della esigenza di base.....	16
2.3.4	Planning preliminare.	17
2.3.5	Sviluppi tecnologici - Nuove applicazioni	18
2.3.6	Proposta di risoluzione concettuale	18
2.3.7	Valutazione preliminare della risoluzione concettuale	20
2.3.8	Revisione del blocco Analisi di Fattibilità	21
2.3.9	Definizione del progetto: requisiti funzionali e di progetto.....	22
2.3.10	Valutazione finale ed ex-post del progetto	23
2.3.11	Realizzazione	24
3	PARTE SECONDA: STRUMENTI PER IL PROGETTO DI UN SISTEMA. 25	
3.1	Disegno, Calcolo, Pianificazione, Metodi Economici E Statistici	25
3.2	Ricerca.....	25
3.3	Il calcolo.....	27
3.4	Metodi statistici e probabilistici.....	29
3.4.1	Concetti elementari.....	29
3.4.2	Funzioni di Distribuzione.....	34
3.4.3	La Distribuzione Binomiale.....	37
3.4.4	La Distribuzione di Poisson.....	39
3.4.5	La Distribuzione Uniforme.	39
3.4.6	La Distribuzione Esponenziale.	40
3.4.7	La Distribuzione Normale o Gaussiana.	40
3.4.8	La Distribuzione Gamma.	43
3.4.9	La distribuzione Beta.	44
3.4.10	La Distribuzione Chiquadro (χ^2).	46
3.5	Inferenza	48
3.5.1	Controllo delle Ipotesi Statistiche.....	54
3.5.2	Test del χ^2	56
3.5.3	Stime di Intervallo.....	60
3.6	Coefficiente di Correlazione.....	63
4	Il Planning.	65
4.1	Concetti—Definizione—Rappresentazione.....	66
4.2	Analisi di un progetto in attività elementari-schedulazione.	67
4.3	Rappresentazione Grafica — Attività In Serie - Attività In Parallelo	68

4.4	Diagramma di Gantt	70
4.5	Il metodo PERT.....	71
4.5.1	Durate.	74
4.5.2	Il calcolo dei Tempi Minimo e Massimo.....	78
4.5.3	Percorsi Critici.	81
5	Teoria delle Decisioni	82
5.1	Matrice di valutazione delle alternative.....	84
5.1.1	Decisioni in condizioni di " certezza".....	85
5.1.2	Decisioni in condizioni di rischio.....	86
5.1.3	Decisioni in condizioni di incertezza.....	90
5.2	Valutazione Economica di Alternative di Progetto;.....	93
5.2.1	Il modello dei flussi economici	94
5.3	Determinazione delle equivalenze economiche	97
5.3.1	Il valore economico di una singola alternativa in condizioni di certezza. 98	
5.3.2	Valutazione dell'investimento secondo il valore attuale,.....	98
5.3.3	Valutazione del tasso di rendimento.....	99
5.3.4	Valutazione del tempo di restituzione (PAYOUT) del capitale investito.100	
5.3.5	Confronto economico tra diverse alternative in condizioni di certezza. 101	
5.3.6	Valutazioni economiche in condizioni di rischio e di incertezza .103	
5.3.7	Valutazione del punto di pareggio (Break-even point).....	103

1 Introduzione

1.1 La formazione del progettista: innovazione e visione sistemica

L'innovazione o la creazione di un nuovo prodotto industriale nell'accezione moderna hanno subito un notevole cambiamento di prospettiva: il processo di ideazione di ciascun componente progettuale viene oggi visto all'interno di un "frame" metodologico costituito da numerosi momenti di verifica di ogni ipotesi progettuale in termini di funzionalità ed efficacia, ma anche di verifica delle interazioni rispetto agli altri componenti del "sistema prodotto", e nel complesso prevede una attenzione ed un controllo iterativo delle interfacce tra sottosistemi ed un'analisi critica delle soluzioni adottate.

Lo sviluppo di un prodotto, inoltre, va considerato all'interno di un ciclo di vita temporale, che va dalla sua ideazione alla sua obsolescenza, passando per le fasi di progettazione, industrializzazione, commercializzazione, assistenza, sostituzione: l'innovazione ha impatto su tutte queste fasi, e la progettazione dell'innovazione deve quindi essere intesa sempre più come un'attività totale che attraversa l'intero ciclo.

In quest'ottica è possibile rappresentare l'attività progettuale secondo un sistema di riferimento a più dimensioni, dove uno dei piani principali vede sugli assi la qualità dei componenti o dei sottosistemi e la qualità dell'integrazione, ove per qualità si assume l'accezione classica di rispondenza a requisiti espliciti ed impliciti del progetto, mentre sul terzo asse temporalmente espresso possiamo rappresentare le varie fasi del ciclo di vita del prodotto. Le verifiche delle attività progettuali dovranno garantire in ogni fase che le soluzioni adottate si posizionino nei quadrati "alti" del diagramma in figura, non solo nelle condizioni iniziali.

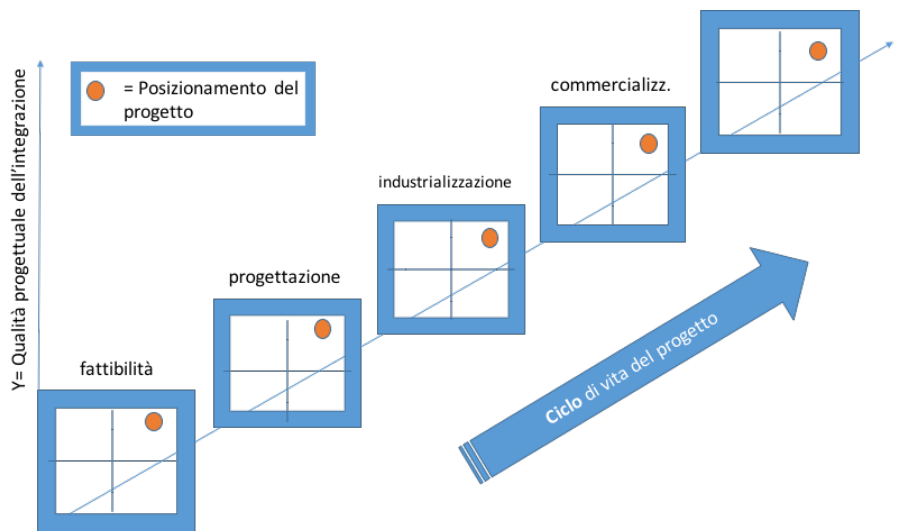


Figura 1

1.2 Formazione di base e innovazione

La formazione di base dei progettisti è focalizzata, giustamente, sulle conoscenze tecniche specialistiche, che sono abilitanti per la ricerca delle soluzioni progettuali tecnicamente migliori, ma c'è il rischio concreto che, una volta fuori dalle aule di studio, la mancanza di una visione progettuale sistemica ed allargata pregiudichi l'efficacia complessiva delle scelte tecniche.

Dovendo completare la formazione di un progettista sarà quindi opportuno guidarne in primo luogo la consapevolezza del proprio ruolo in tutte le fasi e per tutti gli aspetti del processo innovativo, ma anche fornire gli strumenti metodologici e concettuali per sistematizzare il proprio intervento.

L'approccio sistemico non va percepito come in antagonismo rispetto all'enfasi dell'autonomia progettuale, della "creatività assoluta", dell'intuizione pura: va piuttosto inteso come un supporto indispensabile affinché idee originali e innovative possano tradursi in una valida ingegneria di sistema, e le soluzioni *intelligenti e resilienti* si trasformino in benefici reali per gli utilizzatori finali, in termini di usabilità, di costo, durata e robustezza del progetto stesso: che poi è la ragione di fondo per cui vale la pena credere ed impegnarsi nell'innovazione.

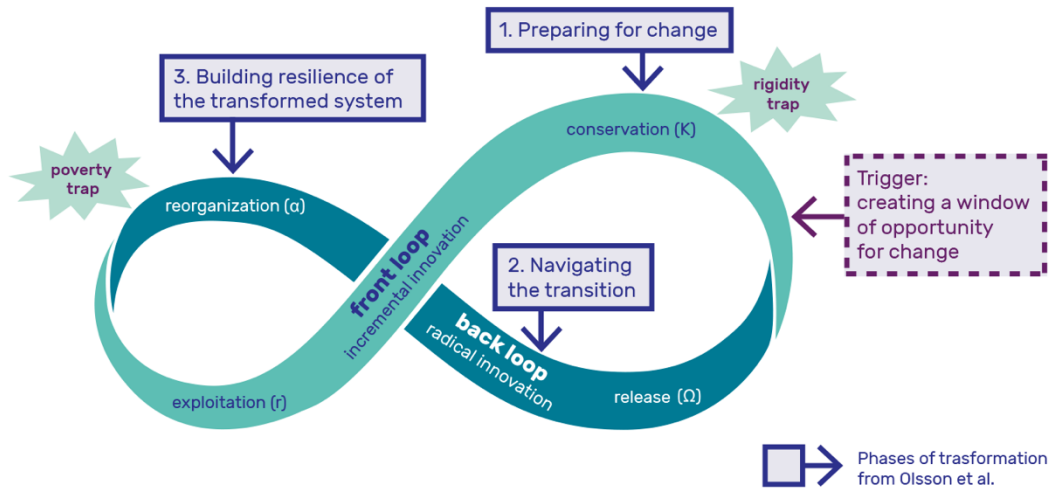


Figura 2 -La resilienza come visione sistemica della realtà

2 PARTE PRIMA: IL CICLO DI VITA E LE FASI COMPONENTI IL PROGETTO DI UN SISTEMA

2.1 DEFINIZIONI

UN “**sistema**” si trova definito in letteratura come “*Complesso di elementi che, mantenendo le proprie caratteristiche, formano un tutto organico, integrandosi a vicenda*”, ovvero come “*pluralità di elementi collegati tra loro per eseguire una determinata operazione*”; per l’ambito di nostro interesse si può definire anche il concetto di “**sistema meccanico**”, indicando con esso un insieme coordinato composto da una o più macchine o impianti, progettato e realizzato allo scopo di fornire all'utilizzatore un servizio efficace ed economico. Nella pratica ingegneristica, inoltre, indichiamo come macchina un qualunque dispositivo in grado di trasformare energia, nel senso che l'energia prodotta dall'esercizio di tale dispositivo, differisce per quantità o per qualità, forma, tempo, luogo o modo di presentazione, dall'energia che è utilizzata per il funzionamento dello stesso dispositivo.

La trasformazione di energia realizzata dalla macchina - e quindi dal sistema meccanico - è peraltro orientata a soddisfare esigenze determinate dal contesto tecnologico, sociale ed economico cui è destinato il suo funzionamento.

Utilizzando una tale visione allargata del concetto di “macchina” (diversa cioè dal semplice “dispositivo”), possiamo usare il concetto di macchina analogo a quello di impianto, che differirà soltanto per la presenza di elementi caratterizzanti quali la rete di utenze, la localizzazione, il layout.

La macchina è dunque effetto della tendenza alla soddisfazione di determinate esigenze e, nello stesso tempo, essa è causa del verificarsi di nuove esigenze.

L'utente finale è il destinatario del sistema, è chi ne misura l'efficacia in termini di soddisfazione degli obiettivi prefissati e che ne determina la richiesta di modifiche ed aggiornamenti, così come ne decreta definitivamente l'obsolescenza allorché il livello di soddisfazione risulta insufficiente.

D'altra parte, la natura e la complessità di tali esigenze è nello stesso tempo causa ed effetto del progresso tecnologico sociale ed economico. Queste considerazioni portano a superare l'interpretazione riduzionista del concetto di macchina per integrarlo in chiave olistica nel concetto di **sistema interagente con la realtà in cui è immerso**.

Non ci si può oggi limitare a considerare in forma analitica la macchina come un insieme coordinato di meccanismi (riduzione del concetto di macchina a quello di meccanismo),

ciascuno definito in forma deterministica, tale per cui il successo dell'insieme è biunivocamente correlato al funzionamento dei componenti: il pieno conseguimento degli obiettivi per cui è stata progettata, può dipendere in misura rilevante da fattori diversi dal funzionamento delle parti componenti.

Il progetto di una nuova macchina parte dall'emergere di una nuova esigenza di automazione delle attività umane, e si sviluppa sotto forma di progetto in un contesto culturale e tecnologico da cui il progetto stesso non può prescindere.

Quando la nuova macchina sarà realizzata, essa andrà a operare entro un preesistente ambiente, che verrà in certa misura modificato dal funzionamento della macchina stessa. Ne deriva che occorre considerare la macchina come un sistema articolato e complesso, determinato dalla sintesi di elementi di natura diversa, non esclusivamente tecnica, condizionato dall'ambiente entro cui prende forma e al quale è destinato (espansione del concetto di macchina in quello di sistema).

Pensiamo ad esempio a una macchina industriale per la produzione di celle fotovoltaiche a film sottile (**fig.3**): il processo di produzione prevede condizioni di vuoto spinto e la pulizia dell'ambiente come condizioni essenziali per il suo funzionamento, per cui la progettazione terrà conto dell'impossibilità di utilizzare materiali che subiscano trasformazioni sotto vuoto (ad esempio, i materiali in gomma ed i lubrificanti), ma nemmeno potrà prescindere dal prendere in considerazione l'ambiente in cui essa opererà, la qualità dell'aria circostante, le normative dei singoli paesi in tema di sicurezza del lavoro e di esposizione alle polveri, le ore di funzionamento continuo previste dalle turnazioni.



Figura 3 -sistema per la creazione di celle fotovoltaiche a film sottile

Il successo di un progetto di un sistema è quindi solo in parte correlabile al funzionamento delle parti componenti (meccanismi) perché si misura in termini di conseguimento di obiettivi

prefissati, e quindi dipende da fattori “di sistema”, non tutti direttamente determinabili in base a leggi di causalità diretta.

La progettazione inoltre è un metodo prima ancora che un’attività: è vitale nella professione di ingegnere e di progettista poter attingere a metodi sperimentati ed efficaci di approccio alle problematiche ancor prima delle soluzioni tecnologiche: i primi evolvono lentamente, sulla base dell’esperienza e della cultura ingegneristica dei vari momenti storici, le seconde cambiano con impressionante velocità che prevede, oltre ad un aggiornamento continuo, delle basi metodologiche solide per poterne acquisire rapidamente i benefici e le opportunità offerte.

Si pensi a tale proposito alle opportunità offerte dalla nuova generazione di dispositivi di movimentazione elettronica, che semplificano oggettivamente i sottosistemi omonimi: a fronte di una più semplice concezione dei dispositivi stessi (riduzione delle logiche elettromeccaniche, controllo integrato della movimentazione e dei cinematismi, etc.), si aprono numerose possibilità d’impiego in contesti in cui precedentemente tale impiego veniva escluso per ragioni di complessità, di sicurezza, di affidabilità e di costo.

Esiste quindi un tipo di evoluzione che trova la sua realizzazione attraverso l’impiego di nuove tecnologie; ma esiste anche una nuova domanda, che è definita “*technology pushed*”, in altre parole spinta dall’evoluzione tecnologica che porta ad avere nuove esigenze che nascono dalla disponibilità di tecnologie innovative diffuse e quindi a basso costo.

In questo testo, collegato al corso di Progetto di Macchine, ci occuperemo dei metodi e degli strumenti a disposizione del progettista per affrontare le scelte progettuali e rispettare i vincoli posti dalle specifiche di ogni progetto.

E’ inoltre importante considerare come la progettazione non possa riguardare la sola fase ideativa di disegno e composizione della macchina o del sistema. L’indirizzo moderno del progettista (invero già sposato dai maestri già alcune generazioni fa) vede il progetto all’interno del suo ciclo di vita: questo comincia con l’identificazione di esigenze (ovvero requisiti) del sistema, per poi tradurre queste in specifiche tecniche attraverso idee orientate alla concreta realizzazione del sistema e delle sue parti.

La specifica tecnica è tradotta, attraverso fasi ricorrenti di definizione successiva delle soluzioni adottate, fino alla stesura di un progetto esecutivo. La realizzazione successiva può passare attraverso prototipi che sono affinati con modifiche e aggiornamenti che tengono conto sia delle prestazioni che si vogliono ottenere, sia dello sviluppo delle richieste degli utilizzatori.

A queste fasi progettuali seguono l'esercizio del sistema, in cui il funzionamento è monitorato per misurare la robustezza d'impianto e la rispondenza a posteriori ai requisiti espressi, sia per valutarne le evoluzioni possibili e i miglioramenti delle future versioni.

Il progetto del supporto logistico inoltre consentirà la disponibilità e l'efficienza delle manutenzioni e la disponibilità delle parti di ricambio; La fase di obsolescenza curerà gli aspetti ambientali, di sostituzione degli apparati, di smaltimento a fine esercizio.

2.2 IL CICLO DI VITA DI UN PROGETTO

Si può considerare il Ciclo di vita di un progetto come un insieme di azioni, dall'inizio alla fine, ben definite ma al tempo stesso fortemente correlate tra di loro in una sequenza anche temporalmente e funzionalmente ben definita: Tra le fasi non esiste solo consecutività temporale, ma anche interazione ed interdipendenza

Il Ciclo di Vita del progetto prescrive la sequenza standard di fasi attraverso cui passa il progetto, dal suo concepimento al suo completamento, al fine di raggiungere gli obiettivi intermedi e finale fissati

La scomposizione di un progetto in diverse "Fasi del Progetto" ha infatti il vantaggio di individuare, definire e focalizzare le azioni chiave, di reperire tutte le informazioni necessarie, di distribuire attività e responsabilità ai diversi livelli.

Quest'approccio consente la verifica delle Fasi di Progetto in ogni momento, a partire dalla suddivisione iniziale, risolvendo in modo qualitativamente efficace il problema delle modifiche in corso d'opera.

Le fasi di un progetto sono consecutive: in generale non è possibile iniziare una fase se non è completata quella precedente, e i moderni sistemi progettuali prevedono un'opportuna "validazione" di ciascuna fase da parte del gruppo di progettisti e dell'organizzazione per procedere a quelle successive, attraverso "project control board" appositamente investiti di tale responsabilità e autorità. L'organizzazione in sequenza delle fasi progettuali costituisce una impostazione ben strutturata, in grado di garantire al management di progetto (ed anche aziendale) un controllo efficace e tempestivo, che poi è una delle chiavi di successo di ogni progetto complesso.

Le fasi di progetto possiedono anche una loro *circularità*, poiché la valutazione conclusiva trasferisce l'esperienza di interventi appena conclusi nella progettazione degli interventi futuri (feedback, riprogettazione, test).

Le moderne metodologie di Program Management prevedono inoltre il coinvolgimento fin dai primi passi di tutti gli attori del processo lungo l'intero ciclo di vita.

Si pensi a un componente aeronautico di forma particolare, di difficile lavorazione con le macchine tradizionali, per il quale si sia previsto una progettazione additiva (che prevede quindi la realizzazione in lega leggera mediante stampante 3D a polvere): l'individuazione "a monte" della progettazione delle fasi realizzative consente il coinvolgimento di tutti gli attori del processo costruttivo, compresi gli esperti di additive processing, i tecnologi dei materiali, i responsabili della produzione. Tale coinvolgimento può evitare errori in fase di progettazione, legati alle differenti caratteristiche meccaniche dei materiali impiegati, alla rugosità attesa del pezzo finale (soggetto quindi a post-lavorazioni), ai tempi e costi di produzione.

Nella formalizzazione del ciclo di progettazione di un prodotto o di un processo industriale (generalizzati come "sistema"), sono stati utilizzati in letteratura diversi schemi concettuali di grande validità ed efficacia: vale la pena qui ricordare i diagrammi a "V" in cui viene messa in evidenza la corrispondenza fra le fasi progettuali e le fasi di verifica, test e collaudo:

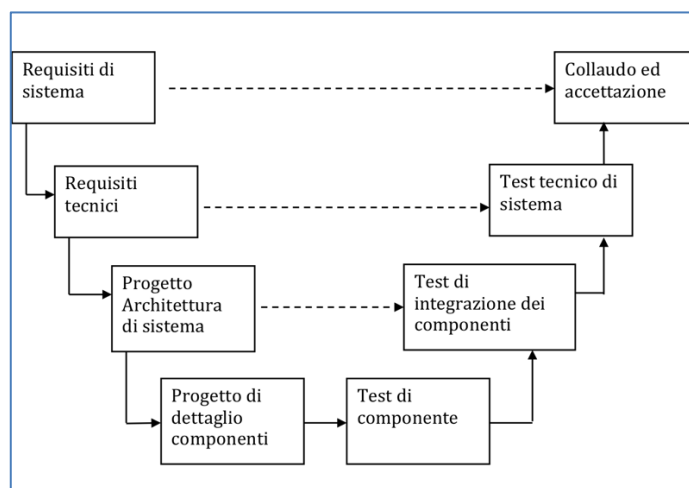


Figura 4 - diagramma a "V" del ciclo di progettazione

Il vantaggio di questa rappresentazione è quello di evidenziare come la progettazione sia un'attività creativa volta al rispetto di specifiche che, a seconda della fase e dell'approfondimento di dettaglio della progettazione stessa, assumono la forma di requisiti, specifiche tecniche, test di collaudo e di accettazione.

In questo ambito, tutta l'attività di progettazione è concentrata sulla ricerca delle soluzioni tecniche atte a soddisfare i requisiti contrattuali: procedendo nel maggior dettaglio, sono gli stessi requisiti di sistema ad essere elaborati e puntualizzati fino ad un livello che ne consenta la testabilità applicata ai componenti elementari del progetto.

E' pur vero che in questa attività, che così descritta assume un profilo pienamente deterministico, vengono fatte dal progettista assunzioni, semplificazioni teoriche, ipotesi rispetto ai fenomeni inerenti al progetto, che introducono quindi elementi di

indeterminazione rispetto al funzionamento atteso del sistema, e quindi sono da considerare parti del progetto stesso le fasi di test e di collaudo a verifica di quanto ipotizzato.

Inoltre, anche a progetto concluso, è possibile che emergano problemi collaterali nel funzionamento in esercizio dei sistemi progettati, non riconducibili direttamente ad errori di progettazione, né a condizioni di funzionamento non previste.

In questo caso, è utile fare riferimento ad una metodologia (**il Design Of Experiments**, ad esempio) che fornisca una guida procedurale strutturata nella progettazione dei test e degli esperimenti, al fine di aggiungere, alla conoscenza progettuale a priori, informazioni utili inerenti a:

- a) Determinazione e grado di influenza di parametri e variabili sulla risposta del sistema
- b) ricerca delle regolazioni di ottimo per il funzionamento
- c) sensibilità del sistema rispetto alla variazione di fattori esterni (robust design)

Queste informazioni, desumibili dalle analisi successive alla raccolta dei dati sperimentali, prescindono dalle assunzioni fatte in corso di progettazione e dalla conoscenza delle leggi causa-effetto a noi note dallo studio dei fenomeni fisici tipici del sistema in esame: la loro valutazione, di tipo inizialmente qualitativo e poi, in fase di approfondimento dei risultati, anche di quantità, può essere vista sia come affinamento del progetto stesso, sia come verifica post-progettuale delle ipotesi di progetto.

Ad esempio, nel progetto di una saldatrice laser ad alta energia, la sperimentazione può darci importanti elementi sulle caratteristiche del raggio laser che ottimizza le caratteristiche della saldatura: può anche fornirci però conferme valide sulle ipotesi di progetto, se verificassimo che queste caratteristiche hanno una grande influenza sulle prestazioni del sistema, spingendoci ad una revisione progettuale con uno studio più accurato sulle caratteristiche geometriche del raggio e sulla tecnologia e geometria della fusione.

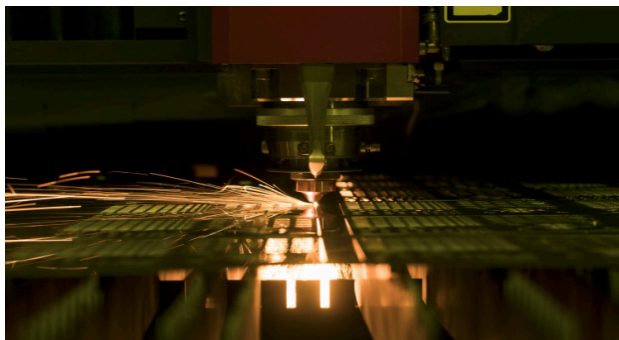


Figura 5 - Saldatrice laser in azione

Per quanto il concetto di “progetto” sia esteso a contesti molto diversi fra di loro, dal punto di vista concettuale si possono quindi identificare n fasi fondamentali, comuni a tutti i domini tecnologici, come vedremo nel capitolo seguente.

2.3 Le fasi del ciclo di vita e lo standard MIL-STD

Lo standard militare, "MIL-STD" venne originariamente adottato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti per favorire la standardizzazione di progetti, materiali e forniture.

Lo scopo evidente era quello di raggiungere l'interoperabilità dei sistemi, di avere un quadro di norme che consentisse di accertare e garantire a lotti di prodotti i requisiti richiesti e le caratteristiche funzionali, l'affidabilità e la compatibilità con i sistemi di logistica, con altri progetti, forniture e materiali correlate.

Tuttavia con il tempo il termine "**military standard**" si è esteso ad altre organizzazioni governative non solo esclusivamente del settore della difesa, ma anche in campo tecnico e industriale, diventando un riferimento rigoroso, completo e facilmente applicabile in molti contesti tecnologici civili, laddove soprattutto si rendesse necessario un certo rigore metodologico.

Tra i diversi gruppi di normative, particolare valenza ingegneristica industriale ha il Defence Standard conosciuto con l'acronimo di MIL-STD, che unifica e stabilisce i criteri di engineering ed i requisiti tecnici che riguardano l'interfaccia, i criteri di design, processi di produzione e metodi di test. A queste faremo riferimento tenendo conto delle seguenti considerazioni:

- a) Le norme MIL sono complete: riguardano in un'unica visione tutto il ciclo di qualsiasi tipologia di progetto industriale;
- b) la provenienza dal settore della difesa è ormai superata dal loro largo uso in ambito civile in particolare per progetti di grandi dimensioni e a profondo contenuto tecnologico
- c) l'utilizzo di qualsiasi altra normativa prevede fasi di progetto in larga parte riconducibili a quanto previsto dalla norma

Le normative MIL-STD ad esempio individuano otto distinte fasi nel processo che vanno dalla pre-fattibilità all'esercizio di un prodotto o sistema:

1. Prefattibilità
2. Fattibilità
3. Definizione del progetto: requisiti funzionali e di progetto
4. Progettazione e sviluppo Prototipo e prequalifica
5. Integrazione e qualifica
6. Industrializzazione e pre-serie
7. Produzione di serie
8. Esercizio

Per ogni fase è inoltre prevista:

1. una Phase Review di prodotto e di progetto
2. una Design Review

Ognuna delle otto fasi è presente, in modo esplicito o implicito, in ogni progetto: l'estensione di ogni fase in termini temporali, di complessità o di costo, dipende oltre che dalla specificità del progetto stesso, dal tipo di problematica affrontata.

Se c'è richiesto di progettare una nuova versione di una macchina già esistente, ad esempio, la fase di configurazione e allocazione delle prestazioni potrà essere ridotta, così come potremo surrogare la maggior parte dei requisiti preesistenti dal progetto precedente, mentre la fattibilità sarà probabilmente concentrata sui nuovi requisiti introdotti (ad esempio, l'automazione di alcuni sottosistemi o l'aumento delle prestazioni), mentre l'impianto progettuale potrà essere mantenuto come in precedenza. Viceversa, la creazione di un nuovo "oggetto" non esistente sul mercato, al di là delle implicazioni legate al design, comporta uno svolgimento dettagliato ed approfondito delle prime fasi, per verificare la fattibilità del progetto stesso che avrà necessariamente un alto grado di innovazione.

Ai fini della nostra esposizione, descriveremo alcune delle fasi più strettamente inerenti il processo di progettazione.

2.3.1 Pre-fattibilità

La prima fase è quella che serve a capire se l'idea progettuale nel suo complesso sia coerente con quanto indicato nei requisiti. Lo scopo di questa fase è anche quello di identificare e mettersi d'accordo sulle finalità principali del progetto. In secondo luogo, lo scopo è di fornire una prima idea di cosa pensiamo di realizzare, delle priorità e dei soggetti che pensiamo di coinvolgere.

2.3.2 Analisi di fattibilità

In genere, un progetto che nasce da una esigenza specifica e si distingue per una idea valida ha buone opportunità di successo. Sono parametri di successo i requisiti tecnici e le prestazioni richieste, siano essi prodotti, servizi, cambiamenti organizzativi.

Ogni analisi di fattibilità deve essere sviluppata tenendo conto di tutti gli elementi tecnici e organizzativi che costituiranno l'ossatura del progetto; lo sviluppo degli argomenti sarà dimensionato sulla base delle difficoltà tecniche, normative e organizzative tipiche di ciascun ambito specifico.

In particolare, il focus dell'analisi tecnica sarà diverso in funzione del progetto. Nel caso di un sistema meccanico, la fattibilità tecnica del progetto sarà incentrata sull'analisi della tecnologia, e in secondo luogo sulle competenze.

Una analisi di fattibilità con esito negativo non sempre rappresenta una bocciatura del progetto, anzi: spesso, permette di far nascere un progetto parallelo in attesa che esistano i presupposti per sviluppare l'idea originaria.

L'organizzazione delle risorse è sempre un fattore critico, per cui è fondamentale determinare risorse, tempi e modalità di esecuzione delle attività, esplicitando i vincoli esistenti.

Il contesto strategico (mercato, stakeholders, politica) e il settore di riferimento (energia, produzione, automazione) sono i parametri che guidano lo sviluppo del progetto. Lo stesso progetto può infatti essere gestito puntando più su alcuni parametri rispetto che su altri. Il conflitto *costi/tempi*, ad esempio, non ha mai soluzione univoca in quanto si deve puntare a ottenere il miglior risultato a partire dalle proprie risorse o, in alternativa, raggiungere il "risultato x" col l'uso di risorse esterne.

Grande importanza ricopre il piano finanziario occorre in questa fase definire sia il fabbisogno sia le fonti di finanziamento, siano esse interne o esterne. Nella realizzazione di un progetto imprenditoriale, soprattutto se di carattere funzionale, non si può concentrare solo sul ritorno economico ma serve trovare il modo di consentire all'azienda di soddisfare il cash flow conservando una congrua liquidità.

Essendo questo un fattore fondamentale, negli ultimi anni si è impostato un processo strutturato di valutazione del rischio (Risk Management) che comprende:

- ✓ rischio di progetto
- ✓ rischio cliente / ente appaltante
- ✓ rischio paese

Il costo è un elemento vincolante, per cui è fondamentale una buona fase di budgeting, almeno in ambito industriale, dove gli obiettivi sono quantificabili dal punto di vista economico su una bilancia costo/ricavi. L'analisi comprende gli aspetti diretti (costo vivo e ricavi dal lancio di un nuovo prodotto) e indiretti (costi indiretti e minori costi della "non qualità" in seguito alla realizzazione di un nuovo processo). Se il progetto riguarda un prodotto/servizio da commercializzare, alla fattibilità economica si affianca l'analisi di fattibilità commerciale.

Nei progetti più complessi è importante includere valide considerazioni riguardanti l'analisi sociale e organizzativa: la fattibilità sociale comprende tutti gli aspetti legati all'impatto del progetto ed alla sua gestione.

Un caso particolarmente significativo, per frequenza e per impatto, può essere l'introduzione di una linea robotizzata in un'azienda di produzione.

Guardando la cosa dal punto di vista degli utilizzatori, valutare la fattibilità sociale del progetto significa tenere presente tutte le variabili di usabilità e sicurezza dell'impianto. Per questo diventano fondamentali le informazioni raccolte nelle fasi di analisi dei processi esistenti, per evitare, principalmente, fenomeni di ostilità da parte delle persone preposte all'uso del nuovo impianto.

Dal punto di vista dell'azienda saranno invece valutati due aspetti. Il primo è la capacità del nuovo sistema di automatizzare alcune fasi di produzione, in modo da liberare risorse, mentre il secondo sarà legato alla capacità dell'organizzazione a recepire il cambiamento con favore (introduzione di nuove procedure, corsi di aggiornamento) con particolare attenzione a tempi e modi di spin-off.

I parametri temporali di inizio e durata di un progetto sono vincoli alla base di ogni schedulazione, pertanto il giusto inquadramento temporale del progetto è fondamentale alla sua riuscita.

Queste analisi sono effettuate quasi in automatico nella fase di autovalutazione di un progetto, ma è importante focalizzare la propria attenzione su questi aspetti per essere più obiettivi e per essere in grado di migliorare la comunicabilità.

Pensiamo soprattutto al caso in cui il progetto debba essere presentato all'esterno (ad esempio per una partnership o per un finanziamento): in questo caso, senza avere ben chiari questi riferimenti metodologici, sarebbe ben più difficile compilare un documento in grado di fornire i giusti dettagli sul nostro progetto. Occorre tener presente, infatti, che *un progetto illustrato male è un cattivo progetto*.

2.3.3 Definizione della esigenza di base

È il punto di partenza che condiziona lo sviluppo dell'intero progetto, cioè di tutto il processo creativo che pone in essere un nuovo sistema; merita dunque la massima attenzione, profondità di analisi e senso critico.

Esistono teorie e tecniche specifiche, sviluppate nell'area del marketing che forniscono efficaci strumenti per interpretare in modo corretto la percezione di esigenze da soddisfare mediante nuovi sistemi o prodotti. Tenendo presente che le esigenze di base possono essere complesse e che spesso occorre concentrare le

risorse disponibili limitandosi a perseguire obiettivi prioritari, è senza dubbio opportuno avere la conoscenza di tali tecniche in questa fase del progetto in cui è di primaria importanza definire correttamente:

- a. la natura della deficienza che deve essere colmata dal sistema (ad es. prestazioni insufficienti, eccessivo costo di una certa funzione, completamento di un servizio, ecc.);
- b. i tempi nei quali si attende che il nuovo sistema venga posto in essere ed, in genere, il previsto ciclo di vita del nuovo sistema;
- c. l'ambiente fisico, tecnologico, sociale, culturale nel quale sarà posto in essere il nuovo sistema, ed eventuali limiti alle possibili forme realizzative, derivanti dall'ambiente stesso o da Normative o Leggi applicabili.
- d. le risorse ambientali interessate dal ciclo di vita del sistema;
- e. le eventuali priorità in vista di parziale soddisfazione dell'esigenza di base.

Oggetto di questa fase di progetto non è la definizione di una possibile risoluzione ma l'identificazione, in maniera chiara, completa ed inequivocabile, dell'esigenza per la cui soddisfazione si chiede che venga posto in essere il nuovo sistema.

2.3.4 Planning preliminare.

Avendo definito l'esigenza di base, ancor prima di delineare qualunque possibile soluzione, è necessario impostare il planning preliminare dell'intero progetto, per poter prevedere la migliore organizzazione delle risorse disponibili in relazione alla natura del problema da risolvere.

E' chiaro che in questo momento dello sviluppo del progetto è possibile soltanto impostare una "trama" di planning, definita a livello di funzioni generali da svolgere o di problematiche generali da risolvere, perché il dettaglio di tali funzioni e problematiche dipende, tra l'altro, dalla natura del sistema da realizzare che non è ancora definito. Tuttavia, nonostante la necessaria generalità, il planning tracciato in questo momento è di grande utilità e importanza per gli sviluppi futuri.

Anzitutto la definizione dell'esigenza di base ha indicato la natura dei problemi da risolvere, l'ambiente e il ciclo di vita cui è destinato il sistema; di qui il planning preliminare può fissare fin dal principio il tipo di esperienze che è necessario coinvolgere per la migliore risoluzione e le fasi temporali in cui sarà necessario disporre delle diverse esperienze e delle diverse risorse.

Il planning preliminare costituisce inoltre una traccia che potrà essere sviluppata e integrata durante le successive fasi di progetto, ma non potrà essere immotivatamente smentita o ignorata senza pregiudizio per la qualità del sistema.

A proposito della fase di analisi di fattibilità il planning preliminare porta a individuare ed organizzare in maniera efficace le risorse disponibili implicate dalla definizione dell'esigenza di base. Per effetto del planning il processo di definizione del sistema da realizzare si articola in maniera organica, trovando adeguata e tempestiva risposta ai diversi interrogativi componenti e minimizzando le possibilità di errore derivante da omissioni o parziale o errata o tardiva risoluzione di problemi componenti.

2.3.5 Sviluppi tecnologici - Nuove applicazioni

Soddisfare l'esigenza di base presente in un certo contesto significa porre in essere un sistema inedito per quel contesto, o modificare in forma originale sistemi esistenti che risultano insufficienti, ovvero, infine, personalizzare sistemi esistenti adattandoli a situazioni specifiche.

Insita nella natura del progetto è dunque la capacità creativa di produrre e/o gestire innovazione, riferita tanto alla natura dei sistemi quanto alla loro forma realizzativa.

Una vasta e approfondita conoscenza dello sviluppo delle tecnologie afferenti ai problemi connessi con l'esigenza di base è senza dubbio un necessario strumento per l'analisi di fattibilità.

Dal confronto tra gli sviluppi tecnologici di settore e l'esigenza di base a volte ha origine una fase di Ricerca Applicata che può portare alla definizione di nuove applicazioni da integrare nella definizione del sistema da realizzare. Più frequentemente la conoscenza delle tecnologie di settore fornisce strumenti già maturi per essere composti, grazie alla fantasia e creatività del progettista, in forma di nuova applicazione per la soddisfazione dell'esigenza di base.

2.3.6 Proposta di risoluzione concettuale

Nota l'esigenza di base, considerate le possibilità offerte dagli ultimi sviluppi delle tecnologie applicabili alle problematiche in esame, l'analisi di fattibilità si sviluppa con la definizione di una proposta che, a livello concettuale, costituisce una possibile risoluzione, in quanto tecnicamente realizzabile, sia pur con il supporto della ricerca applicata, ed economicamente, in prima larga approssimazione, congruente con le risorse disponibili e con gli obiettivi prefissati.

La proposta di risoluzione concettuale consiste nel fornire indicazioni di primo approccio, giustificandone la fattibilità tecnica ed economica, riguardo a:

- a. la natura del sistema da porre in essere, che in genere si identifica con la tecnologia prevalentemente coinvolta (ad es. meccanica, eletromeccanica, elettronica, ecc);
- b. le caratteristiche particolari e innovative del sistema, quelle cioè che lo distinguono da altri sistemi esistenti e ne giustificano l'impegno di progetto;
- c. le funzioni potenzialmente svolte e le prestazioni attese dal sistema, comparate con l'esigenza di base, onde definire un livello di efficacia atteso;
- d. le interdipendenze con l'ambiente cui è destinato il sistema con particolare riguardo ai problemi della manutenzione, assistenza e supporto logistico durante l'intero ciclo di vita previsto;
- e. le problematiche di varia natura connesse con l'esercizio e la gestione del funzionamento del sistema, indicandone adeguate risoluzioni.

2.3.7 Valutazione preliminare della risoluzione concettuale

La risoluzione concettuale proposta costituisce un'ipotesi di possibile forma realizzativa sulla quale è opportuno fare accurate verifiche già in questa fase dello sviluppo del progetto.

Si tratta cioè di evitare di impegnare risorse nello sviluppo di una risoluzione destinata a soddisfare in misura insufficiente l'esigenza di base, ovvero di ottimizzare la definizione di una soluzione concettuale suscettibile di miglioramenti.

Il procedimento di valutazione dell'ipotesi si articola attraverso le seguenti fasi:

- a. traduzione dell'esigenza di base in parametri e/o attributi misurabili e definizione degli obiettivi da perseguire.
- b. identificazione dei componenti funzionali del sistema ipotizzato e parametrizzazione delle prestazioni
- c. modellizzazione analitica del sistema ipotizzato in relazione alla parametrizzazione preimpostata
- d. definizione di criterio di valutazione dell'efficacia della soluzione ipotizzata e valutazione della sensibilità di tale criterio al variare delle caratteristiche proprie della soluzione ipotizzata
- e. sviluppo del modello del sistema secondo il criterio di valutazione prescelto ed in relazione ai parametri ed attributi che definiscono l'esigenza di base
- f. eventuale ottimizzazione delle caratteristiche e prestazioni del sistema, secondo i risultati dell'analisi svolta sul modello;
- g. comparazione dei risultati attesi con gli obiettivi prefissati.

Si noti che la definizione del criterio di valutazione qui impostato deve restare unico al variare delle possibili soluzioni ipotizzate e, durante gli sviluppi successivi del progetto ogni criterio di valutazione di possibili alternative e/o sviluppi deve necessariamente essere congruente con il criterio qui definito.

Se il confronto tra i risultati attesi denunciati dal modello e gli obiettivi prefissati porta a giudicare inefficace la soluzione ipotizzata, il processo di definizione fin qui svolto sarà reiterato a partire dalla ricerca di possibili soluzioni alternative.

Quando le previsioni espresse dalla simulazione su modello sono tali da permettere una sufficiente fiducia nel successo del progetto, si adotta la soluzione concettuale ipotizzata e questa costituisce la linea guida per lo sviluppo di tutte le fasi successive.

2.3.8 Revisione del blocco Analisi di Fattibilità

Prima di procedere nello sviluppo del progetto è bene esaminare il blocco Analisi di Fattibilità nel suo complesso, verificandone la completezza e la significatività.

La valutazione realizzata in questo momento del ciclo del progetto ha come finalità quella di valutare preliminarmente, e con forte sforzo di astrazione, il progetto così come formulato. In questo modo è possibile già in fase di formulazione correggere quegli aspetti che con grande probabilità potrebbero compromettere la realizzazione del progetto stesso (ad esempio gli obiettivi sono ben specificati e coerenti con l'analisi di scenario, le azioni previste sono legate agli obiettivi).

Essendo state definite le specifiche per il progetto del sistema, sono a questo punto disponibili informazioni più complete e dettagliate per revisionare il modello del sistema ed esaminarne l'efficacia secondo il criterio di valutazione precedentemente determinato.

In questa fase vanno valutate correttamente la gestione dell'incertezza e la riflessione sulla probabilità del verificarsi di eventi: queste costituiscono in generale elementi cruciali per la robustezza e la buona riuscita del progetto. Le ipotesi da identificare descrivono le condizioni esterne (fattori) importanti per la bontà dell'intervento progettuale, ma che non sono controllabili dallo stesso intervento. Si applicano a livello delle attività, dei risultati e degli obiettivi specifici. Durante la fase di preparazione, si dovranno esaminare le probabilità di realizzazione di tali fattori e abbandonare la progettazione o riformulare il progetto se si saranno identificate delle condizioni cruciali ma difficilmente realizzabili, denominate ipotesi fatali (killer assumptions).

La valutazione può essere definita un processo di misurazione, di raccolta e di documentazioni relative all'andamento del progetto. Tuttavia il fine della valutazione realizzata in seguito alla fine del progetto, è di verificare che si siano raggiunti gli obiettivi programmati. La valutazione rientra e fa parte integrante del ciclo del progetto, ma occorre sottolineare che sono più di uno i momenti in cui è possibile e opportuno implementare un'attività valutativa. Qui viene realizzata la valutazione "ex ante", mentre nel corso delle fasi successive del progetto si realizza il monitoraggio come valutazione intermedia. A queste seguono la valutazione finale e la valutazione ex-post, come vedremo in seguito.

2.3.9 Definizione del progetto: requisiti funzionali e di progetto

È il momento logico in cui la soluzione concettuale assume i connotati generali del sistema da realizzare; è la prima definizione operativa del tema che deve essere svolto per porre in essere il sistema.

In questa fase, in primo luogo debbono essere considerati il contesto e lo scenario. Questo perché, una volta individuati i problemi (o le esigenze), questi sono considerati a proposito delle potenzialità e agli ostacoli che presenta il contesto. In genere, nella fase di identificazione del progetto si procede all'elaborazione del *logical framework (quadro logico)*, ossia della struttura logica del progetto: una matrice che visualizza tutti gli elementi essenziali del progetto, mettendone in evidenza le relazioni..

È inoltre questa la fase in cui si definiscono i documenti tecnici di primo livello da cui discendono tutte le elaborazioni successive.

Le specifiche del progetto del sistema riguardano, in genere, i seguenti argomenti:

- a. descrizione generale del sistema e della natura dei suoi componenti
- b. caratteristiche funzionali
- c. diagramma funzionale e definizione delle interconnessioni con l'ambiente
- d. esigenze proprie di manutenzione, assistenza e supporto logistico
- e. caratteristiche delle prestazioni attese
- f. caratteristiche fisiche
- g. attributi di affidabilità, disponibilità, manutenibilità
- h. ergonomia ed altri
- i. documentazione costruttiva
- j. definizione di test funzionali
- k. controllo di qualità e test di accettazione

Prima di pensare a progettare ex-novo ciascuna delle unità componenti, è quanto mai opportuno verificare, tramite un'accurata ricerca, quante e quali di tali unità possono essere acquistate sul mercato. Piuttosto che impiegare risorse a riprogettare ciò che già esiste, è preferibile concentrare le energie nel progetto di prodotti inediti, acquistando, se possibile, quanto offerto dal mercato, che, tra l'altro, ha anche il pregio di essere stato selezionato dalla esperienza già maturata.

La ricerca di quanto disponibile sul mercato, porta in genere ad individuare:

-
- ✓ unità che trovano esauriente riscontro in prodotti disponibili sul mercato, che pertanto vengono identicamente adottate, come parti componenti il sistema;
 - ✓ unità che risulta conveniente modificare in parte, pur di poter utilizzare prodotti commercialmente disponibili; conseguentemente si provvede a modificare ed aggiornare la allocazione delle prestazioni fino ad esaurire questa categoria di unità;
 - ✓ unità che non trovano riscontro conveniente in alcuna delle apparecchiature disponibili in commercio: per queste unità è necessario tracciare soluzioni realizzative inedite.

In genere le unità di un sistema che richiedono soluzioni realizzative inedite sono quelle che pongono in essere le caratteristiche originali proprie del sistema: quindi le unità specificamente tecnologiche, quelle che determinano interdipendenze funzionali di particolare originalità o quelle derivanti dalla personalizzazione del sistema, cioè dal suo adattamento a particolari specifiche esigenze individuali.

Queste unità, ancorché non dettagliatamente definite, devono essere circostanziatamente descritte, in modo che la bozza di configurazione risulti completa in ogni sua parte.

2.3.10 Valutazione finale ed ex-post del progetto

La valutazione finale si colloca, dal punto di vista temporale, nel momento in cui il progetto è appena terminato o terminato da poco tempo. In questo caso l'oggetto della valutazione è l'obiettivo specifico del progetto e, in particolare, il grado di raggiungimento dei risultati attesi, alla luce delle modalità con cui sono state portate a termine le attività previste.

La valutazione ex post viene realizzata dopo un certo lasso di tempo dalla fine del progetto, un anno o un tempo più prolungato a seconda della complessità del progetto. Si parla, in questo caso, di **valutazione d'impatto**, ed è questa la tipologia di valutazione che permette di esprimere un giudizio circa il grado di raggiungimento dell'obiettivo generale.

2.3.11 Realizzazione

La fase di realizzazione è quella in cui, una volta approvato, il progetto viene effettivamente implementato. In questa fase vengono mobilitate tutte le risorse necessarie per la realizzazione delle attività. Viene inoltre ufficializzato il team del progetto (locale ed internazionale) e vengono validate e programmate le attività previste.

Nella fase di realizzazione del progetto sono importanti due elementi:

- - la Gestione del progetto (finanziaria, del personale, dei materiali...)
- - il Monitoraggio, ossia la costante opera di confronto sull'andamento delle attività realizzate e la raccolta della documentazione che permettono di individuare eventuali "distorsioni" del progetto e, quindi, possibili soluzioni per non comprometterne la realizzazione. È dunque una fase di valutazione intermedia del progetto che si avvale dell'uso degli indicatori oggettivi di misurabilità definiti in fase di progettazione.

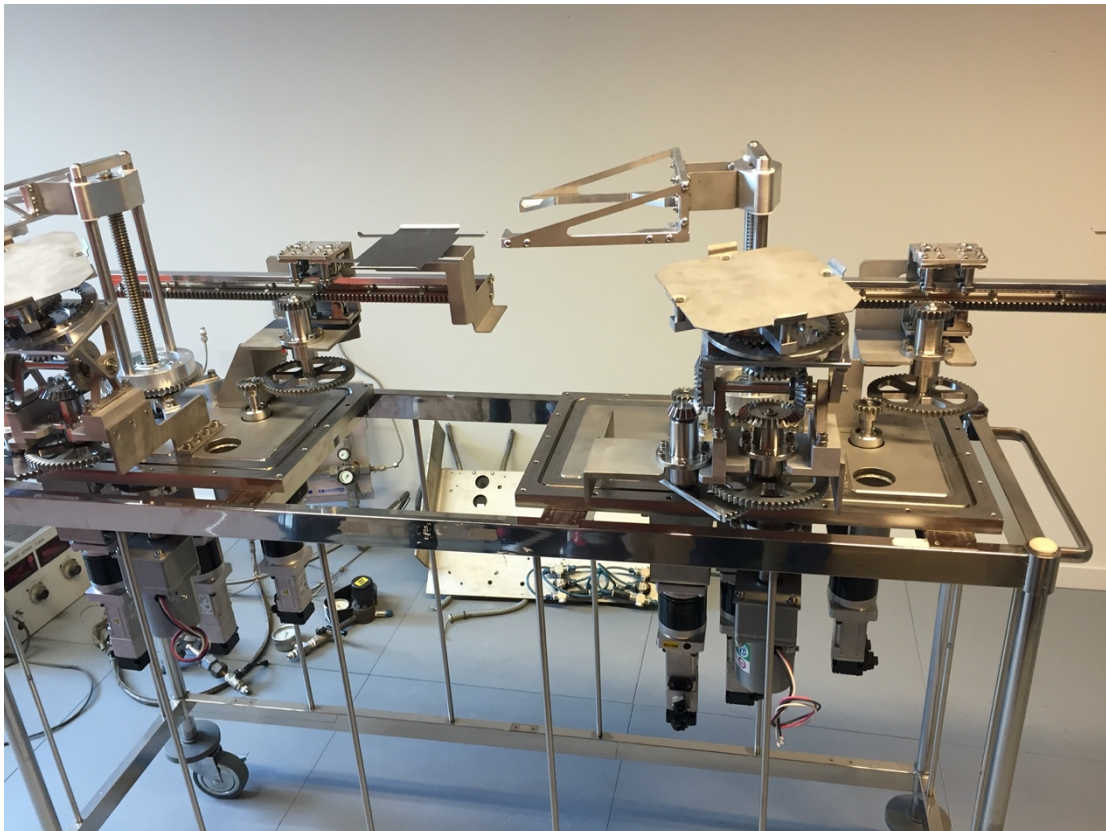


Figura 6 - Fase di verifica cinematica di un sistema

3 PARTE SECONDA: STRUMENTI PER IL PROGETTO DI UN SISTEMA.

3.1 Disegno, Calcolo, Pianificazione, Metodi Economici E Statistici

Ogni Progetto di Sistema costituisce una realtà individuale, caratterizzata da componenti innovative ed inserita nel particolare contesto che ne ha determinato la motivazione. Ciò porta di conseguenza che la totalità degli strumenti necessari al miglior compimento del Progetto può essere definita soltanto in relazione alla natura ed alle caratteristiche proprie che individuano ciascun Sistema da progettare.

Si può genericamente affermare che la totalità delle cognizioni afferenti alla professione di ingegnere è da intendersi come mezzo potenzialmente necessario all'attività del Progettista. Tuttavia, volendo focalizzare l'attenzione su componenti più particolari, si possono riconoscere come strumenti necessari al Progetto, indipendentemente dalla specificità del Sistema, numerose attitudini tra le quali è utile ricordare:

- a. **la Ricerca**
- b. **il Calcolo**
- c. **il Disegno**
- d. **il Planning**
- e. **il metodo di confronto di alternative**
- f. **il metodo di valutazione economica delle alternative.**

3.2 Ricerca

Si è più volte osservato che caratteristica essenziale per la validità di un progetto è la sua componente innovativa che può derivare dal fatto di porre in essere un sistema inedito, o modificare in forma originale sistemi esistenti per ottenere prestazioni inedite, ovvero, infine, personalizzare sistemi esistenti adattandoli a situazioni specifiche.

Poiché le risorse disponibili per il Progetto di un Sistema sono sempre e comunque limitate, è opportuno che esse vengano impegnate prevalentemente nello sviluppo dell'innovazione piuttosto che nella ripetizione di progetti già realizzati, per i quali può essere sufficiente una buona conoscenza delle caratteristiche e prestazioni.

In ogni caso, una volta che l'esigenza di base è stata definita, è necessario dunque avviare una fase di **Ricerca Tecnologica**, mirata ad acquisire la conoscenza più

completa possibile delle più aggiornate proposte e possibilità tecnologiche che possono in qualche forma influire sulle scelte del Progetto da sviluppare.

Questa Ricerca Tecnologica, oggi facilitata da possibilità di accesso alla consultazione di banche dati internazionali, in genere è articolata in:

- ✓ Ricerca bibliografica; estesa alla letteratura tecnica pertinente l'argomento del Progetto;
- ✓ Ricerca brevettuale; intesa a definire, mediante la consultazione degli archivi specializzati, l'eventuale esistenza di limitazioni alle possibili soluzioni, derivanti da diritti di proprietà intellettuale;
- ✓ Ricerca documentale; estesa agli archivi propri del team di progettazione è intesa a verificare la possibilità di utilizzare nel nuovo Progetto soluzioni già adottate con successo nell'ambito di progetti già realizzati;
- ✓ Ricerca sul mercato, condotta allo scopo di individuare eventuali proposte di soluzione, anche parziali, disponibili sul mercato in forma collaudata e garantita;
- ✓ Ricerca Applicata; è una attività teorico-sperimentale che viene sviluppata allo scopo di verificare se, in quale forma applicativa e con quali effetti, alcuni risultati della Ricerca di Base possono essere utilizzati per la definizione di soluzioni di progetto. La Ricerca Applicata può essere svolta all'interno del team di progettazione, ovvero, come più spesso accade, può costituire compito precipuo di un apposito Servizio parallelo al team.

Le informazioni raccolte in esito a queste ricerche, consentono di completare l'analisi funzionale e definire la configurazione di riferimento per il Sistema da sviluppare, evidenziando i sottoinsiemi innovativi (ovvero gli aspetti innovativi della sintesi di sistema) rispetto a quelli che possono ritenersi sufficientemente conosciuti e collaudati.

Ciò che è oggetto di innovazione dunque, in quanto caratterizzante il valore del Progetto, costituisce argomento di primo impegno per il Progettista.

La definizione delle soluzioni innovative è, in sostanza, la formalizzazione della creatività del Progettista, giustificata dall'esito di calcoli, schematizzazioni e simulazioni di verifica.

Spesso la complessità dell'argomento o la criticità della relativa decisione di progetto impone di supportare la definizione delle soluzioni innovative con una fase di Verifica Sperimentale condotta su Modelli o su Prototipi.

Si noti che la Verifica Sperimentale su Modelli e Prototipi è comunque necessaria per la validazione dell'intero Sistema in diversi momenti del suo ciclo di vita, come l'avvio della produzione, la certificazione di qualità, le omologazione ecc.

3.3 Il calcolo

È a tutti immediatamente evidente quale sia l'importanza del Calcolo come strumento di Progetto, tanto da rendere superflua ogni considerazione in merito.

Può essere invece opportuno proporre alcune riflessioni riguardo alla forma in cui si tende ad utilizzare tale strumento nel Progetto di Sistemi.

In genere, nel Progetto il calcolo viene utilizzato prevalentemente per:

- ✓ interpretare dati rilevati sperimentalmente;
- ✓ prevedere un determinato comportamento sulla base di una schematizzazione che può essere di natura fisica, economica, ecc., per assegnare dimensioni definite alle caratteristiche di un prodotto.

In entrambi i casi il Progettista è consapevole del fatto che *il risultato del calcolo fornisce una descrizione della realtà, che è solo **probabilmente, e non certamente, vera.***

L'interpretazione dei dati sperimentali, infatti, è affetta dalla aleatorietà propria del manifestarsi dei fenomeni fisici, e la previsione dei comportamenti dipende dalla validità delle schematizzazioni adottate, validità che è fondata essenzialmente sull'interpretazione di fenomeni sperimentali.

Ne deriva che oggetto del calcolo a base del Progetto di Sistemi non è determinare valori certamente veri (**approccio deterministico**), ma valori caratterizzati dalla probabilità loro associata di manifestarsi come veri (**approccio probabilistico**).

In funzione della criticità della scelta di progetto da definire il Progettista si orienta su valori accreditati di un livello di probabilità più o meno alto, ma il calcolo probabilistico è lo strumento che viene utilizzato anche per i progetti che richiedono la massima precisione, per Sistemi destinati a missioni di importanza capitale.

Il necessario approccio probabilistico e la crescente concorrenzialità e sofisticazione dei Sistemi oggetto del Progetto, incrementa notevolmente il volume dei calcoli da sviluppare.

L'utilizzo di sistemi di calcolo elettronici è quindi sempre più necessario per lo sviluppo ottimale del Progetto, sia in fase di definizione, che di realizzazione ed esercizio del sistema.

Un esempio, significativo per la sua larghissima e crescente diffusione, è costituito dal **Metodo di Calcolo agli Elementi Finiti** (F.E.M. Finite Element Method).

Il Metodo, ormai fondamentale in tutti i settori dell'Ingegneria, è esprimibile interamente in forma matriciale. Esso consiste nel considerare il continuo come giustapposizione di elementi poliedrici discreti, di dimensioni finite, il cui numero e la cui forma possono essere prefissati in funzione delle caratteristiche da esaminare. La grandezza fisica che influenza il continuo, può essere ripartita nelle componenti che influiscono su ciascun elemento finito, caratterizzato dai vertici e dagli spigoli che lo individuano. Verificando le condizioni di continuità e congruenza tra elementi adiacenti, si analizza la distribuzione della grandezza fisica all'interno del continuo, con l'approssimazione della suddivisione impostata.

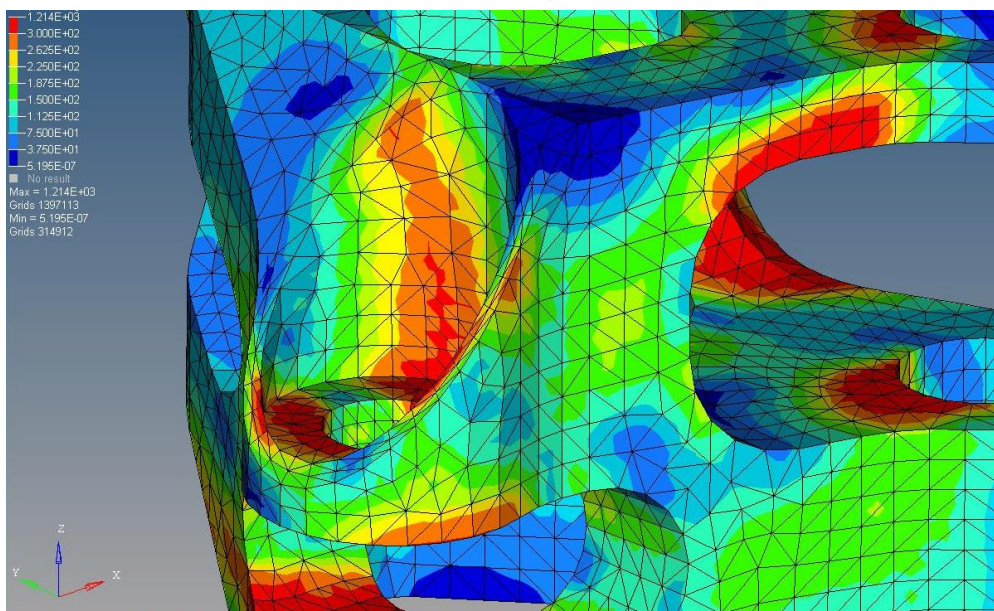


Figura 7-Esempio di applicazione F.E.M. per lo studio delle sollecitazioni di un componente meccanico complesso

3.4 Metodi statistici e probabilistici

A mano a mano che, con il progresso tecnologico, crescono le aspettative riguardanti un sistema, sia in termini di prestazioni che di economia di esercizio, cresce l'esigenza di valutare con maggior precisione le fondamentali variabili di progetto.

I conseguenti approfondimenti, sia teorici che sperimentali, dimostrano che alle grandezze fisiche, cui tali variabili si riferiscono, molto raramente si possono imputare valori univocamente determinati: più frequentemente esse sono descrivibili mediante distribuzioni di valori da interpretare opportunamente.

Per il Progettista diviene dunque sempre più necessario essere in grado di utilizzare metodi statistici e probabilistici, ai fini della migliore definizione del progetto del sistema.

Limitandosi in questa sede a richiamare alcuni concetti elementari, si vuole sottolineare la grande importanza di un sistematico approfondimento della materia, laddove questi non siano già stati affrontati in altri corsi specialistici.

3.4.1 Concetti elementari.

Si è detto che l'osservazione dettagliata di grandezze fisiche, siano esse derivanti da fenomeni naturali o prodotte artificialmente, molto spesso mostra che esse, anche in circostanze ritenute perfettamente equivalenti, non assumono sempre lo stesso determinato valore, ma tendono a manifestare valori dispersi, ovvero distribuiti, entro un campo di apprezzabile ampiezza, secondo proprie modalità.

Ad esempio la temperatura atmosferica alle ore 12.00 del 15 agosto in una certa località, non si ripete identicamente ogni anno, ma i rilievi mostrano una dispersione casuale di valori entro un intervallo di ampiezza misurabile. Così il diametro di un asse ottenuto da tornitura: ripetendo la lavorazione in condizioni assolutamente ripetitive (il che è irrealizzabile nella pratica) non si otterrebbe sempre la stessa misura, ma una dispersione casuale di valori da interpretare correttamente. Anche riferendosi ad uno solo degli assi prodotti da tornitura e misurando in maniera conforme più volte lo stesso diametro, si ottengono, come è noto, valori dispersi in modo casuale che richiedono una adeguata interpretazione.

Se si deve prendere una decisione sulla previsione della temperatura alle ore 12.00 del prossimo 15 agosto, o sulla dimensione del diametro prodotta dalla prossima tornitura o prevedere il prossimo valore misurato sullo stesso diametro, si deve in sostanza valutare la probabilità che si manifesti un certo valore compreso entro il campo coperto dalla distribuzione casuale. Tale probabilità è determinabile sulla base delle osservazioni sperimentali già condotte sulla modalità di presentazione della variabile in esame, per la quale l'applicazione dei metodi statistici mostra che, se è vero che resta assolutamente casuale il fatto che il singolo rilievo (*evento*) assuma uno qualunque dei valori compresi nel campo coperto dalla distribuzione dei valori sperimentali, è pur vero che è insita nel fenomeno analizzato la tendenza a dar luogo ad una certa forma della distribuzione piuttosto che ad un'altra. Da ciò deriva il fatto che i valori delle misure di uno stesso diametro tendono ad addensarsi intorno al "valore vero" di tale misura che resta incognito, così come i valori dei diametri ottenuti da tornitura tendono ad addensarsi intorno al valore nominale e la temperatura a mezzogiorno del 15 agosto, alle nostre latitudini è, comunque, tra le più elevate dell'anno solare.

La probabilità del manifestarsi di un fenomeno secondo certe modalità è dunque determinabile in base alla tendenza del fenomeno stesso a manifestarsi secondo modalità ripetitive, per cui, se anche il singolo evento assume in modo casuale uno qualunque dei valori possibili, l'insieme degli eventi che caratterizzano il fenomeno tende a descrivere un andamento ripetitivo e, in certe condizioni, costante.

Da questi concetti discendono le principali definizioni di probabilità:

- ✓ **Probabilità a posteriori:** la probabilità del manifestarsi di un certo evento è il limite cui tende, al crescere indefinito delle osservazioni sperimentali, il rapporto tra il numero di prove in cui tale evento si manifesta ed il numero totale di prove.
- ✓ **Probabilità a priori:** la probabilità del manifestarsi di un certo evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al suo manifestarsi ed il numero totale dei casi, tutti ugualmente possibili.

Nella definizione della probabilità a priori, si suppone che la struttura del fenomeno da analizzare sia fisicamente nota al punto di poter predeterminare quali e quanti siano gli eventi possibili. È il caso del lancio di una moneta: se gli eventi possibili sono soltanto due (testa o croce) ciascun evento ha probabilità a priori pari a 1/2.

Quando la struttura del fenomeno non è nota al punto di poter prevedere tutti i possibili eventi, la probabilità va intesa come limite della frequenza relativa di ciascun evento sperimentato, cioè come probabilità a posteriori.

Si noti che la "probabilità vera" del manifestarsi di un evento futuro resta comunque incognita, anche quando è disponibile la valutazione della probabilità a priori propria del fenomeno in esame. Ad esempio non può dirsi che, per il prossimo lancio della stessa moneta già utilizzata per precedenti prove, la probabilità vera del manifestarsi di testa (o croce) sia esattamente pari a 0,5, perché non è certo che nelle reali condizioni in cui avverrà il prossimo lancio non ci sia una tendenza al manifestarsi di una piuttosto che dell'altra modalità, dovuta a circostanze accidentali o ad una sopravvenuta asimmetria della moneta stessa.

Ciò significa che, in generale, anche quando sia disponibile una valutazione della probabilità a priori, nelle pratiche applicazioni è comunque utile costruire opportune verifiche sperimentali del comportamento del fenomeno in esame.

Il problema del calcolo delle probabilità si articola dunque in tre distinti momenti logici:

- l'*osservazione* sperimentale,
- l'*interpretazione* del comportamento del fenomeno
- la *previsione* del suo comportamento nelle future circostanze di pratico interesse.

La **Statistica Descrittiva** quella parte del calcolo delle probabilità che tratta la gestione delle osservazioni sperimentali e la loro interpretazione mediante adeguati strumenti di analisi.

La **Statistica Inferenziale** o Statistica Induttiva è quella parte del calcolo delle probabilità che mira a "inferire", cioè a definire comportamenti costanti, di validità generale, basandosi sulle osservazioni elaborate dalla statistica descrittiva, che necessariamente sono riferite ad un limitato numero di situazioni sperimentali. Si tratta di un procedimento induttivo mediante il quale si giunge ad imputare, ai fenomeni esaminati, proprietà e caratteristiche costanti e ripetitive, valide in generale, in base all'interpretazione del limitato numero di osservazioni sperimentali di cui si dispone. In sintesi, cioè, dall'analisi del comportamento del *campione* si giunge a

definire forme di comportamento valide in generale per l'intera *popolazione* o *universo*.

Nel calcolo delle probabilità i termini *universo* e *popolazione* sono tra loro intercambiabili. Una popolazione è definita da un insieme di elementi contenuti entro confini arbitrariamente predeterminati, ovvero che possiedono predeterminate caratteristiche di appartenenza. La popolazione può essere di numerosità finita o infinita.

Il campione è una parte della popolazione, la sua numerosità può variare dall'unità fino a quella della popolazione stessa, in questo caso il campione si identifica con l'intera popolazione. Il campione è composto di elementi; il manifestarsi di un elemento secondo certe modalità di presentazione si dice evento.

Le condizioni da verificare perché il campione possa essere inteso come rappresentativo del comportamento dell'intera popolazione costituiscono ampia materia di approfondimento del metodo di indagine statistica e meritano una dettagliata trattazione nella sede opportuna.

In prima larga approssimazione è opportuno notare che al crescere della numerosità del campione l'applicazione dei metodi della statistica induttiva produce risultati maggiormente significativi, e che, comunque, è necessario che, all'interno del campione, ciascun evento abbia la stessa possibilità di manifestarsi: gli elementi all'interno del campione devono cioè essere selezionati in maniera assolutamente casuale.

Si può in generale fare riferimento a tre distinte categorie di eventi:

- ✓ Eventi *mutuamente escludentisi*; corrispondenti al caso in cui il manifestarsi di un evento secondo la modalità A esclude a priori la possibilità del contemporaneo manifestarsi secondo una distinta modalità B: è il caso del lancio della moneta o di un dado: il manifestarsi di una faccia esclude la possibilità del contemporaneo manifestarsi di una qualunque delle altre facce.

La probabilità del manifestarsi o di una o di un'altra possibile modalità, per eventi mutuamente escludentisi è data dalla somma delle probabilità del manifestarsi di ciascuna modalità separatamente (teorema dell'addizione).

Così:

per una moneta $P(\text{testa o croce}) = P(\text{testa}) + P(\text{croce}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

per un dado $P(\text{una qualunque delle 6 facce}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

- ✓ Eventi *indipendenti*; corrispondenti al caso in cui al manifestarsi di un evento secondo la modalità A è associata una probabilità che non dipende dal fatto che si sia o no manifestato un distinto evento con modalità B. In questo caso la probabilità del manifestarsi di entrambi gli eventi A e B (contemporaneamente o in successione) è data dal prodotto delle probabilità distinte associate all'evento A e all'evento B. (Teorema del prodotto).

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ad esempio la probabilità di forare contemporaneamente, ovvero in successione durante lo stesso viaggio, due ruote della stessa autovettura in marcia, è data dal prodotto delle probabilità distinte di forare ciascuna ruota indipendentemente da quanto è accaduto all'altra.

Così la probabilità di ottenere due volte di seguito testa nel lancio della moneta (ciò che rende indipendenti gli eventi, in questo caso, è il trattarsi di due distinti lanci) è dato da:

$$P(2 \text{ volte testa}) = 0.5 \times 0.5 = 0.25.$$

- ✓ Eventi *dipendenti*; corrispondenti al caso in cui al manifestarsi di un evento secondo la modalità B è associata una probabilità condizionata dal fatto che si sia o no manifestato un distinto evento con modalità A.

La probabilità del manifestarsi di due eventi dipendenti è data dalla probabilità del manifestarsi di uno dei due eventi moltiplicata per la probabilità del manifestarsi dell'altro evento, valutata nell'ipotesi che il primo evento si sia verificato. (Teorema della probabilità condizionata).

Si voglia ad esempio valutare la probabilità di estrarre, con i primi due tentativi, due palle bianche da un'urna contenente tre palle bianche e due nere: al primo tentativo la probabilità di estrarre una palla bianca è pari a $\frac{3}{5}$: essendosi verificato il primo evento, l'urna contiene due palle bianche e due nere, per cui la probabilità di estrarre

una palla bianca al secondo tentativo è diventata pari a $2/4$; di conseguenza la probabilità cercata è:

$$P(A,B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$$

3.4.2 Funzioni di Distribuzione.

L'osservazione sperimentale di un fenomeno, fornisce un insieme più o meno numeroso di dati che devono essere organizzati ed analizzati secondo i metodi della statistica descrittiva.

Un primo passo consiste in genere nel raggruppare entro categorie omogenee i rilievi disponibili e rappresentarli sotto forma di istogramma.

Ad esempio, riferendosi alla tornitura cilindrica di assi, le misure condotte su un campione opportunamente prelevato dalla popolazione in esame, abbiano fornito una massa di dati corrispondente all'istogramma in figura, con in ordinata il numero di eventi:

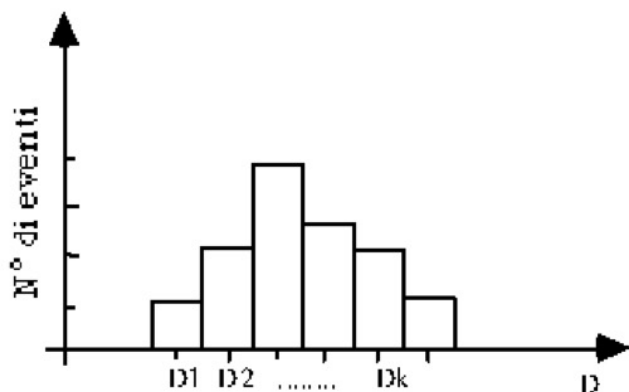


Figura 8 istogramma

Ogni categoria omogenea (intervallo) corrisponde ad un determinato valore del diametro.

Si può quindi procedere a normalizzare i valori in ordinata, dividendo l'altezza di ciascun rettangolo, che rappresenta il numero di eventi che ricadono in quella categoria, per il numero totale di eventi rilevati ed ottenendo così la frequenza propria di ciascuna categoria. Anche i valori in ascissa possono essere normalizzati, dividendo il valore rappresentativo di ciascun intervallo (ad esempio, il valore centrale) per un valore di riferimento opportunamente scelto (ad esempio il massimo tra i valori misurati, o il valore medio, o il valore nominale D_N).

L'istogramma così modificato si presenta come in figura;

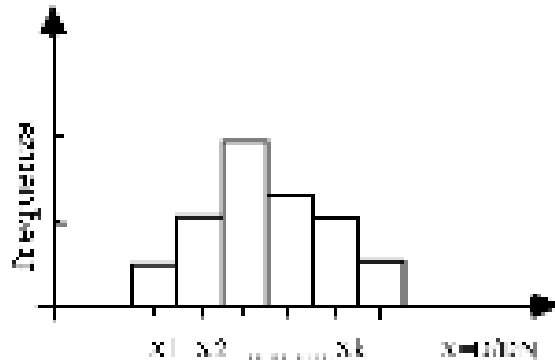


Figura 9 - istogramma modificato delle frequenze

Già questo primo livello di organizzazione dei dati sperimentali permette di cominciare a caratterizzare il fenomeno in esame dal punto di vista statistico. L'istogramma fornisce una prima indicazione dell'andamento delle frequenze al variare delle categorie ed è possibile calcolare la tendenza del fenomeno a manifestarsi secondo certe modalità piuttosto che altre attraverso la misura della *tendenza centrale* e della *dispersione*.

La misura della tendenza centrale di un insieme di dati, viene comunemente espressa tramite il valore della **media** calcolato come:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Se i dati disponibili sono raggruppati in k categorie (intervalli), ciascuna con valore centrale X_i , ed è nota la frequenza f_i propria di ciascuna categoria, la media si può calcolare come:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2 + \dots + f_k \cdot X_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k}$$

essendo $\sum_{i=1}^k f_i = n$

La **mediana** è un'altra misura di tendenza centrale, definita come quel valore dell'ascissa che divide in due parti uguali l'area sottesa dal diagramma rappresentativo dell'insieme di dati.

La **moda** infine è un'ulteriore misura della tendenza centrale, definita come quel valore dell'ascissa cui corrisponde la massima frequenza; nel caso di istogramma la moda è rappresentata dal valore centrale dell'intervallo cui corrisponde la massima frequenza.

Oltre a conoscere la tendenza centrale di un insieme di dati è utile misurare quanto essi tendano ad addensarsi intorno a tale valore, cioè la loro *dispersione*; per questa informazione sono disponibili le seguenti misure:

- ✓ **ampiezza del campo**; è data semplicemente dalla differenza tra il maggiore ed il minore tra i dati esaminati: è una misura poco significativa.
- varianza**; è la misura comunemente usata per la valutazione della dispersione; essa può essere calcolata come:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Allo scopo di snellire il calcolo, la stessa espressione può essere modificata nella forma seguente:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}{n}}{n - 1}$$

ovvero, se i dati disponibili sono raggruppati in k categorie (intervalli), ciascuna con valore centrale X_i , ed è nota la frequenza f_i propria di ciascuna categoria, la varianza può esprimersi nella forma:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot (X_i)^2 - \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^k (f_i \cdot X_i) \right)^2 \right]}{n}}{n - 1}$$

Mediante l'applicazione di opportune tecniche di interpolazione e regressione, l'istogramma delle frequenze può essere convertito sotto forma di funzione continua. Si ottengono così le curve continue che, in sede di interpretazione di valori

sperimentali, rappresentano la *distribuzione delle frequenze* ed in sede di previsione del comportamento di un fenomeno, descrivono la *distribuzione della densità di probabilità* (p.d.f.).

Se $f(x)$ è una distribuzione di densità di probabilità, allora:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = p(a \leq x \leq b)$$

fornisce la misura della probabilità che la variabile x assuma un valore compreso tra a e b . Ovviamente si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = p(-\infty \leq x \leq \infty) = 1$$

e, in generale, l'integrale esteso a tutto il campo di definizione della p.d.f. è uguale alla probabilità unitaria, cioè alla certezza.

L'applicazione dei metodi della statistica descrittiva permette di osservare che, in dipendenza dalla natura del fenomeno esaminato, possono definirsi alcune "categorie" di comportamento, cioè alcune forme di distribuzione, cui i dati sperimentali tendono ad uniformarsi e per le quali sono disponibili modelli matematici interpretativi.

3.4.3 La Distribuzione Binomiale.

Il modello matematico della distribuzione binomiale è utilizzabile per l'indagine di fenomeni la cui modalità di presentazione varia in modo discreto. In particolare il modello è applicabile per valutare la probabilità di verificare esattamente x eventi favorevoli su n eventi sperimentati, riguardanti un fenomeno per il quale ciascun evento ha una probabilità a priori costante e per tutti uguale a p . Il requisito della costanza della probabilità p si realizza quando la popolazione campionata è di numerosità infinita, ovvero quando ad ogni estrazione dalla popolazione corrisponde una uguale immissione di elementi di uguale caratteristica.

La probabilità di verificare x eventi favorevoli, mediante n tentativi per eventi che hanno probabilità costante di manifestarsi pari a p , è data da:

$$P(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \quad 0 \leq x \leq n \quad q = 1 - p$$

$$\text{Media} = n \cdot p$$

$$\text{Varianza} = n \cdot p \cdot q$$

A titolo di esempio di applicazione della distribuzione binomiale, si voglia valutare la probabilità di ottenere due volte "testa" da 5 lanci di una moneta ben equilibrata: la probabilità costante è $p=0,5$; il numero di eventi favorevoli è $x=2$ e il numero di tentativi è $n=5$, per cui:

$$P(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot (0,5)^2 \cdot (1-0,5)^{(5-2)} = 10 \cdot 0,03125 = 0,3125$$

Volendo costruire la distribuzione si dovrebbe ripetere il calcolo rispettivamente per $x=1,2,3,4,5$ ottenendo l'istogramma in figura:

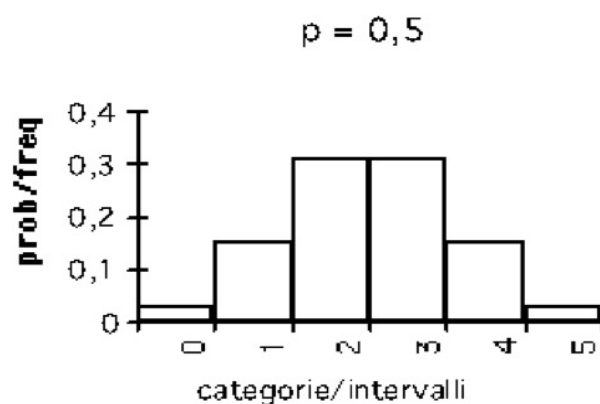


Figura 10 - istogramma prob./freq.

Si noti che l'istogramma mostra un andamento simmetrico che dipende dal fatto che nell'esempio la probabilità costante p è pari a 0,5. Per $p < 0,5$ si nota un addensarsi dei valori verso sinistra; per $p > 0,5$ l'istogramma si deforma verso destra, come nella figura seguente.

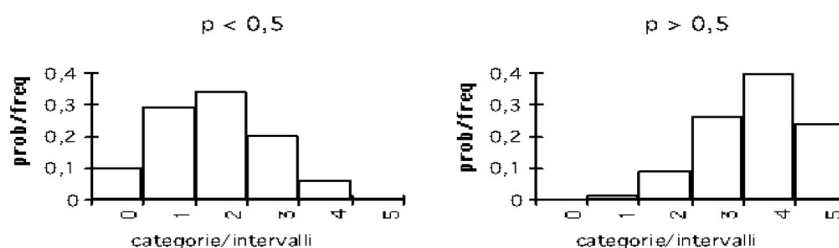


Figura 11 - istogrammi per la distribuzione binomiale

3.4.4 La Distribuzione di Poisson.

La distribuzione di Poisson si applica all'interpretazione di fenomeni descrivibili mediante variabili discrete, quando l'evento favorevole ha numerose occasioni per manifestarsi ma la probabilità del suo manifestarsi è relativamente bassa.

Secondo il modello di Poisson, la probabilità di verificare esattamente x eventi favorevoli di probabilità p all'interno di un campione di n elementi è:

$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$\text{Media} = \text{Varianza} = \mu = n \cdot p$$

Come esempio di applicazione del modello di Poisson, ci si riferisca ad un campione di 100 elementi estratti a caso da una popolazione contenente una percentuale di elementi difettosi pari all'1%. La probabilità di avere esattamente 3 elementi difettosi nel campione è data da:

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,01 = 1$$

$$P(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = 0,061$$

Il modello di Poisson può essere usato anche come approssimazione della distribuzione binomiale, quando n è sufficientemente grande e p relativamente piccolo ed in generale quando il prodotto $np < 5$.

3.4.5 La Distribuzione Uniforme.

La distribuzione uniforme o rettangolare, il cui andamento è rappresentato in figura:

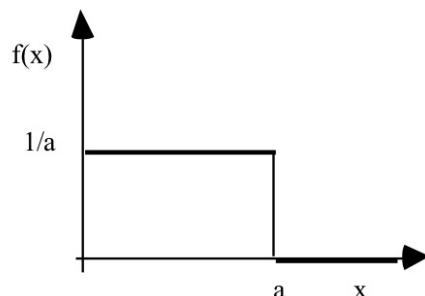


Figura 12 - distribuzione uniforme

può essere utilizzata sia per variabili discrete che per variabili continue. In questo caso si esprime semplicemente come:

$$f(x) = \frac{1}{a} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\text{Media} = \frac{a}{2} \quad \text{Varianza} = \frac{a^2}{12}$$

La variabile x , la cui probabilità di cadere nell'intervallo di definizione $[0-a]$ è ovviamente unitaria, può essere discretizzata suddividendo l'intervallo di definizione in $n+1$ intervalli numerati da 0 ad n .

In questo caso le misure di tendenza centrale si modificano in:

$$\text{Media} = \frac{n}{2} \quad \text{Varianza} = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6}$$

3.4.6 La Distribuzione Esponenziale.

La Distribuzione esponenziale corrisponde al modello matematico espresso come:

$$f(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{x}{a}}$$

$$\text{Media} = a \quad \text{Varianza} = a^2$$

il cui andamento è illustrato in figura:

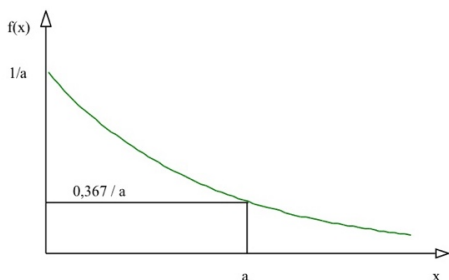


Figura 13 - distribuzione esponenziale

3.4.7 La Distribuzione Normale o Gaussiana.

E' certamente il modello matematico di uso più frequente. Esso si applica a fenomeni descrivibili mediante variabili continue, come quelle che riguardano gran parte dei fenomeni naturali.

La distribuzione normale può essere espressa nella forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\text{Media} = \mu \quad \text{Varianza} = \sigma^2$$

il cui andamento è rappresentato in figura:

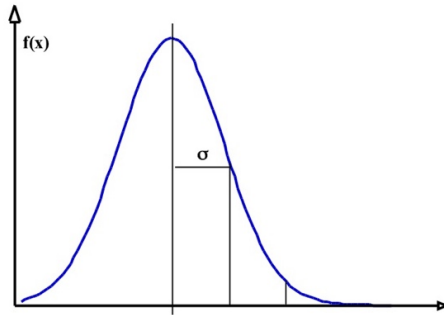


Figura 14 - distribuzione normale

La distribuzione normale gode di alcune proprietà caratteristiche:

- ✓ è definita tra meno e più infinito
- ✓ è simmetrica intorno al valore centrale coincidente con la media, con la mediana e con la moda;
- ✓ il valore dello scarto quadratico medio σ è misurato dalla distanza dei punti di flesso dal valore centrale; può assumere un qualunque valore positivo ed è una efficace misura della dispersione dei valori come appare dalla seguente figura:

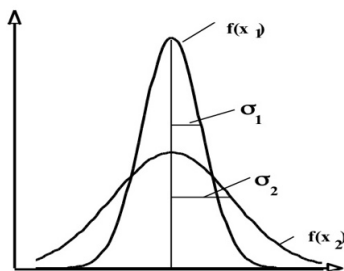


Figura 15 - caratteristiche della distribuzione normale

- ✓ per $f(x)$ normalizzate, l'area sottesa dalla curva entro un intervallo $[\sigma; +\sigma]$ rappresenta una quota parte del campione pari a circa il 68,27%;
- ✓ per un intervallo $[-2\sigma; +2\sigma]$ l'area sottesa corrisponde al 95,45%;
- ✓ per un intervallo $[-3\sigma; +3\sigma]$ l'area sottesa è circa pari al 99,73 % della numerosità del campione.

La distribuzione normale può essere espressa nella sua forma **standard**, caratterizzata dal fatto di avere valor medio nullo e varianza unitaria.

Ciò si ottiene operando la sostituzione di variabile:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

e verificando la condizione:

$$f(x) \cdot dx = \phi(z) \cdot dz$$

Dalle due precedenti posizioni deriva:

$$\Phi(z) = \frac{f(x) \cdot dx}{dz} \quad dz = \frac{dx}{\sigma}$$

da cui $\Phi(z) = \sigma \cdot f(x)$

e in definitiva $\Phi(z) = \frac{\sigma}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2}$

L'andamento della $\Phi(z)$ è rappresentato nella figura seguente: si noti il valore medio nullo e lo scarto quadratico medio unitario.

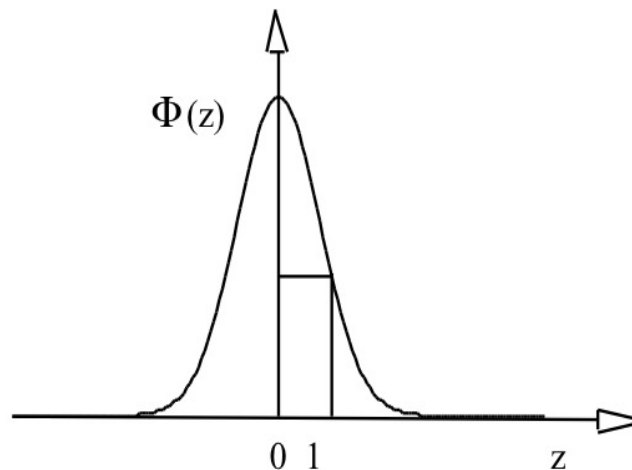


Figura 16 - normale standard

Riferirsi a funzioni normali standard risulta di particolare utilità perché queste, proprio per la loro caratteristica di avere valor medio nullo e varianza unitaria vengono comunemente proposte in forma numerica tabellare (vedi Appendice B), offrendo, tra l'altro, la possibilità di leggere immediatamente i valori delle aree sottese dalla curva per intervalli noti della variabile.

Si ricorda che l'area sottesa da una curva di densità di probabilità è la misura della probabilità stessa, per cui

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = P(a \leq x \leq b)$$

esprime la probabilità che la variabile x assuma un valore compreso tra a e b .

3.4.8 La Distribuzione Gamma.

La Distribuzione Gamma a due parametri corrisponde alla seguente espressione analitica:

$$f(x) = \frac{1}{\eta \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\frac{x}{\eta}}$$

con β = fattore di forma η = fattore di scala

$\Gamma(\beta)$ è un funzione matematica disponibile in forma tabellare (Appendice C) espressa come:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\beta-1} \cdot dt \quad 0 \leq t \leq \infty$$

Al variare del parametro β (fattore di forma) viene a mutare l'andamento della distribuzione, come indicato in figura.

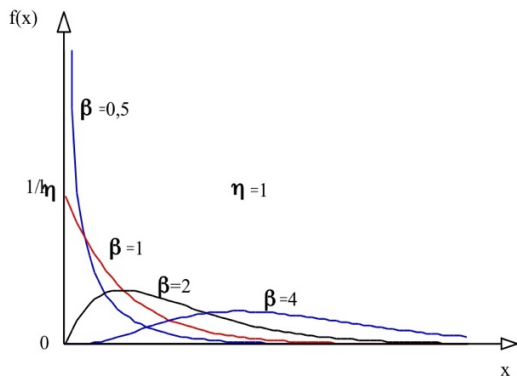


Figura 17 - distribuzione Gamma

Per $\beta < 1$ la distribuzione parte da infinito e tende asintoticamente a zero al crescere di x ; per $\beta = 1$ in corrispondenza dell'ascissa 0 assume il valore $1/\eta$ e decresce progressivamente fino ad annullarsi all'infinito ; per $\beta > 1$ parte da zero fino a raggiungere un massimo, per poi decrescere asintoticamente fino a zero ; al crescere del valore di β si sposta la posizione del massimo (moda) sulle ascisse. Per valori elevati del parametro β la distribuzione Gamma può approssimare una distribuzione normale, per la quale sia possibile trascurare i valori negativi delle ascisse.

L'effetto della variazione del parametro η (fattore di scala) è quello di addensare più o meno i valori verso l'asse delle ordinate, come mostrato dalla figura seguente.

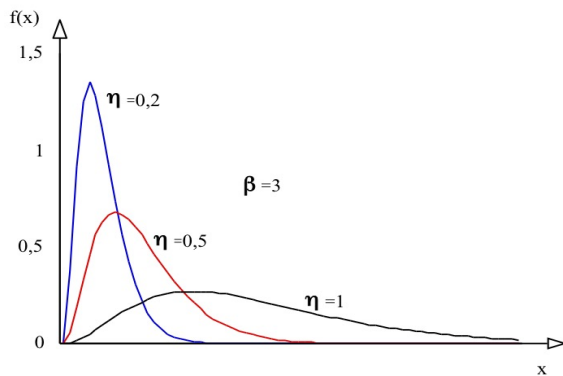


Figura 18 - effetto del fattore di scala nella distribuzione Gamma

La media della distribuzione Gamma è

$$\bar{x} = \eta \cdot \beta \quad [11.15.]$$

e lo scarto quadratico medio:

$$\sigma = \eta \cdot \sqrt{\beta} \quad [11.16.]$$

È interessante osservare che per $\beta = 1$, essendo $\Gamma(1) = 1$, la distribuzione Gamma si trova a coincidere con la distribuzione esponenziale.

3.4.9 La distribuzione Beta.

La distribuzione Beta è definita tra 0 ed 1 ed in questo intervallo assume diversi andamenti in dipendenza dai valori assunti dai suoi due fattori di forma. La sua espressione analitica è:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\beta + 1)} \cdot x^\alpha \cdot (1 - x)^\beta$$

con α e β fattori di forma entrambi > -1

$\Gamma(n)$ = valore della funzione Gamma nel punto n

La coppia di valori dei fattori di forma può presentarsi secondo tutte le possibili combinazioni e ad ognuna di esse corrisponde un diverso andamento.

Se i valori di α e di β sono tra loro uguali, la distribuzione è simmetrica ed assume forma a U per fattori di forma < 0 , valore costante per fattori di forma nulli (distribuzione uniforme) e valore a campana per valori positivi; al crescere dei valori positivi dei fattori di forma tra loro uguali, l'andamento della curva Beta approssima, nell'intervallo di definizione, la forma della gaussiana.

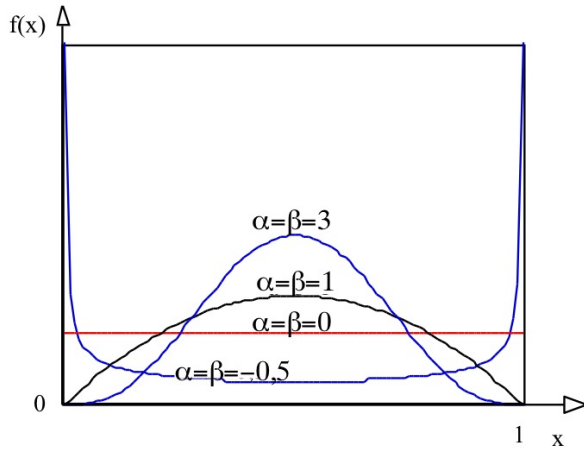


Figura 19 - distribuzione Beta per $\alpha=\beta$

Quando il valore di α è $>$ di quello di β il massimo della distribuzione si sposta verso l'ascissa 1; viceversa nel caso opposto.

In particolare se è $\alpha=0$ e β diverso da zero si hanno gli andamenti riportati in figura

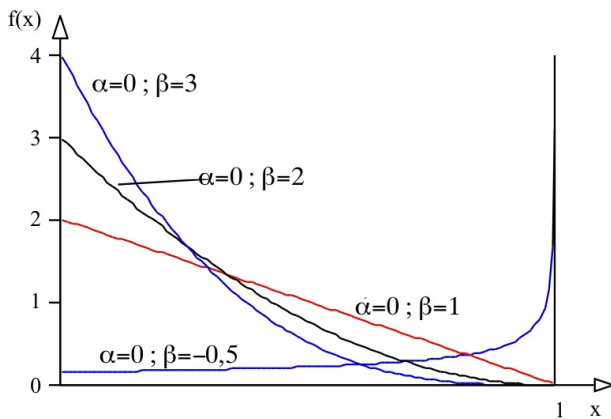


Figura 20 - distribuzione Beta per $\alpha=0$ e $\beta < 0$

Fig. II.13.

Si noti che per $\alpha=0$ e $\beta=1$ la distribuzione è rappresentata da una retta di coefficiente angolare $=-2$. Invertendo le coppie di valori dei fattori di forma l'andamento delle diverse curve si ribalta intorno all'asse che passa per l'ascissa 0,5.

Se per entrambi i valori si ha $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ con α diverso da β , le curve hanno un valore massimo (moda) che si posiziona all'ascissa $\alpha/(\alpha+\beta)$.

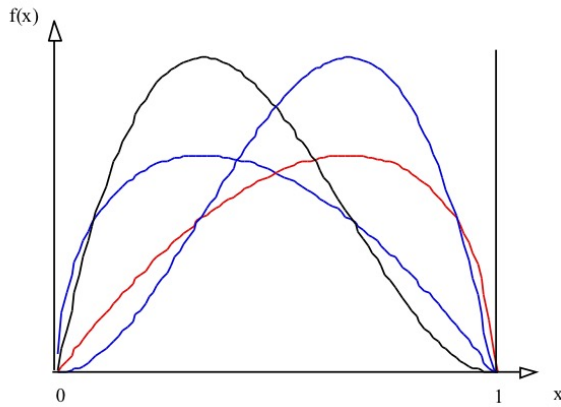


Figura 21 - Curve Beta

La media della distribuzione Beta è espressa come:

$$\bar{x} = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2}$$

e lo scarto quadratico medio:

$$\sigma = \left[\frac{(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2 \cdot (\alpha + \beta + 3)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

3.4.10 La Distribuzione Chiquadro (χ^2).

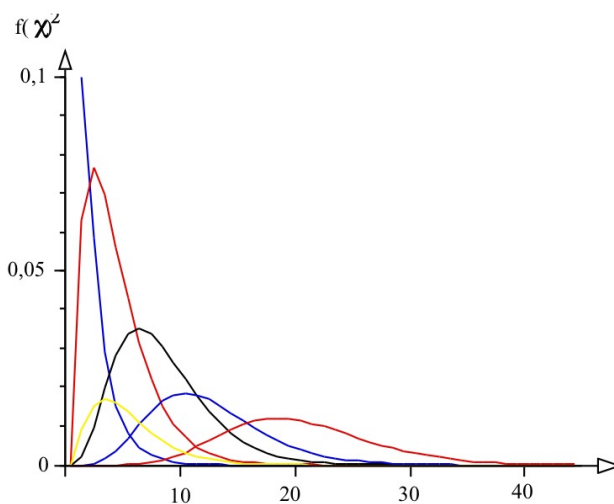


Figura 22 - Distribuzione Chiquadro (χ^2)

L'utilizzo di questa distribuzione è grandemente diffuso nell'analisi statistica e nella valutazione delle probabilità, a causa delle sue interessanti caratteristiche.

La distribuzione χ^2 è definita per valori positivi della variabile, è dotata di un solo parametro, detto grado di libertà, e segue la seguente espressione matematica:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \chi^{2(\frac{\nu}{2}-1)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

con ν = gradi di libertà ;

$\Gamma(n)$ = funz gamma calcolata in n

La media della distribuzione χ^2 si calcola come:

$$\overline{\chi^2} = \nu$$

e lo scarto quadratico medio:

$$\sigma_{\chi^2} = \sqrt{2\nu}$$

Per $\nu \geq 2$, la distribuzione χ^2 ha un massimo (moda) nella posizione $\chi^2 = \nu - 2$.

Le distribuzioni χ^2 godono della proprietà additiva:

- se due variabili casuali χ_1^2 e χ_2^2 sono indipendenti e distribuite come χ^2 , rispettivamente con ν_1 e ν_2 gradi di libertà, la somma delle due suddette variabili $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ è una variabile distribuita come χ^2 con $\nu = \nu_1 + \nu_2$ gradi di libertà.

E' interessante notare alcune relazioni esistenti tra la distribuzione χ^2 ed altre distribuzioni di uso comune.

- Se X_1, X_2, \dots, X_n sono n variabili casuali indipendenti, ciascuna distribuita in modo normale con valor medio nullo e varianza unitaria, allora la variabile

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad \text{con } n = 1, 2, \dots,$$

segue una distribuzione χ^2 con $\nu = n$ gradi di libertà.

- Se X_1, X_2, \dots, X_n sono n variabili casuali indipendenti, ciascuna distribuita in modo normale, rispettivamente con valor medio $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ e varianza $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, allora la variabile

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

segue la distribuzione χ^2 con $\nu = n$ gradi di libertà.

- Se X_1, X_2, \dots, X_n sono n variabili casuali indipendenti, ciascuna distribuita in modo normale con valor medio comune a tutte μ e varianza uguale per tutte σ^2 , allora la variabile casuale

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$$

segue la distribuzione χ^2 con $\nu = n-1$ gradi di libertà.

Si noti che

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

è la varianza della distribuzione di ciascuna delle variabili X_i (*varianza del campione*) la cui media (*media del campione*) è:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

- Al tendere all'infinito del numero di gradi di libertà l'andamento della distribuzione χ^2 approssima quello normale per valori di ascissa positivi.

La distribuzione esponenziale può essere considerata un caso particolare della χ^2 con $\nu = a = 2$. In queste condizioni la proprietà additiva può essere estesa anche alla distribuzione esponenziale.

3.5 Inferenza

Se da una parte si hanno a disposizione i valori rilevati sperimentalmente, più o meno numerosi ed ordinati, e dall'altra i modelli matematici che descrivono l'andamento di funzioni di distribuzione di riferimento, interpretare l'andamento del numero finito di dati disponibili, mediante la definizione della migliore funzione continua interpolante (numero infinito di punti) è una prima operazione di inferenza statistica.

Infatti applicare un qualunque metodo di regressione (minimi quadrati, Monte Carlo, ecc.) ad un lotto di dati sperimentali, per determinare il miglior modello matematico interpretativo dell'insieme del fenomeno (campione), significa imputare alla variabile dipendente, in corrispondenza dei punti per i quali non sono disponibili verifiche sperimentali, valori determinati in base ad un limitato numero di misure ed a considerazioni statistiche circa la natura del fenomeno (scelta del tipo di modello interpretativo).

È questo l'approccio logico della statistica inferenziale che porta a definire una distribuzione valida all'interno dell'intero campione, che permette di imputare all'intera popolazione un comportamento (distribuzione) determinato in base alle distribuzioni definite per uno o più campioni significativi e che consente di esprimere previsioni riguardo al comportamento (distribuzione) di fenomeni futuri, nei limiti in cui essi siano riconducibili alla popolazione analizzata.

Per ognuno di questi passi si tratta in sostanza di esprimere stime dei parametri caratterizzanti le rispettive distribuzioni e formulare ipotesi statistiche riguardo alla corrispondenza tra la situazione reale e quella matematicamente descritta, ed infine verificare l'attendibilità delle stesse ipotesi formulate.

Le stime coinvolte in questo procedimento riguardano dunque la forma della distribuzione, cioè il modello matematico prescelto per l'interpretazione, ed i parametri che individuano la distribuzione interpolante. È evidente che la determinazione di tali stime è tanto più agevole e corretta quanto maggiore è la numerosità del campione di partenza, ma ogni sperimentazione implica necessariamente un costo che ne limita la possibile estensione.

Queste stime nella pratica vengono prodotte mediante strumenti statistici detti **stimatori** per i quali è disponibile, in sede opportuna un'ampia e approfondita teoria.

In questa sede ci si limita a sottolineare il fatto che un qualunque stimatore, essendo funzione di variabili aleatorie, è esso stesso una variabile aleatoria e che uno stimatore ottimale deve soddisfare almeno le due seguenti proprietà:

- non essere polarizzato: il che corrisponde a dire che la speranza matematica della variabile aleatoria originaria e quella della variabile aleatoria costituente lo stimatore tendono a coincidere;
- essere dotato di minima dispersione.

Per applicare i concetti fin qui esposti si faccia riferimento al seguente esempio.

Si supponga di aver estratto da una produzione continua di spinotti per tornitura cilindrica, sei pezzi per ogni ora di produzione durante due turni (sedici ore) e di aver raccolto nella tabella seguente i valori misurati sul diametro (valore nominale 16,50 mm), dopo averli processati secondo le tecniche della teoria delle misure.

Ciascuno dei gruppi di 6 valori intestati R_i forma un campione che può essere utilizzato per la stima dei parametri statistici dell'intera popolazione costituita dai 96 valori contenuti in tabella.

Si noti tuttavia che anche l'insieme dei 96 valori forma in realtà un campione della più vasta popolazione costituita dall'intera produzione di spinotti. Il concetto di campione e di

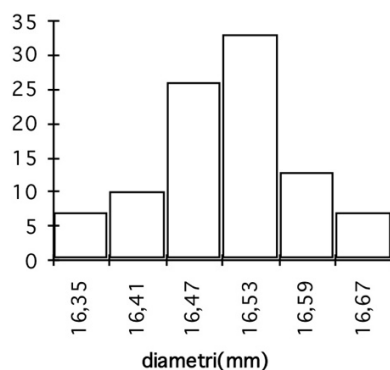
popolazione è dunque utilizzato in modo relativo: è quindi opportuno che ogni indagine statistica prenda le mosse dalla corretta ed univoca definizione di cosa deve intendersi per popolazione e per campione.

ELEM.	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
1	16,52	16,38	16,47	16,46	16,57	16,49	16,53	16,40
2	16,68	16,36	16,50	16,61	16,35	16,53	16,62	16,48
3	16,44	16,51	16,59	16,47	16,39	16,54	16,55	16,40
4	16,68	16,40	16,49	16,60	16,53	16,52	16,57	16,53
5	16,32	16,51	16,47	16,44	16,38	16,55	16,55	16,62
6	16,49	16,40	16,51	16,38	16,58	16,50	16,59	16,66

ELEM.	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16
1	16,48	16,47	16,49	16,46	16,41	16,70	16,52	16,46
2	16,50	16,48	16,52	16,56	16,60	16,43	16,65	16,55
3	16,50	16,51	16,55	16,57	16,64	16,63	16,55	16,56
4	16,46	16,48	16,52	16,51	16,45	16,37	16,53	16,54
5	16,52	16,51	16,48	16,48	16,46	16,39	16,62	16,53
6	16,47	16,55	16,52	16,45	16,57	16,51	16,52	16,52

La natura del fenomeno (tornitura cilindrica) è tale per cui gli scostamenti in eccesso o in difetto, intorno ad un valore centrale che resta incognito, possono intendersi dovuti a cause aleatorie: pertanto può essere giustificata l'assunzione che la distribuzione caratteristica del fenomeno segua un andamento normale.

Ulteriore conferma a questa ipotesi deriva dalla forma assunta dall'istogramma in figura costruito sull'insieme dei 96 dati disponibili.



Detti x_i i 96 valori disponibili, si calcola sul campione la media e la varianza:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{96} x_i}{96} = 16,51 \text{ mm}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{96} (x_i - 16,51)^2}{95} = 0,006064167 \text{ mm}^2$$

A questo punto il campione è compiutamente descritto dal suo valor medio, dalla sua varianza e dal fatto di seguire un andamento normale, ipotesi questa che può essere verificata mediante tecniche statistiche cui si accennerà più avanti.

La distribuzione caratteristica del campione è dunque espressa come:

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot s^2}} = \frac{1}{0,0778 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-16,51)^2}{2 \cdot 0,00606}}$$

Il cui andamento è riportato in figura:

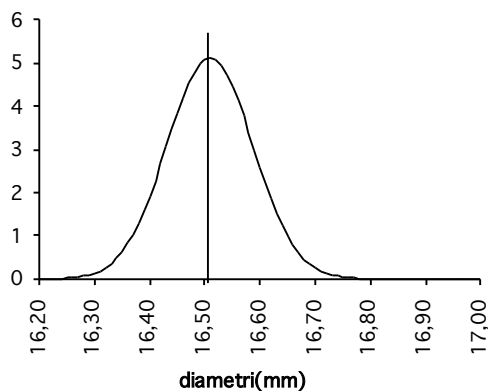


Figura 23

Si può dunque affermare che la migliore stima per la popolazione corrisponde ad una distribuzione normale determinata da i seguenti parametri, indicati, come di consueto, con i simboli greci μ e σ , per distinguerli da quelli relativi al campione \bar{x} ed s

$$\text{media} \quad \mu \cong \bar{x} = 16,51 \text{ mm}$$

$$\text{varianza} \quad \sigma^2 \cong s^2 = 0,006064167 \text{ mm}^2$$

L'espressione matematica e l'andamento della distribuzione attribuita alla popolazione coincidono con quanto sopra definito per il campione.

Avendo descritto univocamente, dal punto di vista statistico, la popolazione (intera produzione), ci si può ad esempio chiedere qual è la probabilità di estrarre dalla produzione uno spinotto avente il diametro < 16,35 mm.

A questo scopo conviene esprimere la distribuzione imputata alla popolazione (densità di probabilità) nella sua forma standard, mediante la sostituzione di variabile:

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \quad ; \quad Z = \frac{x - 16,51}{0,0778}$$

Per effetto di questa sostituzione alla ascissa $x=16,35$ corrisponde l'ascissa $z=-2,0412572$, quindi la ricercata probabilità corrisponde, sul diagramma della distribuzione normale standard, all'area sottesa dalla curva a sinistra del punto di ascissa $z = -2,0412572$, come indicato in figura.

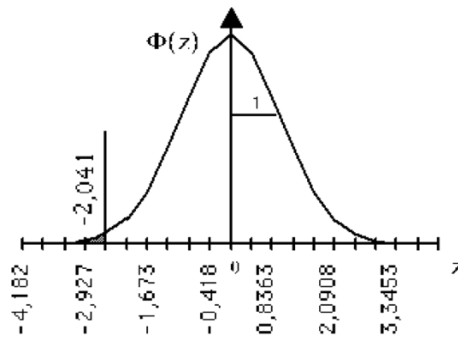


Figura 24

Dalle tabelle dei valori della funzione normale standard (Appendice B) risulta che l'area sottesa dalla curva tra $-\infty$ e $-2,041$ è pari a 0,0206. Ne deriva la risoluzione dell'interrogativo proposto:

$$P(-\infty \leq \text{diametro} \leq 16,35 \text{ mm}) = 0,0206$$

Quindi in base ai rilievi statistici effettuati, la probabilità che, estraendo a caso uno spinotto dalla produzione, questo manifesti una misura del diametro minore o uguale a 16,35 mm è pari a 0,0206.

Fino a questo punto l'insieme dei valori sperimentali è stato considerato come unico campione della popolazione costituita dall'intera produzione e la numerosità (96) del campione in esame ha consentito calcoli certamente significativi e relativamente agevoli.

A proposito della significatività e numerosità dei campioni esistono approfondimenti teorici ed applicativi, per i quali si rimanda ai trattati statistici specialistici. In questa sede ci si limita a ricordare che la numerosità minima richiesta per il campione è funzione della forma della distribuzione propria della popolazione e del grado di convergenza desiderato tra i parametri della popolazione e quelli del campione. Si osservi comunque che buoni livelli di convergenza si ottengono anche per distribuzioni originarie rettangolari o triangolari, con numerosità del campione dell'ordine di 5 unità.

Si consideri ora l'insieme dei 96 valori in tabella come popolazione da stimare mediante analisi statistica condotta sui k=16 campioni R_i, ciascuno composto da n=6 valori.

I valori medi \bar{x}_i calcolati su ciascun campione sono riportati nella seguente tabella:

CAMP	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
MEDIA	16,52	16,43	16,51	16,49	16,47	16,52	16,57	16,52
CAMP	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16
MEDIA	16,49	16,50	16,51	16,51	16,52	16,51	16,57	16,53

essi stessi formano un campione sul quale è possibile calcolare il valor medio e la varianza:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{16} \bar{x}_i}{16} = 16,51 \text{ mm} \qquad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16} (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{15} = 0,001125139 \text{ mm}^2$$

e quindi notare che, tra il campione formato dalle medie campionarie e la popolazione, valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = \mu \qquad \sigma^2 \cong \sigma_{\bar{x}}^2 \cdot n \qquad n = \text{numerosità dei campioni}$$

Cioè per la distribuzione delle medie campionarie, la **media** è uguale alla media della popolazione e la **varianza** è uguale alla varianza della popolazione divisa per il numero di elementi componenti i campioni su cui si sono calcolate le medie.

Quanto osservato tramite i risultati numerici riferiti all'esempio, ha in realtà validità generale, come sinteticamente descritto dalla figura seguente.

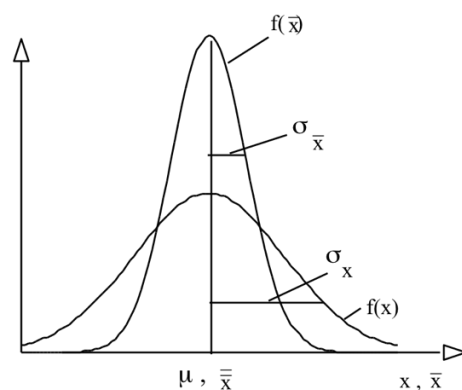


Figura 25 - stimatori delle popolazione e dei lotti campionari

L' esempio fin qui sviluppato è riferito ad un fenomeno (dispersione dei diametri ottenuti da tornitura cilindrica) la cui natura giustifica l'ipotesi assunta riguardo alla distribuzione della popolazione, cioè che questa segua una legge normale.

Conseguentemente è apparso altrettanto lecito considerare normalmente distribuiti i campioni e le medie campionarie calcolate sui detti campioni. Si noti che in virtù del **teorema del limite centrale**, quest'ultima assunzione è giustificata anche se la distribuzione della popolazione non è di tipo normale.

In base al **Teorema del limite centrale** infatti, *se la variabile aleatoria x segue una distribuzione, anche non normale, ma non eccessivamente asimmetrica, la distribuzione della variabile \bar{X} tende ad approssimare l'andamento normale al crescere della numerosità dei campioni sui quali si calcolano le \bar{X} .*

Se le x non sono distribuite normalmente, la convergenza della distribuzione delle \bar{X} alla normale è buona già per numerosità di qualche decina ; se le x sono distribuite normalmente il teorema è verificato già con numerosità di qualche unità.

Ciò giustifica, tra l'altro, la grande diffusione che ha l'utilizzo della distribuzione normale nell'analisi statistica: *essa infatti permette di interpretare anche un gran numero di fenomeni che si manifestano tramite popolazioni distribuite in modo diverso dalla normale.*

3.5.1 Controllo delle Ipotesi Statistiche

A partire dalle ipotesi formulate a proposito della forma caratteristica della distribuzione imputata alla popolazione, e quindi della sua espressione matematica, il calcolo statistico si è sviluppato in modo rigoroso, mediante relazioni "esattamente" dimostrabili e teoremi che sono oggetto di approfondita trattazione scientifica.

Tuttavia il punto di partenza dell'analisi statistica resta la formulazione di ipotesi: nel caso dell'esempio trattato l'ipotesi di base è costituita dalla forma della distribuzione propria del fenomeno.

La formulazione delle ipotesi statistiche viene espressa in base a considerazioni di natura intuitiva, suggerite ad esempio dalla forma dell'istogramma, o in base ad

esperienze maturate in casi analoghi a quello in esame, oppure in base allo studio della natura del fenomeno, quando questo consente l'espressione di una probabilità " a priori".

A volte possono dunque presentarsi le condizioni per cui le stesse ipotesi poste a base dell'analisi statistica richiedono opportune verifiche, dalle quali ottenere una validazione dell'intera indagine: è questo il problema del controllo delle ipotesi statistiche.

L'ipotesi formulata può essere o no verificata dalla realtà e, in questa condizione, si ha la possibilità di accettare, cioè considerare vera, l'ipotesi, ovvero di rifiutarla. La situazione logica corrispondente è schematizzata nella seguente tabella in cui H_0 , detta **ipotesi nulla**, corrisponde alla condizione di considerare nulla la differenza tra l'ipotesi formulata e la realtà.

Ipotesi	H_0 è vera	H_0 è falsa
Si accetta H_0	$P=1-\alpha$ livello di confidenza	Errore II Tipo $P=\beta$
Si rifiuta H_0	Errore I Tipo $P=\alpha$ livello di significatività	$P=1-\beta$ potenza della prova

In generale dunque la formulazione di ipotesi statistiche espone alla possibilità di compiere errori, mutuamente escludentisi, ciascuno caratterizzato da una sua probabilità.

Se si rifiuta l'ipotesi H_0 quando essa è vera si compie quello che si chiama errore di I Tipo al quale è associata la probabilità $P=\alpha$ detta "livello di significatività" ; se nelle stesse condizioni l'ipotesi H_0 viene accettata, non si commettono errori e ciò avviene con probabilità $P=1-\alpha$, detta "livello di confidenza".

Quando invece l'ipotesi H_0 è falsa, accettandola si commette un errore del II Tipo, cui è associata una probabilità $P=\beta$ mentre rifiutandola non si commette alcun errore e la probabilità che ciò avvenga è paria a $P=1-\beta$ detta "potenza della prova".

Il valore $P=\alpha$, livello di significatività, è quello che viene prefissato a base del controllo delle ipotesi statistiche: porre ad esempio $\alpha = 0,05$ significa assumere un rischio minore o uguale al 5% di commettere un errore di I Tipo, cioè di rifiutare l'ipotesi

nulla quando nella realtà essa è vera. Nella stessa situazione la probabilità di non commettere errore, cioè il livello di confidenza è dato da $P=1-\alpha=95\%$.

Non è possibile calcolare il valore di β da un prefissato valore di α , perché esso dipende anche da altre variabili, come la numerosità del campione e la grandezza delle differenze esistenti tra il modello ipotizzato e la realtà; sono invece disponibili curve, dette *funzioni di potenza*, che riportano l'andamento di $P=1-\beta$ in dipendenza di α , della numerosità del campione e del campo in cui tali differenze ricadono.

Riguardo alla imputazione della funzione di distribuzione caratterizzante una determinata popolazione, il problema del controllo delle ipotesi statistiche assume la forma della determinazione del livello di confidenza da associare alla imputazione effettuata, ovvero - viceversa-, presupposto un predeterminato livello di confidenza $P=1-\alpha$, si tratta di verificare che l'imputazione assunta esponga al rischio di errore di I Tipo minore di α , cioè che sia minore di α la probabilità di rigettare l'ipotesi H_0 , che la distribuzione calcolata coincida con quella reale, quando di fatto questa ipotesi è vera.

A tale scopo la scienza statistica propone diversi metodi di test, tra i quali si descrive il test del χ^2 per essere uno tra i più semplici e diffusamente utilizzati.

3.5.2 Test del χ^2

È un procedimento di verifica di ipotesi statistiche molto efficace che può essere applicato ad una grande varietà di casi pratici connessi alla definizione del livello di confidenza da associare ad una previsione ovvero ad un assunto di qualunque altra natura.

Il test viene qui applicato in particolare per misurare il livello di confidenza ($P=1-\alpha$) con il quale si può assumere come vera l'ipotesi che la distribuzione di una variabile aleatoria x coincida con una p.d.f. univocamente determinata, in base, ad esempio, a considerazioni analoghe a quelle svolte durante lo sviluppo del precedente esempio.

Si voglia sottoporre a test del χ^2 la prima delle ipotesi assunte nello sviluppo dell'esempio riguardante la produzione di torniture cilindriche: quella per cui l'insieme dei dati sperimentali è stato considerato come unico campione della distribuzione

dell'intera popolazione cui si è imputata una determinata p.d.f. (normale, con media $\mu \cong \bar{x} = 16,51 \text{ mm}$ e varianza $\sigma^2 \cong s^2 = 0,006064167 \text{ mm}^2$).

In primo luogo si tratta di costruire una nuova variabile che sia funzione degli scostamenti tra i valori sperimentali contenuti nel campione ed i valori che la p.d.f. assume in corrispondenza delle stesse ascisse.

Allo scopo si suddivide il campo di ascisse coperto dai valori sperimentali in un certo numero di intervalli contigui componenti, non necessariamente tra loro uguali, verificando che entro ciascun intervallo ricada un numero di valori sperimentali almeno uguale a 5. In relazione all'esempio si può assumere, la suddivisione in figura (che incidentalmente corrisponde a quella già adottata per la creazione del primo istogramma) definendo così **m=6** intervalli:

16,00-16,38 ; 16,38-16,44 ; 16,44-16,50 ; 16,50-16,56 ; 16,56-16,62 ; 16,62-16,70.

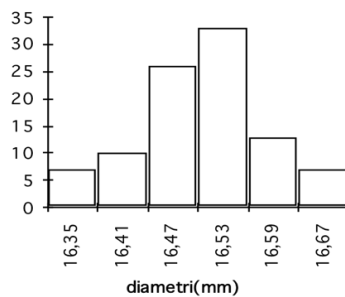


Figura 26

Entro ciascuno degli intervalli suddetti ricadono rispettivamente n_i valori sperimentali, come esposto in tabella:

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
7	10	26	33	13	7

In corrispondenza degli stessi intervalli la quota parte di area sottesa dalla p.d.f. moltiplicata per la numerosità totale del campione $N=96$ dà il numero di eventi che la distribuzione imputata assegna ad ogni intervallo.

Si tratta dunque di calcolare le quantità:

$$N \cdot P_i = N \cdot \int_{s_i}^{d_i} f(x) \cdot dx$$

per le quali s_i e d_i sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di ciascun intervallo.

Con l'aiuto delle tabelle numeriche (Appendice B) che espongono l'area sottesa dalla distribuzione normale standard $\Phi(z)$ per le diverse ascisse z e ricordando che, per l'esempio è

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \quad ; \quad z = \frac{x - 16,51}{0,0778}$$

si può compilare la seguente tabella:

x_i	z_i	$\int_{-\infty}^{z_i} \Phi(z) dz$	$P_i = \int_{-1}^{z_i} \Phi(z) dz$	$N \cdot P_i$
16,00	-6,53577	0,0000	-	-
16,38	-1,65601	0,0494	0,0494	4,7424
16,44	-0,88553	0,1894	0,1400	13,4400
16,50	-0,11504	0,4562	0,2668	25,6128
16,56	0,65545	0,7422	0,2860	27,4560
16,62	1,42594	0,9222	0,1800	17,2800
17,00	6,30569	1,0000	0,0778	7,4688

La quantità Δ definita come:

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i}$$

è anch'essa una variabile aleatoria e si dimostra che essa segue una distribuzione χ^2 con $v=m-r$ gradi di libertà, essendo m il numero di intervalli di riferimento ed r il numero di relazioni indipendenti (vincoli) che limitano la nuova variabile aleatoria.

Per l'esempio trattato, si può scrivere la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^m n_i = N$$

pertanto il numero di gradi libertà è $v= m-1=5$.

Ne deriva la p.d.f. riferita all'esempio trattato, propria della variabile aleatoria

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i}$$

che corrisponde al grafico in figura (con $v= 5$)

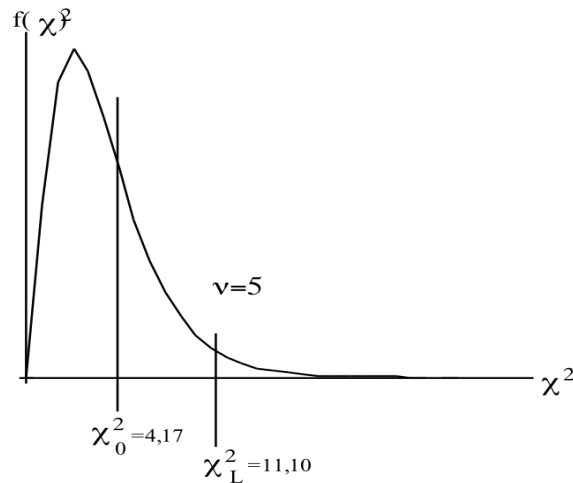


Figura 27 - confronto con il valore limite

In corrispondenza di un intervallo predefinito sulle ascisse, l' area sottesa dalla curva χ^2 riportata in figura, essendo essa una p.d.f., fornisce la misura della probabilità che nella realtà si verifichi un valore della variabile contenuto entro l'intervallo predefinito ; in particolare l'integrale della p.d.f., calcolato tra un valore determinato

$$\chi_r^2 \text{ ed } \infty \quad \int_{\chi_r^2}^{\infty} f(\chi^2) \cdot d(\chi^2) = p(\chi_r^2 \leq \chi^2)$$

misura la probabilità che nella realtà si verifichi un valore di χ^2 maggiore o uguale a χ_r^2 .

Ma nel caso particolare della p.d.f. χ^2 , si può dimostrare che la stessa quantità rappresenta il livello di significatività ($P=\alpha$ associato all'ipotesi H_0 , di corrispondenza tra la distribuzione reale e quella ipotizzata).

Ovviamente detta ipotesi sarà giustificata da un livello di confidenza $P=1-\alpha$ tanto più elevato quanto più piccolo è il valore di α .

Si deve a questo punto calcolare qual è il valore di χ^2 (indicato come χ^2_0) che caratterizza l'esempio fin qui svolto; è evidente che questo valore risulta tanto più piccolo quanto minori sono gli scarti tra la p.d.f. ipotizzata e la distribuzione reale.

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i} = 4,17003052$$

Se è stato prefissato un livello di confidenza $P=1-\alpha$ minimo perché l'ipotesi effettuata possa essere accettata (e quindi un valore massimo per α), in corrispondenza del

valore di α sulla curva χ^2 (con l'appropriato numero di gradi di libertà $v=5$) si legge il valore limite χ^2_{Limite} , dovrà quindi essere verificata la condizione:

$$\chi_0^2 \leq \chi_L^2$$

diversamente l'ipotesi assunta deve essere rigettata.

Si supponga $\alpha=0,05$, in corrispondenza di questo valore, sulla curva χ^2 in figura con $v=5$, si legge il valore $\chi^2_{\text{Limite}}=11,1$; poiché il valore χ_0^2 è minore di tale limite si può concludere che *non sussistono motivi per rigettare l'ipotesi assunta*.

Se la verifica avesse sortito esito negativo, prima di rigettare l'ipotesi e quindi prima di cercare una diversa funzione interpolante più adatta ad interpretare il fenomeno in esame, sarebbe stato opportuno aumentare i gradi di libertà della distribuzione χ^2 con un diversa suddivisioni in intervalli di riferimento.

3.5.3 Stime di Intervallo.

Altre volte il test da sviluppare consiste nel verificare le ipotesi statistiche assunte riguardo agli stimatori di parametri caratteristici. In questi casi si tratta di verificare se l'ipotesi che il valore vero ricada in un determinato intervallo intorno a quello dello stimatore, ovvero che il valore dello stimatore si discosti dal valor vero del parametro stimato meno di una certa quantità, può essere assunta con un predefinito livello di confidenza $P=1-\alpha$. L'ipotesi, cioè, può essere rigettata sia per valori in eccesso, che per valori in difetto rispetto a predeterminati limiti.

Il rischio di I Tipo deve dunque essere diviso in due parti, spesso uguali tra loro ($\alpha/2$) ed in corrispondenza a ciascuna quota parte di rischio si devono individuare i limiti (detti limite di confidenza inferiore e superiore) entro cui il valore dello stimatore deve essere contenuto: l'intervallo di valori accettabili, contenuto tra i predetti limiti si dice "intervallo di confidenza".

La determinazione dei suddetti limiti può ottenersi mediante diversi procedimenti tra i quali scegliere in dipendenza dalle caratteristiche del caso specifico. Rimandando a testi specialistici per una approfondita trattazione dell'argomento, ci si limita in questa sede ad applicare i procedimenti più semplici ed adatti al completamento dello

sviluppo dell'esempio riferito alla produzione di spinotti ottenuti per tornitura cilindrica.

Ritornando dunque alla popolazione costituita dai 96 valori misurati sui diametri, ed ai 16 campioni di 6 elementi ciascuno, si voglia definire per il parametro μ (valor medio della popolazione) l'intervallo di confidenza, corrispondente al livello di confidenza

$P=1-\alpha=0,95$, intorno allo stimatore \bar{X} (valor medio di campione).

Si ricordi che la \bar{X} (nell'esempio calcolata su 6 valori) è anch'essa una variabile aleatoria, distribuita secondo una gaussiana con:

$$\bar{x} = \mu \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad n = \text{numerosità dei campioni}$$

che può essere ricondotta ad una distribuzione normale standard $\Phi(z)$ mediante la sostituzione di variabile:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 16,51}{0,0778}$$

Dalle tabelle numeriche della $\Phi(z)$ è facile rilevare quei valori delle z tali che sia:

$$\int_{-\infty}^{z_i} \Phi(z) \cdot dz = \frac{\alpha}{2} \quad z_i: \text{limite inferiore}$$

$$\int_{z_s}^{\infty} \Phi(z) \cdot dz = \frac{\alpha}{2} \quad z_s: \text{limite superiore}$$

Per $\alpha=0,05$, risulta:

$$z_i = -1,95$$

$$z_s = 1,95$$

di conseguenza, per l'esempio trattato, si calcolano i limiti e l'ampiezza dell'intervallo di confidenza a livello di confidenza $P=1-\alpha=0,95$:

$$\bar{x}_i = -1,95 \cdot 0,0778 + 16,51 = 16,660 \text{ mm} \quad \text{inf eriore}$$

$$\bar{x}_s = 1,95 \cdot 0,0778 + 16,51 = 16,357 \text{ mm} \quad \text{superiore}$$

$$16,660 - 16,357 = 0,303 \text{ mm} \quad \text{ampiezza}$$

Ci si riferisca ora alla popolazione costituita dall'intera normale produzione di spinotti torniti, per la quale i valori rilevati nell'esempio formano un campione di numerosità $n=96$ della variabile aleatoria (diametro) distribuita secondo una gaussiana.

Si voglia determinare l'intervallo di confidenza a livello $P=1-\alpha=0,90$ per la varianza σ^2 della popolazione di valore medio $\mu = 16,51$ mm.

I 96 valori hanno permesso di calcolare il valor medio e la varianza del campione:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 16,51 \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0,006064167$$

In queste condizioni si è visto che si può dimostrare che la variabile casuale

$$V = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$$

è distribuita secondo una p.d.f. del tipo χ^2 con $v=n-1$ gradi di libertà.

Nel caso in esame è $v= n-1 = 95$ e la p.d.f. corrisponde a quella indicata in figura

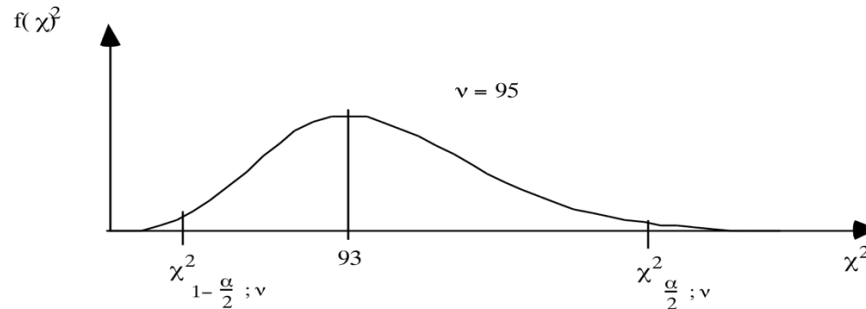


Figura 28 - andamento della p.d.f.

Il problema proposto diviene dunque quello di determinare i valori

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v} \quad \text{e} \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2};v}$$

che soddisfino la relazione seguente:

$$\int_{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v}}^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};v}} f(\chi^2) \cdot d\chi^2 = 1 - \alpha$$

Pertanto i limiti dell'intervallo di confidenza possono essere calcolati dalle seguenti relazioni:

$$\int_{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v}}^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};v}} f(\chi^2) \cdot d\chi^2 = P \left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v} \leq \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};v} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[\frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v}} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1) \cdot s^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};v}} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};v}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v}} \right] = 1 - \alpha$$

Nell'esempio considerato si ha $\alpha=0,10$, $v=n-1=95$; quindi dalle tabelle numeriche della χ^2 (Appendice A) si legge:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v} = \chi^2_{0,95;95} = 73,5$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};v} = \chi^2_{0,05;95} = 118,8$$

e in definitiva l'intervallo di confidenza è determinato da:

$$\sigma_U^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};v}} = \frac{(95) \cdot 0,006064167}{73,5} = 0,00783804 \text{ mm}^2 \quad \text{superiore}$$

$$\sigma_L^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};v}} = \frac{(95) \cdot 0,006064167}{118,8} = 0,00484929 \text{ mm}^2 \quad \text{inferiore}$$

$$0,00783804 - 0,00484929 = 0,00298875 \text{ mm}^2 \quad \text{ampiezza}$$

3.6 Coefficiente di Correlazione.

Si può presentare il caso in cui due variabili aleatorie si manifestano in modo tale da far intuire la possibilità dell'esistenza di una relazione tra di esse. A volte è possibile esplicitare tale relazione eventualmente ricorrendo a terze variabili per le quali è nota la relazione con ciascuna delle prime due, altre volte ciò non è possibile. In questi casi è utile misurare quanto la variazione di una variabile dipende dalla variazione dell'altra mediante il coefficiente di correlazione.

Indicando semplicemente con X e con Y le due variabili per le quali si vuole misurare la correlazione, il problema può essere sinteticamente rappresentato come nella seguente figura.

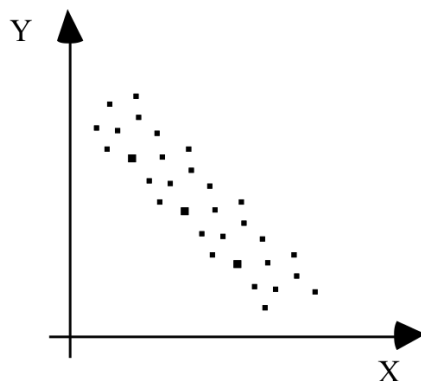


Figura 29

Ogni punto rappresenta una coppia di valori (Y,X) osservati ; entro il campo coperto da ciascuna variabile si rileva che per un fissato valore di X si ha una distribuzione di

valori di Y che tende alla normale, ed altrettanto vale per la distribuzione di valori di X corrispondente ad un fissato valore di Y; inoltre le varianze delle distribuzioni di X al variare di Y e di Y al variare di X tendono ad essere costanti.

In generale infine si osserva che la rappresentazione delle osservazioni in figura mostra una tendenza ad un andamento (rettilineo in figura), che corrisponde all'andamento dei valori medi delle Y per X fissata ovvero delle X per Y fissata.

In queste condizioni (*correlazione lineare*), il coefficiente di correlazione può essere espresso come:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}{n \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad [11.24.]$$

essendo n il numero delle osservazioni disponibili.

Il coefficiente di correlazione varia tra +1 e -1; ai due valori estremi corrisponde la correlazione perfetta (-1: Y decrescente per X crescente), al valore zero corrisponde la negazione di correlazione.

4 Il Planning.

Con il termine *planning* (pianificazione) si intende la predisposizione di azioni future allo scopo di conseguire un certo risultato. Questa attività è quindi esercitata da chiunque si accinge a compiere imprese più o meno complicate. Non è necessario pensare a programmi complessi ed a lungo termine per rendersi conto delle applicazioni della pianificazione; basta fare riferimento a casi assai più semplici: un banale appuntamento è un esempio di pianificazione, così come lo è una qualsiasi programmazione altamente sofisticata. La pianificazione è quindi una attività quotidianamente svolta da chiunque in modo più o meno consapevole (tanto essa è connaturata alle azioni umane) e che condiziona qualunque impegno o scadenza sia necessario imporre ad imprese future.

Restringendo la generalità di questo concetto al campo delle applicazioni tecniche, ed ancora più particolarmente all'attività di progetto risulta assai evidente la fondamentale importanza della pianificazione o del *planning* (termine usato in campo tecnico). Infatti qualsiasi progetto, per elementare che esso sia, implica la previsione e la valutazione delle operazioni future che concorreranno a compiere l'opera, talché il progetto stesso è necessariamente composto di una attività di *planning* resa più o meno evidente dalla forma che assume la compilazione dei documenti di progetto. Quando poi si considerano progetti articolati si nota l'esigenza preminente del *planning* come strumento per ottenere che ogni sezione del lavoro venga sviluppata in un tempo preordinato e risolta al momento giusto, allo scopo di evitare che altre sezioni subiscano dei ritardi, o - peggio - che si debba accettare indeterminazioni dovute a mancanza di dati, con pericolo di pregiudicare il buon esito dell'opera intera.

Infatti preordinare le varie fasi elementari di progetto significa poter prevedere con buona approssimazione le scadenze del compimento parziale e totale dell'opera. Ciò risulterebbe al contrario assai arduo a chi volesse prevedere la scadenza di un progetto articolato, considerato in blocco, senza cioè averlo analizzato in sezioni elementari organizzate secondo un ordine logico.

Il *planning*, inoltre, in quanto organizzazione di operazioni future concorrenti ad un fine determinato, pone in evidenza le interdipendenze di carattere logico e funzionale tra le varie operazioni elementari, permette di organizzare in modo conseguente lo sfruttamento delle risorse disponibili, siano esse forze di lavoro o materiali.

E l'organizzazione dello sfruttamento delle risorse è il primo passo verso l'ottimizzazione, in quanto trovare il miglior modo di rendere efficaci le forze produttive significa conseguire il miglior risultato economico.

4.1 Concetti—Definizione—Rappresentazione

Alla base di ogni pianificazione c'è, per definizione, la previsione del futuro. Tale previsione, parlando di planning, pur potendo riguardare argomenti diversi, può sempre essere ricondotta alla valutazione di un tempo. La disponibilità di mezzi o di forze di lavoro, l'acquisizione di materiali o di informazioni su cui lavorare, ovvero la ricezione di capitali da investire, influiscono in modo vario sulla realizzazione di un progetto, ma ciò che interessa ai fini del planning è il denominatore comune cui possono essere ricondotte tutte le componenti di progetto: il tempo. Occorre infatti rispondere alla domanda: data una certa disponibilità di mezzi, in quanto tempo può essere compiuta una determinata operazione? Ovvero alla domanda: quanto tempo occorrerà attendere prima di ottenere le informazioni necessarie al successivo svolgimento del progetto? O i capitali da investire?

La previsione quindi nel planning è espressa sempre in termini di tempo e riguarda fasi di progetto non sempre caratterizzate dalla produzione di un certo oggetto, ma anche fasi passive come, ad esempio, le attese. Tali fasi vengono comunemente indicate col nome di **attività**.

Da quanto detto finora risulta evidente come il concetto di attività usato nel planning è ben diverso da quello normalmente annesso alla parola: infatti nel planning risulta attività anche una attesa, o comunque il verificarsi di una condizione, che non richieda alcuna azione.

Nel planning si può quindi definire attività un intervallo di tempo necessario per il verificarsi di un obiettivo programmato. Ad ogni attività quindi è assegnata in fase di previsione una **durata**, ed in dipendenza dalla sua natura una certa **disponibilità di risorse**.

Dalla definizione proposta appare chiaro che ogni attività è delimitata da un istante di inizio ed un istante finale. Tali istanti privi di dimensione vengono indicati col nome di **eventi**. L'evento è quindi il verificarsi di tutte le condizioni per cui una certa attività può iniziare, ovvero il conseguimento dell'obiettivo di una attività. Poiché d'altra parte il valore del conseguimento dell'obiettivo di una attività sta proprio nel fatto che siano determinate le condizioni di avvio dell'attività successiva, generalizzando si può definire l'evento come: l'istante in cui è possibile iniziare l'attività successiva. A questa definizione si sottrae soltanto l'evento fine del progetto che si potrà, pur sempre, intendere come evento iniziale dell'attività di sfruttamento del prodotto. Volendo visualizzare quanto fin qui esposto si può adottare una rappresentazione del tipo in figura



Figura 30

in cui il verso di percorrenza del segmento ATTIVITÀ'. indica che, dal punto di vista logico o tecnologico o funzionale, l'attività inizierà quando si sarà verificato l'EVENTO INIZIALE, e si compirà prima del presentarsi dell'EVENTO FINALE.

In genere sia gli eventi che le attività vengono contraddistinti da una sigla di riferimento.

4.2 Analisi di un progetto in attività elementari-schedulazione.

Volendo procedere alla stesura del planning, occorre anzitutto analizzare il progetto in modo da frazionarlo in **attività elementari**. Chiaramente l'analisi ed il conseguente frazionamento, possono essere più o meno spinti, in dipendenza da ciò che si ritiene per attività elementare. Ad esempio la costruzione di una macchina può essere suddivisa in :

- progetto
- reperimento materiali
- costruzione

ovvero si può determinare la seguente suddivisione:

- progetto
- reperimento materiali
- lavorazione materiali
- montaggio
- collaudo

Nel primo caso come attività elementare è indicata la costruzione, nel secondo caso la stessa attività appare frazionata in tre attività elementari: lavorazione materiali, montaggio, collaudo. Ciascuna di queste potrebbe ulteriormente essere scomposta in attività elementari componenti, e così via.

È quindi lecito chiedersi fino a che punto convenga spingere l'analisi di un progetto in attività elementari. Infatti, se è vero che considerando il progetto come un blocco unico e dovendo fare delle previsioni si rischia molto di più di quanto non avviene esprimendo le previsioni per le varie fasi componenti, è pur vero che frazionando il progetto fino alla individuazione di attività non scomponibili, si corre il rischio di perdere di vista lo scopo del planning e complicare eccessivamente il lavoro di gestione delle previsioni annesse a ciascuna delle attività elementari. Il limite fino al quale conviene spingere l'analisi del progetto viene in genere fissato dall'analista stesso che si basa sulla sua personale esperienza, sulle caratteristiche e le finalità del progetto. Una buona norma è quella di arrestare la scomposizione quando si sono individuate quali attività elementari quelle eseguite da un unico centro di lavoro senza soluzione di continuità.

Individuate in questo modo le attività elementari componenti un progetto, si procede alla schedulazione. Cioè si prepara un numero di schede (records) pari al numero di attività

individuare. Si intesta ogni scheda con il nome o il codice di ciascuna attività e si indica quali condizioni devono essere verificate perché l'attività possa aver inizio e quali condizioni si realizzano con il compimento dell'attività stessa. Ogni scheda verrà poi completata con indicazioni di durata, di disponibilità di risorse, di costi, in modo da fornire a chi dirige il progetto un quadro completo sul quale basare delle scelte ottimali.

L'assegnazione a ciascuna attività di un evento di partenza e di uno di arrivo è una operazione assai delicata. Essa infatti trasferisce nella schedulazione tutte le considerazioni di precedenza e interdipendenze logiche, tecnologiche e funzionali che l'analista valuta mentalmente.

Per svolgere questa operazione in maniera più agevole ci si avvale generalmente di **metodi grafici** che, opportunamente sviluppati e completati con le necessarie informazioni, diventano la base di veri e propri metodi di gestione pianificata di un progetto.

4.3 Rappresentazione Grafica — Attività In Serie - Attività In Parallelo

Allo scopo di rendere più immediata la comprensione del discorso è opportuno riferirsi ad un possibile caso concreto: il progetto e la costruzione di una macchina per produzione di bronzine.

Siano state individuate le seguenti attività elementari:

- A - Progetto
- B - Reperimento materiali
- C - Costruzione particolari
- D - Montaggio
- E - Collaudo

Le interdipendenze logiche e funzionali tra queste attività sono tali che ciascuna non può iniziare se non è terminata la precedente.

Per ciò si può rappresentare il tutto tramite una serie di attività intervallata da eventi.

Indicando con numeri gli eventi e con il loro codice letterale le attività, la rappresentazione potrebbe presentarsi come quella in figura:

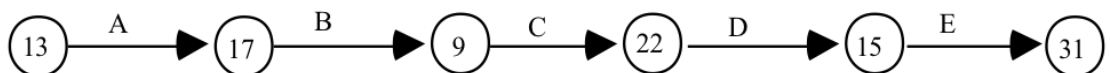


Figura 31

È questo il caso più semplice che può verificarsi nella realtà, e conseguentemente se ne ottiene la più semplice rappresentazione grafica possibile.

D'altra parte, anche in questo caso semplice, la schedulazione e la rappresentazione grafica opportunamente elaborata consentono di ricavare informazioni assai utili per chi ha il compito di gestire il progetto. Infatti, avendo assegnato ad ogni attività una durata ed una certa disponibilità di risorse, si può correttamente e con buona approssimazione rispondere immediatamente a domande del tipo:

- quanto durerà l'intera opera? - quante e quali risorse occorre impiegare?
- quando e per quanto tempo sarà impegnata la tale risorsa?

Si può dare maggiore evidenza alla rappresentazione grafica, rappresentando le attività con segmenti di lunghezza proporzionale alla durata, riferiti ad un asse dei tempi, ad esempio:

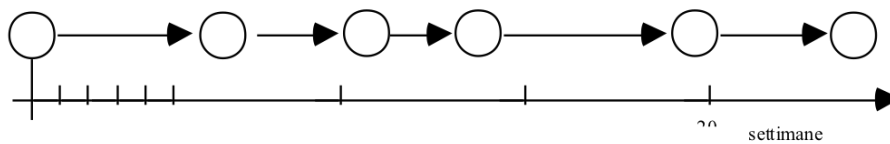


Figura 32

In questo modo risulta immediato rilevare quale attività è in corso alla generica data t , e, conseguentemente, qual è l'impegno di risorse richiesto nello stesso momento.

Il caso fin qui considerato è per altro da ritenersi un caso limite per la sua semplicità. Nella pratica è assai raro che le attività elementari siano tali che nessuna di esse possa essere svolta contemporaneamente ad altre.

Nella maggioranza dei casi infatti uno stesso evento realizza le condizioni per cui possono iniziare più attività contemporaneamente (attività in parallelo) e viceversa uno stesso evento si verifica solo quando più di una attività, svolta contemporaneamente alle altre, è stata portata a termine.

Si esamini infatti il caso già proposto: costruzione di una macchina per la produzione di bronzine. Nell'ipotesi che siano state individuate quali elementari le seguenti attività:

- A - Progetto e stesura specifiche
- B - Reperimento materiali
- C - Costruzione particolari
- D - Scavo fondazioni
- E - Getto fondazioni
- F - Costruzione impianto elettrico di alimentazione
- G - Allacciamento impianto elettrico di alimentazione
- H - Costruzione impianto oleodinamico di alimentazione
- I - Allacciamento impianto oleodinamico
- L - Montaggio
- M- Collaudo

risulta evidente come sia possibile svolgere più di una delle attività indicate contemporaneamente ad altre. Infatti, mentre è necessario attendere l'arrivo dei materiali per iniziare la costruzione dei particolari, è sufficiente che il progetto sia totalmente completato, per iniziare lo scavo delle fondazioni ed il conseguente getto, si potrà inoltre procedere contemporaneamente a realizzare gli impianti elettrico e oleodinamico. Invece si dovrà attendere che la costruzione dei particolari sia terminata e che sia pronto il getto di fondazione per procedere al montaggio della macchina, e solo a macchina montata si potranno effettuare i collegamenti elettrici e oleodinamici. A quel momento la macchina sarà pronta per il collaudo.

4.4 Diagramma di Gantt

La definizione delle attività elementari costituenti un'opera o un progetto, e la conseguente schedulazione, porta alla stesura di un programma che condiziona tutta l'organizzazione dello svolgimento dell'opera. Il valore del programma sta quindi nel fatto che esso venga rispettato al massimo possibile: nel caso contrario infatti non solo si ridurrebbe l'utilità di avere steso un programma di azione, ma si correrebbe anche il rischio di trovarsi addirittura ostacolati dalla presenza di una programmazione.

Se in una serie di appuntamenti il giorno X alle ore Y si deve effettuare un intervento manutentivo con un tecnico esterno, occorre che tutti gli adempimenti precedenti (attività) vengano evasi nei tempi e con i contenuti previsti in modo da poter effettuare correttamente l'intervento ed avere i necessari prerequisiti. Tralasciare questa cura significa rischiare di non poter effettuare la manutenzione, ciò che potrebbe essere peggiore di procedere senza pianificazione.

Costruito il programma è quindi necessario che il Responsabile dell'opera sorvegli costantemente che l'esecuzione segua le linee tracciate, e che, di fronte ad eventuali scostamenti, proceda ad aggiornare per tempo i programmi. È quindi utile disporre di una rappresentazione grafica che presenti in modo sintetico e completo la situazione dello svolgimento dei lavori al tempo X raffrontata al programma previsto.

A questo scopo si usano convenientemente i **diagrammi di Gantt**.

Le attività sono rappresentate tramite segmenti di lunghezza proporzionale alla durata inseriti in un piano cartesiano in cui in ascisse sono segnati i tempi secondo l'unità di misura scelta ed in ordinate vengono riportate le attività elementari a ciascuna delle quali si attribuiscono due righe: una per le previsioni (programma) ed una per i consuntivi (realizzazione).

Il diagramma di Gantt relativo all'esempio fin qui proposto è mostrato nella figura seguente.

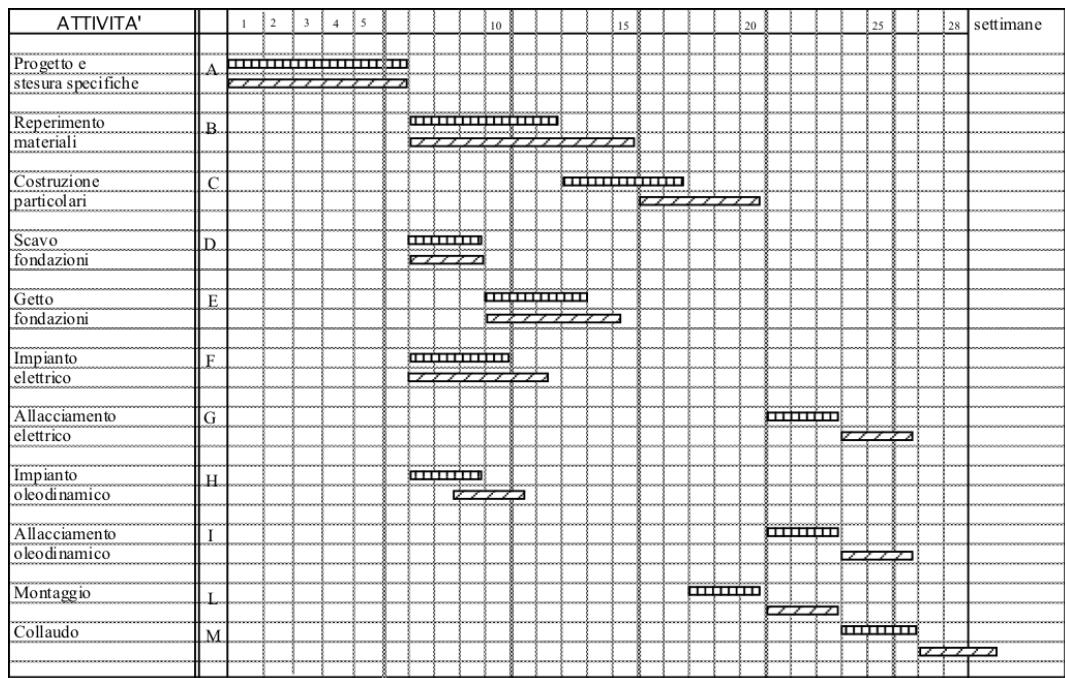


Figura 33

La disposizione dei vari segmenti rappresentanti le singole attività all'interno del diagramma, deve essere coerente alle priorità logiche esposte alla fine del paragrafo precedente a proposito dello stesso esempio.

Il diagramma di Gantt va letto per strisce verticali (nell'esempio settimane) e mostra immediatamente le attività in corso e corrispondentemente le risorse impegnate nello stesso periodo.

Per costruire correttamente il diagramma di Gantt occorre avere individuato con precisione le priorità delle attività; però (ed è questo il limite principale di questi diagrammi) tali priorità non risultano rappresentate in modo evidente e immediato. Ed altrettanto avviene per le conseguenze di eventuali ritardi tra consuntivo e programma.

Si noti come un ritardo fino a cinque settimane nella attività getto fondazioni non porterebbe alcuna dilazione al compimento dell'opera, mentre un ritardo anche di una settimana nell'attività costruzione dei particolari sposta la fine dell'opera di una uguale quantità di tempo.

Tutto ciò è scritto sui diagrammi di Gantt, ma non risulta di immediata ed evidente lettura. Le applicazioni del diagramma di Gantt non si limitano ai casi del genere dell'esempio considerato. Si usano convenientemente anche quando si vuole ottimizzare l'utilizzazione di una macchina, o di un centro di produzione, ecc.

4.5 Il metodo PERT

PERT (Program Evaluation and Review Technique) è l'acronimo di un metodo di planning messo a punto negli Stati Uniti nel 1958 per la costruzione dei missili Polaris.

L'efficacia di questo metodo risultò subito evidente dato che il progetto Polaris fu compiuto, seguendo il PERT, in un terzo del tempo previsto con precedenti metodi di programmazione.

Caratteristiche fondamentali del metodo PERT sono quelle di rendere evidenti i legami logici, riducendo al minimo le possibilità di errore, e di quantizzare gli effetti di eventuali scostamenti tra consuntivo e previsioni, ottimizzando l'attendibilità e l'efficacia della pianificazione.

Il **reticolo PERT** rappresenta graficamente le interdipendenze e le priorità di carattere logico, tecnologico e funzionale individuate dall'Analista in fase di schedulazione.

Si disponga delle schede relative all'opera di cui all'esempio proposto: costruzione di una macchina per la produzione di bronzine.

Ogni scheda - si è detto - contiene (per ora) le seguenti indicazioni:

- nome e natura dell'attività
- condizioni che devono essere realizzate perché si possa iniziare l'attività
- condizioni che si realizzano con il compimento dell'attività
- impegno di risorse.

Ci si comincia a chiedere: qual è l'obiettivo finale, l'evento che coincide con il compimento dell'opera?

Individuato tale evento, si continua: quale o quali attività devono essere svolte immediatamente prima del verificarsi di tale evento? Evidentemente quelle attività il cui compimento porta direttamente al realizzarsi delle condizioni di cui all'evento finale.

Tali attività sono contenute nel pacco di schede già preparato, basta dunque selezionarle secondo l'effetto prodotto dal compimento dell'attività stessa.

Si rappresentano quindi le attività concorrenti nell'evento finale mediante linee orientate incidenti un punto o un circolo (evento). Agli elementi della rappresentazione si attribuiscono i nomi o le sigle già riportati in schede.

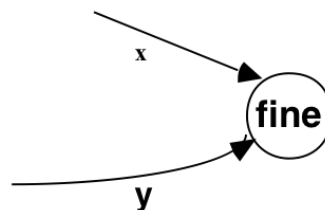


Figura 34

L'orientamento della linea sta solo allo scopo di indicare qual è l'evento finale, le linee non hanno nessun riferimento temporale: la loro lunghezza è indipendente dalla durata. A questo punto per ciascuna delle attività rappresentate ci si ripete la domanda: quali condizioni devono essere verificate perché l'attività X (o Y) possa iniziare?

L'esame delle schede a disposizione indicherà quindi qual è, o quali sono, le attività da svolgere immediatamente prima di X (o Y).

Si procede quindi alla rappresentazione

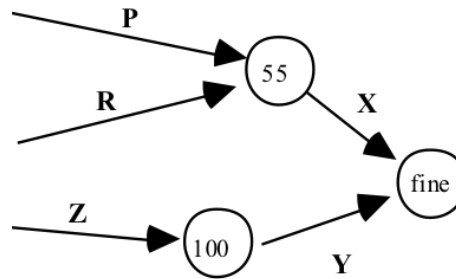


Figura 35

Proseguendo, il procedimento si arresta alla individuazione dell'evento iniziale dell'intera opera.

Per chiarire quanto detto, si esamini il reticolo relativo al solito esempio (gli eventi sono numerati senza nessun necessario ordine).

- A - Progetto e stesura specifiche
- B - Reperimento materiali
- C - Costruzione particolari
- D - Scavo fondazioni
- E - Getto fondazioni
- F - Costruzione impianto elettrico di alimentazione
- G - Allacciamento impianto elettrico di alimentazione
- H - Costruzione impianto oleodinamico di
- I - Allacciamento impianto oleodinamico
- L - Montaggio
- M- Collaudo

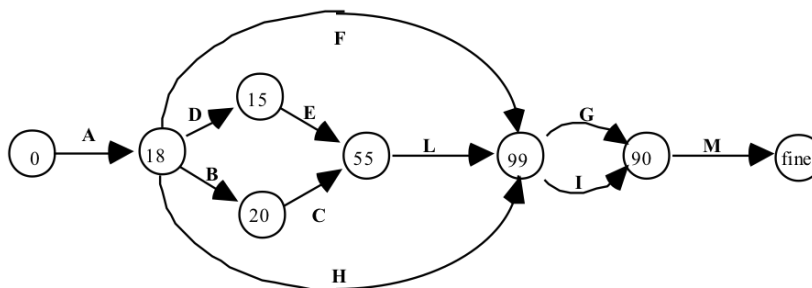


Figura 36

Prima che l'opera possa dirsi finita il collaudo dovrà avere dato risultato positivo. Il risultato positivo è la condizione che realizza l'evento fine. Perché possa essere svolto il collaudo la macchina dovrà essere già stata collegata alle reti elettriche e oleodinamiche. L'effettuato

collegamento è quindi l'evento di partenza. In questo evento concorrono quindi le attività I e G. Cosa è necessario perché queste attività possano iniziare? Che le reti siano pronte e che la macchina sia montata: evento finale delle attività L, F ed H. Perché si preparino le reti è necessario che sia definito il progetto: evento finale di A. Perché si monti la macchina dovranno essere pronti i pezzi e le fondazioni: evento finale di E e C. Per gettare le fondazioni è necessario avere precedentemente scavato: evento finale di D. Per costruire i pezzi, dovranno prima essere disponibili i materiali: evento finale di B. Le attività B e D possono iniziare solo quando è definito il progetto.

Questo modo di rappresentare il programma rende quindi evidenti le priorità e le interconnessioni fra le attività. Il metodo PERT non si limita però a questo: il reticolo ora tracciato ne è solo la intelaiatura che verrà completata con tutte le utilissime informazioni che il metodo è in grado di fornire.

4.5.1 Durate.

Occorre a questo punto attribuire ad ogni attività una certdurata. Questa sarà espressa per tutte le attività di uno stesso programma mediante la medesima unità di misura, che per altro può essere qualsiasi; in genere viene scelta in rapporto alla durata totale di cui si conosce l'ordine di grandezza (minuto, giorno, mese, anno, ecc.).

La fase di raccolta dei dati relativi alla durata è altrettanto importante quanto le precedenti esaminate. Infatti l'esperienza e l'intuito di chi deve svolgere questo compito determinano il successo dell'intero programma.

Nota per ogni attività la disponibilità di risorse, occorre rispondere con la massima approssimazione possibile alle seguenti domande:

- 1 - Se tutto andrà come al solito quanto durerà l'attività X?
- 2 - Se le circostanze saranno particolarmente favorevoli quanto durerà l'attività X?
- 3 - Se le circostanze saranno particolarmente avverse, quanto durerà l'attività X?

Le tre domande qui proposte in forma qualitativa, possono anche essere definite da quantità.

La durata di una attività può essere rappresentata mediante una curva probabilistica del tipo BETA, il cui andamento è rappresentato nella figura seguente.

L'espressione analitica delle curve Beta, definita tra i valori 0 e 1, è del tipo:

$$f(t) = K \cdot t^{\alpha} \cdot (1 - t)^{\beta}$$

con K determinabile mediante la funzione statistica Γ . Al variare dei parametri caratteristici α e β , cambia con continuità l'asimmetria della curva:

- per $f_1(t)$ in figura è $\alpha = 0,5$ e $\beta = 2$
- per $f_2(t)$ in figura è $\alpha = 2$ e $\beta = 0,5$

mentre per $\alpha = \beta$ la curva presenta andamento simmetrico.

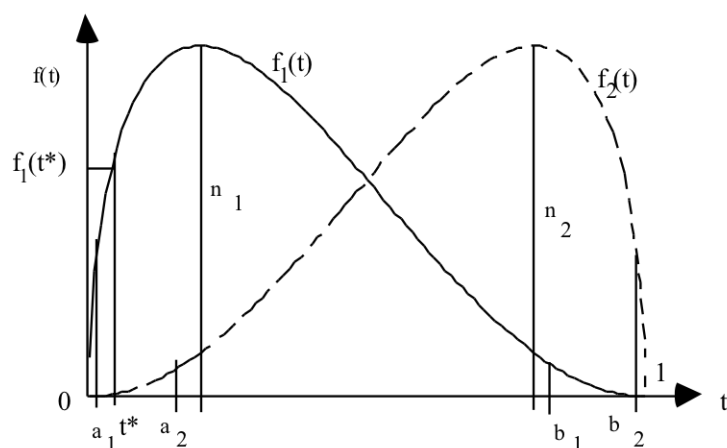


Figura 37

Cioè se, in relazione alle durate di attività uguali (lotto omogeneo) si rilevasse quante volte l'attività in questione è durata t^* si otterrebbe, ad esempio, il valore $f_1(t^*)$. Ripetendo i rilievi per t variabile da 0 a 1 (si noti che la variabile è da intendersi normalizzata in rapporto alla durata massima sperimentata) e riportando i valori in diagramma si otterrebbe uno degli andamenti indicati in figura.

Per ogni curva del genere si possono individuare tre punti caratteristici:

- **il punto n (norma):** è il valore di t (durata) che si verifica il maggior numero di volte (max frequenza)
- **il punto a:** è il valore di t (*durata ottimistica*) caratterizzata dal fatto che il 99,5% delle volte l'attività in questione dura di più.
- **il punto b:** è il valore di t (*durata pessimistica*) caratterizzata dal fatto che il 99,5% delle volte l'attività in questione dura di meno.

L'area sottesa dalla curva fino all'ascissa t generica rappresenta la probabilità che ha l'attività in questione di non durare più del tempo t . Analogamente l'area sottesa dalla curva tra le ascisse a e b rappresenta la probabilità che l'attività abbia una durata compresa tra a e b , probabilità che per definizione è pari al 99%.

Il fatto che n sia in posizione simmetrica rispetto ad a e b , ovvero si accosti ad uno o all'altro dei valori, traduce una precisa circostanza concreta, così come la maggiore o minore distanza fra a e b .

Si pensi ad esempio alla durata dei viaggi ferroviari o aerei nei quali c'è un margine di prevedibilità maggiore rispetto a quelli stradali. Capita di impiegare per un volo poco meno del tempo previsto, ed è d'altra parte assai frequente il caso di impiegare molto di più. Infatti una durata minore della più frequente si può avere per effetto di alcune cause che non comportano grossi guadagni di tempo (particolari condizioni meteorologiche, immediata autorizzazione al decollo e all'atterraggio, ecc.) mentre i ritardi possono sorgere da più numerosi motivi, ciascuno dei quali in genere comporta un effetto ben sensibile (avverse

condizioni meteorologiche, traffico intenso ed attese agli scali, ritardi agli imbarchi, coincidenze, ecc.). È questa un'attività la cui durata è rappresentabile mediante una curva beta con $n - a < b - n$.

Viceversa si pensi all'attività: addestramento del personale; se il corso di addestramento è previsto per un certo tempo, esso potrà durare poco di più se risulterà necessario evidenziarne alcune parti, ma potrà durare molto meno se, ad esempio, la selezione del personale da addestrare fornisce soggetti già versati nella materia. Si potrà quindi rappresentare la durata di questa attività mediante una curva BETA con $n - a > b - n$.

Quando poi le cause che condizionano la durata dell'attività sono di natura tale da poter con ugual peso produrre un aumento o una diminuzione della durata stessa, questa è rappresentabile mediante una curva BETA simmetrica rispetto alla norma, ovvero, se preferibile, mediante una gaussiana.

È evidente infine come l'ampiezza dell'intervallo $b-a$ traduce in modo immediato il margine di incertezza della previsione; quanto minore è $b-a$, tanto più addensate sono le durate intorno alla norma, quindi tanto più attendibili sono le previsioni.

Si è visto dunque come, ottenendo le risposte alle tre domande iniziali, l'analista è in grado di definire in forma approssimata per ogni attività la curva BETA corrispondente.

Sulla scheda rappresentativa della singola attività saranno quindi segnati i relativi valori di a , n , b .

A questo punto è lecito chiedersi su quale dei tre valori (a , n , b) conviene fare affidamento nella stesura di un programma, che - come si è detto - è basato sul calcolo delle durate.

Certamente non sarà il valore $-a-$ che nel 99,5% dei casi risulta inferiore alla durata reale; cioè assumendo a come durata attesa (D_e) della attività si accetterebbe il 99,5% di probabilità di errore.

Al contrario il valore $-b-$ garantisce con il 99,5% di probabilità che la durata della attività non sia superiore. Ma assumere $D_e = b$ sarebbe assai oneroso in termini di durate complessive, poiché nel reale svolgimento del progetto ciò porterebbe il verificarsi di costosissime attese.

Si potrebbe assumere $n = D_e$: cioè fondare la programmazione sul valore di durata che si verifica più di frequente. Ma se il valore di n non è in posizione centrale rispetto ad a e b , si rischierebbe di procedere o con un margine di probabilità troppo scarso ($n-a < b-n$) o con un rischio di attese e di costi troppo elevato ($n-a > b-n$).

Si assume quindi in genere per D_e il valore cui corrisponde il 50% di probabilità che la durata dell'attività in questione non sia superiore ad essa; **la durata attesa in questi casi coincide con la mediana della curva, come in figura.**

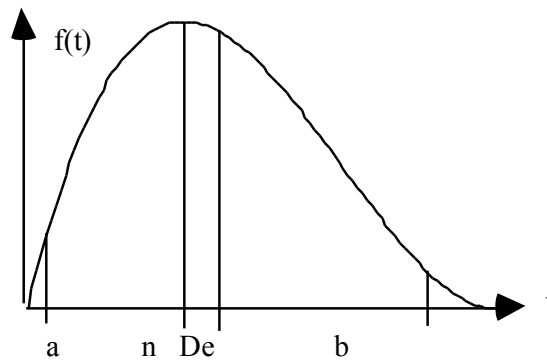


Figura 38

Il valore D_e è approssimato da:

$$D_e = \frac{a + 4n + b}{6}$$

Nel caso di curve simmetriche, come la Gaussiana, data la simmetria, la norma coincide con la mediana (e con la media) per cui si ha:

$$D_e = n$$

Si è visto come l'ampiezza dell'intervallo $b-a$ entro il quale è contenuto il 99% dei casi reali, dà dirette indicazioni riguardo alla attendibilità delle previsioni fatte. Si introduce quindi il parametro σ (*deviazione standard*), definito in analogia con le caratteristiche delle Gaussiane.

Per queste curve si dimostra che nell'intervallo $\pm \sigma$ intorno alla norma (di ampiezza 2σ) è contenuto il 67% dei casi; nell'intervallo $\pm 2\sigma$ intorno alla norma (di ampiezza 4σ) è contenuto il 95% dei casi, e nell'intervallo $\pm 3\sigma$ (di ampiezza 6σ) è contenuto circa il 99% dei casi; Per definizione dei valori a e b si ottiene quindi la valutazione approssimata della deviazione standard:

$$\sigma = \frac{b - a}{6}$$

Tale valore viene convenientemente assunto in prima approssimazione anche in relazione alla curva BETA.

Chiaramente per un insieme di previsioni l'attendibilità sarà data da;

$$\sigma_{\text{tot}} = \sqrt{\sum \sigma_i^2}$$

per cui, note le attendibilità delle singole attività componenti un progetto, risulta facile valutare l'attendibilità globale della previsione relativa all'intera opera.

4.5.2 Il calcolo dei Tempi Minimo e Massimo.

Si immagini di avere calcolato in base ai valori di a, b e n il valore della durata attesa D_e di ognuna delle attività individuate nell'esempio proposto.

Si sia quindi ottenuta la seguente lista:

A	-Progetto e stesura delle specifiche	$D_e = 60$ gg
B	-Reperimento materiali	$D_e = 90$ gg
C	-Costruzione particolari	$D_e = 120$ gg
D	-Scavo fondazioni	$D_e = 10$ gg
E	-Getto fondazioni	$D_e = 15$ gg
F	-Impianto elettrico	$D_e = 20$ gg
G	-Allacciamento elettrico	$D_e = 6$ gg
H	-Impianto oleodinamico	$D_e = 30$ gg
I	-Allacciamento oleodinamico	$D_e = 4$ gg
L	-Montaggio	$D_e = 30$ gg
M	-Collaudo	$D_e = 7$ gg

Si riportino nel reticolo PERT già tracciato i valori delle D_e . In genere si scrivono tra parentesi accanto alla sigla o al nome della attività corrispondente.

Si può calcolare a questo punto qual è il tempo minimo, valutato a partire dalla data di inizio, che occorrerà attendere perché si verifichi un certo evento.

Il tempo minimo dell'evento 18 è dato dalla data di inizio della attività A che concludendosi dà luogo all'evento, sommato alla durata attesa dell'attività A stessa. In questo caso, poiché l'attività A inizia alla data 0 si ha:

$$T_{\min 18} = 0 + 60 = 60$$

Il tempo minimo dell'evento 15 è dato dal tempo minimo dell'evento 18 sommato alla durata D_e dell'attività D

$$T_{\min 15} = T_{\min 18} + D_{eD} = 60 + 10 = 70$$

Per l'evento 20 si ha:

$$T_{\min 20} = 60 + 90 = 150$$

Volendo calcolare ora il tempo minimo dell'evento 55 occorre notare che, perché tale evento si realizzi, deve esaurirsi sia l'attività E che l'attività C; infatti solo quando ambedue le attività sono compiute può iniziare l'attività L.

Perché ciò sia rispettato bisogna calcolare:

$$T_{\min 55} = T_{\min 15} + De_E = 70 + 15 = 85$$

$$T_{\min 55} = T_{\min 20} + De_C = 150 + 120 = 270$$

quindi confrontare i valori ottenuti e fra tutti scegliere il valore massimo. Il tempo minimo dell'evento 55 è quindi:

$$T_{\min 55} = 270$$

In generale quindi si può dire che per valutare il tempo minimo dell'evento X generico è necessario che siano stati precedentemente calcolati i tempi minimi di ciascuno degli eventi di partenza di tutte le attività che confluiscono in X; indicando tali eventi con Yj il tempo minimo della generica attività X è dato da :

$$T_{\min X} = \left[T_{\min Y_j} + De_{Y_j-X} \right]_{\max_j} \quad [\text{II.28.}]$$

Cioè il tempo minimo dell'evento X è dato dal massimo dei valori ottenuti sommando ai tempi minimi degli eventi di partenza di tutte le attività confluenti in X, la durata attesa delle attività stesse. I tempi minimi così calcolati si riportano sul reticolo PERT accanto agli eventi corrispondenti (cifre sottolineate).

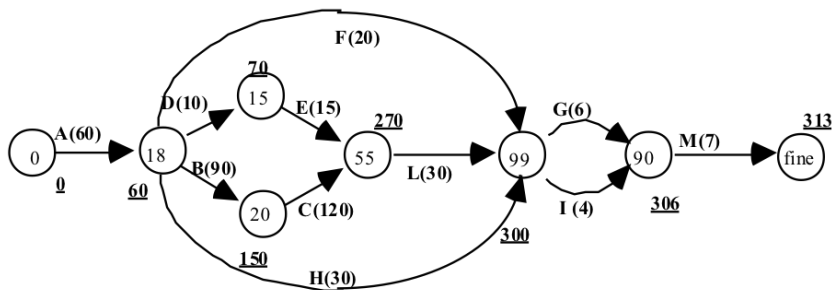


Figura 39

Il tempo minimo di un evento generico rappresenta dal punto di vista pratico la data, più prossima all'avvio, alla quale è possibile prevedere di far iniziare la attività seguente .

Riferendosi all'evento 15 il valore $T_{\min 15} = 70$ gg indica che si prevede che al 71° giorno può iniziare il getto delle fondazioni .

Sempre restando nel campo delle previsioni, si vede d'altra parte chiaramente come il fatto che una attività possa iniziare alla data corrispondente del tempo minimo del suo evento di partenza non implica che essa debba necessariamente iniziare in quella data.

Infatti l'attività E può iniziare il 71° giorno, ma quel che conta è che sia terminata il 270° giorno, e poiché essa dura 15 gg, si può ritardare di ben 185 giorni il suo inizio senza che ciò causi ritardi nello sviluppo globale dell'opera. È evidente quindi quanto è importante calcolare oltre il tempo minimo di ogni evento, anche il corrispondente tempo massimo: cioè quella data entro la quale deve verificarsi ogni evento.

Per il calcolo dei tempi massimi $T_{\max X}$, si procede a ritroso dall'ultimo evento fino a quello iniziale; per ogni evento finale il tempo massimo finale TMF sarà uguale al tempo minimo

finale T_{mF}: solo per una data corrispondente al tempo minimo finale infatti, non si hanno ritardi nel compimento dell'opera intera.

Riferendosi all'esempio proposto, volendo calcolare il tempo massimo dell'evento 90 si ha:

$$T_{\max 90} = \text{TMF} - \text{De}_M = 313 - 7 = 306$$

il T_{max 90} è pari alla differenza tra il TMF e la durata attesa della attività che da 90 porta a fine.

Procedendo, si voglia calcolare il T_{max 99}.

Quando più di un'attività parte da un evento, per calcolarne il T_{max} occorre sottrarre ai T_{max} di ciascuno degli eventi finali Y_j delle attività scaturenti dall'evento in questione, la durata attesa delle corrispondenti attività e fra i vari risultati ottenuti **occorre scegliere il minore** cioè

$$T_{\max X} = \left[T_{\max Y_j} - \text{De}_{X-Y_j} \right]_{\min_j} \quad [\text{II.29.}]$$

Il calcolo di T_{max 99} dà quindi :

$$T_{\max 99} = T_{\max 90} - \text{De}_G = 316 - 6 = 300$$

$$T_{\max 99} = T_{\max 90} - \text{De}_L = 316 - 4 = 302$$

Per cui in definitiva è **T_{max 99} = 300**.

Il perché di questo modo di procedere sta proprio nella definizione di T_{max}. Se infatti il T_{max 99} è l'ultima data cui si può verificare l'evento 99 senza creare ritardi, occorre che tra l'evento 99 e ciascuno dei successivi intercorra un tempo almeno uguale alla durata della più lunga delle attività comprese tra l'evento in questione e i successivi; perché questa condizione sia verificata occorre esattamente trovare il minore dei valori ottenuti come precedentemente descritto.

Procedendo, si possono calcolare i T_{max} di tutti gli eventi relativi all'esempio proposto e quindi riportarli nel reticolo (corsivo sottolineato).

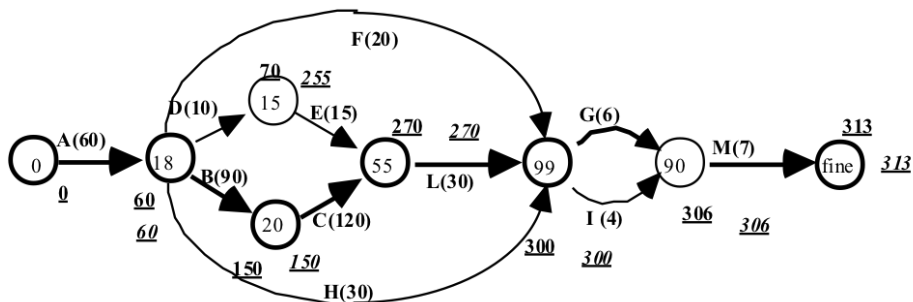


Figura 40

4.5.3 Percorsi Critici.

Si noti la fondamentale differenza tra la situazione dell'evento 15 per il quale si ha $T_{\max} \gg T_{\min}$ e quella ad esempio dell'evento 53 per il quale è $T_{\max} = T_{\min}$.

Durante lo svolgimento dell'opera il Capo Progetto dovrà preoccuparsi di controllare con molta maggiore attenzione le attività che conducono all'evento 53, che non quelle precedenti l'evento 15. Infatti un minimo ritardo nel verificarsi dell'evento 53 si riflette immediatamente in un ugual ritardo nella conclusione dell'opera, mentre un ritardo fino a 185 gg nell'attività D non porta nessuna conseguenza. Inoltre i 185 gg disponibili potranno essere destinati a prolungare nel tempo l'attività D, ovvero ad anticipare la E se conveniente. E' chiaro quindi che il Capo Progetto concentrerà la sua attenzione e le risorse disponibili nelle attività comprese fra eventi per i quali si ha $T_{\max} = T_{\min}$, seguendo con minore apprensione le altre, cui potrà in alcuni casi anche sottrarre risorse, accettando di prolungarne la durata. E' utile quindi che il Capo Progetto disponga di una immediata indicazione circa quanto può protrarre una attività, senza che questo ritardo porti conseguenze sull'intera opera.

Si calcolano allo scopo gli *slittamenti* delle attività come differenza tra il T_{\max} dell'evento in cui l'attività confluisce e la somma del T_{\min} dell'evento da cui ha origine l'attività e la D_e dell'attività stessa

Nell'esempio per l'attività D ed E si ha rispettivamente:

$$S_D = T_{\max 15} - (T_{\min 18} + D_{e_D}) = 255 - (60 + 10) = 185$$

$$S_E = T_{\max 53} - (T_{\min 15} + D_{e_D}) = 270 - (70 + 15) = 185$$

Per quelle attività per le quali la differenza tra il T_{\max} dell'evento in cui confluiscono ed il T_{\min} dell'evento da cui partono è uguale alla D_e , si determina slittamento nullo. Queste attività si indicano col nome di **attività critiche** e gli eventi fra cui sono comprese sono nominati **eventi critici**. Gli eventi critici e le attività critiche formano i *percorsi critici* cui si suole dare particolare evidenza grafica nel reticolo PERT (ad esempio colorando) per richiamare l'attenzione del Capo Progetto su queste fasi di lavoro che sono in grado di condizionare il buon esito dell'intera opera.

Finché il numero delle attività del caso da esaminare resta nell'ordine di grandezza di quello dell'esempio proposto è possibile affrontare la soluzione di una programmazione PERT senza l'aiuto di strumenti di calcolo. Ma nella pratica si superano assai facilmente le 100 attività, per giungere anche a 10.000 ed oltre; in questi casi l'analista si limita a preordinare le scelte che la macchina farà assai rapidamente e senza possibilità di errore, arrivando a tracciare correttamente l'intero reticolo completo di tutte le informazioni per il cui calcolo è stato predisposto.

In definitiva il metodo PERT è, come ogni metodo di planning, una organizzazione di dati in forma logica in grado di facilitare le scelte relative ad un progetto, ma a differenza di altri metodi, con il PERT si pongono in evidenza delle grandezze e si usa una procedura tale da rendere immediate le stesse scelte, tanto da poter preordinare ad esse le facoltà puramente esecutive di un computer.

5 Teoria delle Decisioni

Nello sviluppo del progetto di un sistema è molto raro il caso in cui la fase di definizione porta ad individuare una sola possibile soluzione ; al contrario, normalmente, il progettista si trova a dover scegliere tra diverse alternative possibili fin dalla valutazione della fattibilità del sistema e poi attraverso tutti i momenti che ne caratterizzano l'intero progetto , dalla ricerca allo sviluppo, al disegno, alla costruzione, all'ottimizzazione, alla gestione ed all'esercizio del prodotto.

A volte si tratta di scelte relativamente semplici, rese evidenti dalla natura delle possibili alternative ovvero da vincoli e condizioni al contorno propri del sistema di cui trattasi. Molto spesso tuttavia la scelta e le conseguenti decisioni operative devono essere espresse in relazione ad un numero rilevante di alternative, non semplicemente ed immediatamente confrontabili tra loro, sia per la loro consistenza che per gli effetti che ciascuna può produrre sul ciclo di vita del sistema.

In questi casi, al fine di ridurre la possibilità di errore, è utile disporre di un metodo che razionalizzi e renda in forma organizzata le funzioni logiche che, più o meno consapevolmente, vengono normalmente svolte da chi si accinge a prendere decisioni fondate su scelte razionali. La teoria delle decisioni, di cui qui di seguito si propongono alcuni concetti elementari, fornisce tale metodo al progettista, proponendo procedure normalizzate per l'elaborazione delle scelte.

Nel progetto di sistemi complessi, che implica decisioni espresse da numerose persone, tra loro diverse per funzione, cultura e formazione, è di fondamentale importanza che sia adottata e standardizzata una comune procedura di formazione delle scelte operative, al fine di rendere congruenti le conseguenti decisioni : ciò viene sostanzialmente proposto dalla **teoria delle decisioni**.

Perché sia possibile esprimere una scelta motivata è necessario che le differenti alternative in esame siano rese tra loro confrontabili, occorre cioè che sia definibile il valore di ciascuna di esse espresso secondo la stessa unità di misura, se riferibile ad una scala numerica, ovvero espresso in relazione agli stessi attributi qualitativi, quando esso è graduato da un prefissato ordine di preferenza.

Molte volte l'unità di misura comune cui si riduce il valore di differenti alternative è di natura economica (costo, profitto, risparmio, ecc.), e spesso a questo metro si possono ridurre parametri differenti come l'efficienza, l'affidabilità, il tasso di inquinamento, la qualità, l'impatto ambientale; tuttavia esistono casi in cui la riduzione a fattore comune va ricercata entro dimensioni diverse da quella puramente economica, si pensi ad esempio a problematiche che coinvolgono in maniera sostanziale considerazioni di natura sociale o ideologica ecc. . In questi casi può essere difficile definire una scala numerica di confronto, talché spesso, secondo criteri euristici, viene predeterminata una scala di preferenza in relazione a parametri qualitativi che caratterizzano l'alternativa.

In ogni caso comunque è necessario, per ciascuna delle possibili alternative da esaminare, definire la **Funzione di Merito** espressa in unità di misura omogenee e quindi confrontabili.

La Funzione di Merito, detta anche Valore dell'alternativa, può essere espressa in generale con la seguente espressione implicita:

$$E = f (X, D, Y)$$

in cui X sono le **variabili controllabili** dal progettista, D i **parametri di sistema dipendenti** dalle scelte del progettista ed Y le **variabili e parametri di sistema che non dipendono dalle scelte di progetto** .

Se, come in genere accade, esistono condizioni al contorno che devono essere rispettate perché sia praticabile l'alternativa in esame, queste possono essere espresse in forma implicita come

$$g (X, D, Y) = C$$

in cui all'uguaglianza può, in relazione al caso specifico, essere sostituita una predeterminata disuguaglianza.

Le funzioni $f()$ e $g()$ sono quelle che permettono la riduzione a fattore comune del valore delle diverse alternative.

Per esempio, la definizione del diametro per un tratto di tubazione appartenente ad una rete di distribuzione di vapore, una volta che sono verificate le caratteristiche funzionali proprie del problema in esame , si presenta come scelta tra differenti alternative la cui Funzione di

Merito (Valore) può essere espressa in termini di costo, determinato sia dal **costo di realizzazione** che dal **costo di esercizio** del tratto di tubazione considerato.

In questo caso risulta che

$$E = \text{Costo totale} = f (X, D, Y)$$

X = il valore del diametro da scegliere tra quelli disponibili

D = spessore della coibentazione, distanza tra appoggi, ecc.

Y = perdita di carico, costo unitario di energia, di materiali e accessori, ecc.

mentre le condizioni al contorno sono espresse in maniera analoga da limitazioni riguardanti gli ingombri, la statica, le condizioni dinamiche, l'energia minima che deve essere trasferita, ecc.

5.1 Matrice di valutazione delle alternative.

In generale, per una scelta espressa in sede di previsione, l'efficacia risultante a posteriori dipende fortemente dalle circostanze che si verificano nel momento in cui tale scelta viene posta in atto; ad esempio, decidere di fare un picnic, può risultare una scelta appropriata se le condizioni meteorologiche sono favorevoli, mentre sarebbe da evitare nel caso opposto ; l'inverso si potrebbe dire per una scelta alternativa, quale quella di restare in casa.

Il valore di una scelta deve dunque essere considerato non solo in relazione alla natura di ogni singola alternativa, ma anche con riferimento alle differenti circostanze che possono verificarsi e che possono modificare gli effetti di tale scelta.

A tal fine è dunque utile tracciare la **matrice di valutazione delle alternative**, di cui, qui di seguito, si propone uno schema illustrativo:

	P ₁	P ₂	...	P _n	P _j
A _i	F ₁	F ₂	...	F _n	F _j
A ₁	E ₁₁	E ₁₂	...	E _{1n}	
A ₂	E ₂₁	E ₂₂	...	E _{2n}	
...	
A _m	E _{m1}	E _{m2}	...	E _{mn}	

Figura 41 - Matrice di valutazione delle alternative

Per le diverse alternative esaminate A_i , viene presentato il valore E_{ij} nella colonna corrispondente alla circostanza F_j presa in considerazione ed alla probabilità P_j associata al manifestarsi di tale circostanza.

Nel tracciare la matrice di valutazione delle alternative è importante tener conto di alcune considerazioni:

- tutte le alternative ritenute possibili e/o significative devono essere riunite nella stessa matrice: ciò che non viene inserito nella matrice è inteso come non possibile o, comunque, non interessante;
- tutte le possibili circostanze in cui verrà posta in atto l'alternativa scelta devono essere inserite nella stessa matrice : vale quanto precedentemente detto per le alternative;
- il verificarsi di una delle circostanze considerate preclude la possibilità del manifestarsi di altre diverse circostanze;
- il verificarsi di una qualunque delle circostanze previste non deve essere influenzato dalla natura dell'alternativa esaminata;
- la somma delle probabilità associate al manifestarsi di ciascuna circostanza deve essere pari all'unità.

La matrice di valutazione delle alternative, tracciata secondo i predetti criteri, costituisce uno strumento semplice ed efficace per l'elaborazione delle scelte di progetto.

5.1.1 Decisioni in condizioni di " certezza".

A volte la scelta deve essere espressa tra diverse possibili alternative che potranno essere attuate entro un solo possibile insieme di circostanze future, che quindi, per essere ritenuto il solo possibile, rappresenta con certezza le condizioni di esercizio dell'alternativa realizzata. E' il caso delle scelte operate in campo puramente scientifico, entro il quale esistono leggi fondate su osservazioni sperimentali ed ampiamente verificate, come la legge di Newton, la legge di Ohm, ecc., che permettono di prevedere con sufficiente certezza **una sola possibile configurazione delle circostanze future.**

In generale, per altro, è possibile che una situazione simile si verifichi anche per decisioni da definire in campo diverso da quello puramente scientifico, quando un solo assetto delle circostanze future può essere ritenuto significativo ai fini della scelta tra le possibili alternative. Per le decisioni in condizioni di "certezza" la matrice di valutazione delle alternative si riduce ad un vettore colonna:

A_i	F
A_1	E_1
A_2	E_2
...	...
A_m	E_m

Figura 42 - Vettore valutazione delle alternative

Quando il valore delle alternative E_i è espresso in termini economici si tratta di individuare l'alternativa cui è associato il minimo costo previsto

$$\min_i \{ E_i \} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ovvero il massimo profitto

$$\max_i \{ E_i \} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Quando la decisione deve essere definita in relazione ad alternative il cui valore non è definibile in scala numerica, ma soltanto in rapporto ad un criterio di preferenze, è opportuno confrontare ciascuna delle possibili alternative con tutte le altre e quindi ordinarle secondo il numero di preferenze accreditabili a ciascuna di esse.

Ad esempio, per quattro possibili alternative siano definite le funzioni di merito E_1, E_2, E_3, E_4 , espresse in termini qualitativi ; tutti i possibili confronti, diano i seguenti risultati :

- E_1 preferita rispetto a E_3 ; E_2 preferita rispetto a E_3
- E_2 preferita rispetto a E_1 ; E_2 preferita rispetto a E_4
- E_3 preferita rispetto a E_4 ; E_1 preferita rispetto a E_4

risulta che E_2 è preferita tre volte, E_1 due volte, E_3 una volta ed E_4 non ha preferenze: pertanto la graduatoria di preferenza é:

$$E_4 < E_3 < E_1 < E_2.$$

5.1.2 Decisioni in condizioni di rischio.

Si consideri il seguente esempio.

In sede di progetto si debba decidere in merito al sistema di produzione e distribuzione di vapore alle utenze predeterminate U_1 e U_2 ($U_2 = 1.5 * U_1$) ; l'esercizio delle due utenze produce reddito e comunque il valore delle diverse alternative è esprimibile in termini di ricavi

economici ottenibili. Per le circostanze entro cui si attuerà l'esercizio del sistema sono previste tre distinte possibilità, a ciascuna delle quali è associata una probabilità di manifestarsi:

- **F1 (con probabilità P1) : esercizio della sola utenza U1**
- **F2 (con probabilità P2) : esercizio della sola utenza U2**
- **F3 (con probabilità P3) : esercizio contemporaneo della utenza U1 e della utenza U2.**

Ai fini dell'esempio si considerino 5 distinte alternative.

L'alternativa A1 consiste nell'istallare un solo generatore di vapore ed una sola tubazione dimensionati in modo da soddisfare le richieste dell'utenza U2 (maggiore tra le due), con l'aggiunta di un dispositivo che permetta, quando richiesto, di spostare il collettore sull'utenza U1.

L'alternativa A2, propone l'installazione di un generatore ed un collettore per ciascuna delle due utenze.

L'alternativa A3, prevede due generatori, entrambi dimensionati in base alle richieste dell'utenza U2, ed un sistema di distribuzione composto tra l'altro da un collettore dimensionato per la somma delle due utenze.

L'alternativa A4 corrisponde ad una soluzione in cui il solo generatore ed il solo collettore sono dimensionati in base alla somma delle due utenze.

L'alternativa A5 si distingue dalla precedente per il fatto che prevede due distinti collettori, ciascuno dimensionato in base alle caratteristiche di una delle due utenze.

Prescindendo dall'analisi della struttura della **Funzione di Merito**, cui certamente concorrono, tra l'altro, variabili di natura tecnica, economica, affidabilistica e gestionale, si assuma che il valore di ciascuna alternativa sia espresso, per le diverse possibili circostanze future, in termini economici riconducibili ai ricavi netti ottenibili dall'esercizio delle utenze, per cui, a parità di altre condizioni, la semplicità dell'impianto ha un valore economico positivo poiché, tra l'altro, permette di ridurre i costi di ammortamento e di manutenzione.

La matrice di valutazione delle alternative, riferita all'esempio è rappresentata nella figura seguente

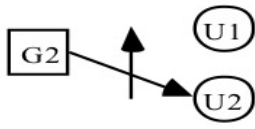
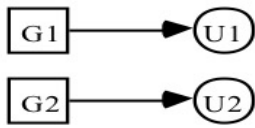
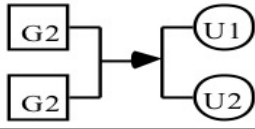
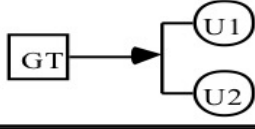
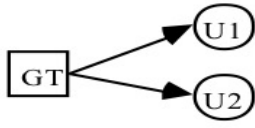
		PROBABILITA'	P1 = 0,25	P2 = 0,30	P3 = 0,45
		PREV. UTILIZZAZ.	F1 = U1	F2 = U2	F3 = U1 + U2
ALTERNATIVE					
A1		110	165	165	
A2		100	150	250	
A3		90	175	260	
A4		95	145	280	
A5		85	135	275	
NOTA : U2 = 1,5 U1					

Figura 43 - matrice di valutazione

Una prima lettura della matrice evidenzia il fatto che l'alternativa A5, nelle tre possibili circostanze future, dà luogo a valori della funzione di merito che sono rispettivamente inferiori a quelli corrispondenti della alternativa A4 . In questo caso si dice che **la A5 è "dominata" dalla A4** e può quindi essere eliminata dalla matrice di valutazione, che quindi può essere ridotta a :

Prob.	P1=0,25	P2=0,30	P3=0,45
Prev.	F1=U1	F2=U2	F3=U1+U2
A1	110	165	165
A2	100	150	250
A3	90	175	260
A4	95	145	280

Figura 44 - matrice ridotta

Esistono alcuni criteri che possono fungere da orientamento per chi deve formulare scelte ed esprimere decisioni in condizioni di rischio, cioè in condizioni analoghe a quelle riprodotte nell'esempio proposto. Tra questi, sono da citare:

- **il criterio di soglia**
- **il criterio della massima probabilità**
- **il criterio del valore atteso.**

Quando chi deve definire la scelta si preoccupa di individuare quelle alternative che gli consentono, sia pur in circostanze favorevoli, di realizzare un valore almeno pari ad una soglia minima prefissata oppure quelle che, per ogni possibile circostanza futura, non lo esponano all'eventualità di verificare un valore inferiore ad un prefissato limite inferiore, si dice che viene applicato **il criterio di soglia**.

Nell'esempio, sia 250 la soglia minima di riferimento, ne deriva che la soluzione A1 , è da scartare in base a questo criterio. L'applicazione del criterio di soglia all'esempio proposto porta dunque a preferire le alternative

A2, A3 e A4

Il **criterio della massima probabilità** suggerisce di basare la scelta sui valori delle alternative accreditati del massimo livello di probabilità; nell'esempio, si tratta di prendere in considerazione soltanto i valori della colonna corrispondente a F3 e gestirli come nel caso della decisione in condizioni di certezza . Questo criterio è tanto più giustificabile, quanto maggiore è il divario tra la probabilità presa in considerazione e le probabilità delle possibili circostanze future che vengono trascurate. L'applicazione del criterio della massima probabilità all'esempio proposto porta a scegliere l'alternativa

A4

Il **criterio del valore atteso** suggerisce di comparare le alternative calcolandone il valore atteso come somma dei prodotti dei rispettivi valori per la probabilità del manifestarsi della corrispondente circostanza futura, come nella seguente tabella:

Prob.	P1=0,25	P2=0,30	P3=0,45	Valore
Prev.	F1=U1	F2=U2	F3=U1+U2	Atteso
A1	110*0,25	165*0,30	165*0,45	151,25
A2	100*0,25	150*0,30	250*0,45	182,50
A3	90*0,25	175*0,30	260*0,45	192,00
A4	95*0,25	145*0,30	280*0,45	193,25

Figura 45 - applicazione del criterio del valore atteso

L'applicazione di questo criterio all'esempio proposto porta a scegliere l' alternativa

A4

Volendo raccogliere in una graduatoria le preferenze definite in base ai diversi criteri, si registra che:

- l'alternativa A1	é preferita	0	volte
- l'alternativa A2	é preferita	1	volta
- l'alternativa A3	é preferita	1	volta
- l'alternativa A4	é preferita	3	volte

5.1.3 Decisioni in condizioni di incertezza.

A volte non è possibile assegnare alcun valore di probabilità alle distinte circostanze future, pur essendone confermata la possibilità del manifestarsi in condizioni di mutua esclusione. In questi casi si dice che si è chiamati a prendere decisioni in condizioni di incertezza.

Se, riferendosi all'esempio proposto precedentemente, si assume che non sia possibile definire alcun valore delle P_j , si delinea una situazione in cui le scelte devono essere determinate in condizioni di incertezza.

Il **criterio di Laplace** per la formulazione delle scelte in condizioni di incertezza, si basa sulla considerazione che non sussiste alcun motivo per cui il manifestarsi di una tra le possibili circostanze future sia più probabile del manifestarsi di qualunque altra; conseguentemente se $-n-$ rappresenta il numero delle distinte possibili future circostanze, a ciascuna di esse viene associata una probabilità di manifestarsi pari a $1/n$. Ne deriva che è da preferire l'alternativa

cui corrisponde il massimo valore della media aritmetica dei valori corrispondenti alle distinte circostanze future.

La seguente tabella rappresenta l'applicazione del criterio di Laplace all'esempio trattato:

Prev.	F1=U1	F2=U2	F3=U1+U2	Media
A1	110/3	165/3	165/3	146,66
A2	100/3	150/3	250/3	166,66
A3	90/3	175/3	260/3	174,99
A4	95/3	145/3	280/3	173,33

Figura 46 - applicazione del criterio di Laplace

che suggerisce la scelta dell'alternativa

A3

Il **criterio così detto "maxmin"**, corrisponde ad una previsione pessimistica, o quantomeno molto prudente, dei possibili futuri scenari, e suggerisce la scelta delle alternative a cui corrisponde il maggiore dei peggiori valori previsti in una qualunque delle possibili circostanze future. Applicando questo criterio all'esempio si ottiene:

A _i	min E _{ij}
A1	110
A2	100
A3	90
A4	95

Figura 47 - criterio maxmin

cioè, nelle circostanze future meno favorevoli, l'alternativa che può dare il miglior risultato è

A1

Considerazioni simmetriche sono quelle che portano alla definizione del **criterio così detto "maximax"**, corrispondente ad una previsione ottimistica delle circostanze future; in base a questo criterio si tratta di scegliere quelle alternative che offrono il maggior valore tra i migliori risultati che ciascuna alternativa può conseguire in una qualunque delle possibili future circostanze.

In relazione all'esempio:

A_i	$\max E_{ij}$
A1	165
A2	250
A3	260
A4	280

Figura 48 - criterio maximax

cioè, nelle circostanze future più favorevoli, l'alternativa che può dare il miglior risultato è

A4

Il criterio di Hurwicz propone un compromesso tra la previsione estremamente pessimistica e quella decisamente ottimistica proprie dei due precedenti criteri, indicando come preferibile l'alternativa cui corrisponde

$$\max_i \{ a * [\max_j E_{ij}] + (1-a) * [\min_j E_{ij}] \}$$

in cui E_{ij} è il valore della i -esima alternativa nella j -esima possibile futura circostanza.

E' così possibile graduare la previsione all'interno delle due situazioni estreme facendo variare il valore di a - tra 0 ed 1 .

Applicando il criterio di Hurwicz all'esempio, con $a = 0,2$ si ottiene :

A_i	$\{ a [\max_j E_{ij}] + (1-a) [\min_j E_{ij}] \}$
A1	$0,2 * 165 + 0,8 * (110) = 121$
A2	$0,2 * 250 + 0,8 * 100 = 130$
A3	$0,2 * 260 + 0,8 * 90 = 124$
A4	$0,2 * 280 + 0,8 * 95 = 132$

Figura 49 - applicazione del criterio di Hurwicz

che indica come preferibile l'alternativa A4.

Quando $a = 0$, si ritrovano le indicazioni del criterio maximin, mentre, all'opposto, per $a=1$ i valori coincidono con quelli ottenibili con il criterio maximax.

E' interessante osservare, come nel grafico riportato in figura seguente, l'andamento delle funzioni

$$H_i(a) = \{ a * [\max_j E_{ij}] + (1-a) * [\min_j E_{ij}] \}$$

riferite a ciascuna delle possibili alternative A_i .

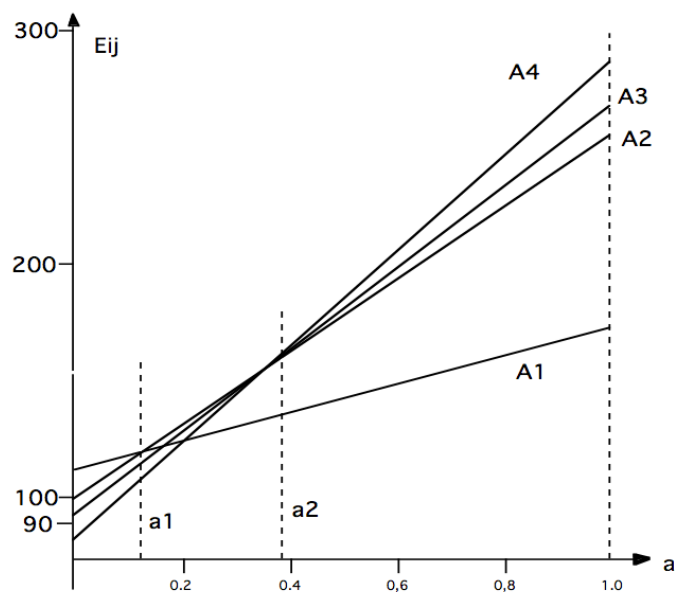


Figura 50 - andamento di E_{ij} in base al valore di a

Con riferimento all'esempio proposto, la figura mostra come, per qualunque valore di $a < a_1$, l'alternativa A1 è accreditata di valore superiore alle altre; per $a > a_1$, l'alternativa A2 è preferibile rispetto a quella A3, che a sua volta è preferibile rispetto ad A4; infine per a maggiore di a_2 è da preferirsi l'alternativa A4 rispetto a tutte le altre e la A3 rispetto alla A2. Si osserva dunque come l'indicazione di una preferenza, oltre che dalla consistenza propria delle alternative considerate, in generale dipende dal criterio di comparazione adottato e dal modo in cui viene applicato il criterio al caso specifico. D'altra parte non esiste alcun criterio che possa fornire un metodo oggettivamente e univocamente valido per definire le scelte in condizioni di incertezza o di rischio, per cui la responsabilità della scelte in definitiva è demandata al progettista che confronta le indicazioni derivanti dall'applicazione dei diversi criteri precedentemente descritti, con le valutazioni dettate dalla propria esperienza professionale e, comunque, da considerazioni soggettive

5.2 Valutazione Economica di Alternative di Progetto;

Molto frequentemente la scelta fra alternative di progetto, ciascuna delle quali dal punto di vista tecnico è in grado di soddisfare le richieste del sistema, deve essere fondata su considerazioni di natura economica.

Per il progettista è dunque importante la conoscenza dei concetti elementari che consentono di elaborare efficaci strumenti per la valutazione economica delle alternative di progetto.

5.2.1 Il modello dei flussi economici .

Il fatto riconosciuto e dimostrabile che la disponibilità attuale di denaro costituisce per sé stessa un valore economico è la base della struttura del modello dei flussi economici nel tempo. Tale valore economico deriva dalla considerazione che detta disponibilità implica direttamente la capacità di produrre altro denaro.

In altre parole il valore economico di 1 € (unità di conto), posseduta oggi, è maggiore del valore dello stesso importo di cui si abbia disponibilità tra un anno, perché durante questo intervallo di tempo lo stesso importo è in grado di produrre altro denaro.

Al valore economico della disponibilità di denaro corrisponde un prezzo, detto **interesse**, ed espresso normalmente in percentuale riferita ad intervalli di tempo pari ad un anno.

Una semplice schematizzazione di un flusso economico può essere rappresentata come segue :

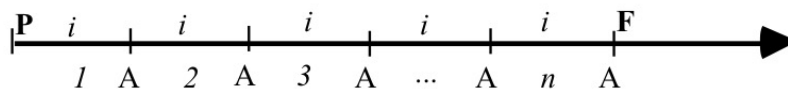


Figura 51 - flusso economico

in cui

i = tasso di interesse annuale

n = numero di annualità

P = ammontare del capitale al tempo zero

F = valore finale del capitale, dopo n annualità al tasso di interesse composto in base i .

A = annualità di ammortamento

L'interesse prodotto da un capitale P , per un certo tempo, può essere calcolato in forma di interesse semplice come

$$I = P * i * n$$

ma più comunemente si calcola nella forma di interesse composto, considerando che la quota di interesse annualmente maturata è anch'essa stessa in grado di produrre altri interessi.

Si noti che i calcoli relativi ai flussi economici, devono essere riferiti ad istanti predeterminati dell'arco di tempo preso in considerazione : generalmente si prende a riferimento l'inizio o la fine di ciascuna annualità ; corrispondentemente gli interessi possono essere calcolati in misura anticipata o posticipata rispetto all'annualità cui si riferiscono . Nelle considerazioni seguenti, salvo diversa indicazione, si sviluppano calcoli relativi ad interessi composti annuali posticipati riferiti al termine dell'annualità.

Tenendo presente la seguente tabella

Anni	Valore del Capitale all'inizio dell'anno	Interesse prodotto durante l'anno	Valore del Capitale alla fine dell'anno
1	P	P i	P+P i = P(1+i)
2	P (1+i)	P (1+i) i	P(1+i)+P(1+i) i = P(1+i) ²
3	P (1+i) ²	P (1+i) ² i	P(1+i) ² +P(1+i) ² i = P(1+i) ³
n	P (1+i) ⁿ⁻¹	P (1+i) ⁿ⁻¹ i	P(1+i) ⁿ⁻¹ +P(1+i) ⁿ⁻¹ i = =P(1+i) ⁿ = F

e riferendosi allo schema di flusso proposto, si possono facilmente visualizzare le seguenti interessanti relazioni tra le predette grandezze.

Il **valore finale F** del capitale iniziale P dopo n annualità, maturando interessi composti al tasso i, è :

$$F = P(1 + i)^n$$

Il valore attuale P del capitale oggi equivalente alla disponibilità di una somma di denaro F, che si realizza tra n anni, considerando l'interesse composto al tasso i, è :

$$P = F \left[\frac{1}{(1 + i)^n} \right]$$

Spesso capita che un finanziamento di ammontare P, venga concesso sotto forma di mutuo per n anni all'interesse composto in base al tasso i, e restituito mediante rimborsi annuali (ad esempio posticipati) di importo costante pari ad A.

In questi casi, può essere interessante, calcolare qual è l'ammontare di un unico rimborso F, al termine delle n annualità, che risulta equivalente alla serie degli n rimborsi annuali A.

Riferendosi allo schema proposto e considerando che trattasi di rimborsi annuali posticipati, risulta che l'ultima annualità A contribuisce al valore di F senza produrre interessi aggiuntivi, perché versata simultaneamente ad F, mentre la penultima contribuisce nella misura di A(1+i) perché, durante l'ultimo anno il rimborso A produce interessi Ai, e così via, per cui si può scrivere :

$$F = A(1) + A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^{n-1}$$

moltiplicando questa espressione per (1+i) si ottiene

$$F(1+i) = A(1+i) + A(1+i)^2 + A(1+i)^3 + \dots + A(1+i)^n$$

Sottraendo membro a membro la prima espressione dalla seconda risulta :

$$F(1+i) - F = A [(1+i)^n - 1]$$

$$Fi = A [(1+i)^n - 1]$$

ed in definitiva

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

e simmetricamente

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

che rappresenta **la rata annuale A che equivale al singolo rimborso finale F**.

Per calcolare la rata annuale posticipata di rimborso di un mutuo che ha concesso un finanziamento P, al tasso di interesse i per n annualità, dalla precedente si ottiene:

$$A = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Ed infine, risolvendo la precedente in termini di P, si ottiene

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

Che rappresenta il finanziamento ottenibile da un mutuo a tasso di interesse i che preveda n annualità posticipate di rimborso, ciascuna di valore A .

5.3 Determinazione delle equivalenze economiche .

Due o più alternative possono essere ritenute equivalenti dal punto di vista economico se, a ciascuna di esse, corrisponde lo stesso valore

$$E = f(Ft, i, n)$$

calcolato in relazione alla stessa data T_0 , applicando semplicemente le predette formule che regolano i flussi economici e tenendo presente che:

- E : può essere il valore attuale o il valore finale o l'annualità di ammortamento;
- Ft : è l'ammontare di denaro preso in considerazione, riferito al termine (ovvero all'inizio) dell'annualità t ;
- i : è il tasso di interesse annuale ;
- n : è il numero di annualità .

Se, ad esempio si vuole calcolare il valore finale di $P = 1€$, dopo 8 anni, all'interesse composto in base al tasso del 10%, applicando la relativa espressione di F si ottiene:

$$F = 1 * (2.144) = 2.144 €$$

Nella situazione reciproca, con $i=12%$, $n=10$ anni e $F = 1€$, il valore attuale risulta :

$$P = 1 * (0.3220) = 0,3220 €$$

In pratica ciò significa che, se il tasso d'interesse corrente del denaro è il 12%, non più di 0.322 € possono essere spesi oggi per ottenere tra 10 anni un beneficio di ammontare pari a 1 €.

Analogamente si può calcolare la situazione reciproca . Ad esempio, se $i=12%$, $n=6$ anni e $F=1€$,

$$A = 1 * (0.1232) = 0.1232 €$$

cioè 6 annualità successive da 0.1232 € sono equivalenti ad un unico incasso da 1 €, sei anni più tardi.

Se $i=9%$, $n=10$ anni ed $A= 1€$, si può calcolare

$$P = 1 * (6.4177) = 6.4177 €$$

cioè, al tasso corrente del 9%, per ottenere un beneficio annuale di 1€, per 10 anni, non si giustifica oggi un investimento superiore a 6.4177 €.

Mentre nella situazione reciproca, ad esempio con $i=14%$, $n=7$ anni e $P = 1€$, risulta

$$A = 1 * (0.2332) = 0.2332 \text{ €}$$

cioè, al tasso corrente del 14%, a fronte di un investimento di 1 € deve risultare un beneficio annuale, per sette anni, almeno pari a 0.2332 €.

5.3.1 Il valore economico di una singola alternativa in condizioni di certezza.

A volte il progettista può trovarsi a valutare, dal punto di vista economico, l'opportunità di porre in essere, oppure no, un determinato sistema, per il quale si prefigurano con certezza le condizioni di esercizio, sotto forma di un **unico possibile scenario**.

Per esempio, si supponga di voler valutare la convenienza economica dell'istallazione di un sistema di recupero di calore dai fumi di una caldaia, che può dar luogo a determinati risparmi di combustibile. Per semplicità si ammetta che i costi ed i risparmi, ancorché diffusi lungo la vita del sistema in esame, siano temporalmente concentrati all'inizio (ovvero alla fine) delle diverse annualità ; si supponga altresì che la vita del sistema sia pari a quattro anni, e che il tasso di interesse corrente sia del 12%.

Il flusso economico, riferito all'esempio, può essere rappresentato come in tabella:

Descrizione	Data	Spesa/u.c	Rispar./u.c	F
Invest.iniziale	1/1/...0	-28.000	-	-28.000
Rispar. I anno	1/1/...1	-	9.500	9.500
Rispar. II anno	1/1/...2	-	9.500	9.500
Costo rev/manut	1/1/...2	-2.500		-2.500
Rispar. III anno	1/1/...3	-	9.500	9.500
Rispar. IV anno	1/1/...4	-	9.500	9.500
Valore di recupero	1/1/...4	-	8.000	8.000

in cui si è supposto che dopo 2 anni di esercizio il sistema richieda una revisione generale per 2.500 u.c. e che al termine dei quattro anni di funzionamento il sistema stesso possa essere venduto ad un prezzo di 8.000 u.c. .

5.3.2 Valutazione dell'investimento secondo il valore attuale.

Si tratta di calcolare il valore attuale di investimento $P(i)$ dato dalla differenza tra il valore attuale dei risparmi ed il valore attuale degli esborsi previsti nel tempo, alle diverse annualità, stante un tasso di interesse pari ad i .

La spesa F_0 effettuata alla data 0 deve essere attualizzata mediante il coefficiente $(1+i)^0=1$; le spese o i risparmi realizzati alla fine della prima annualità, ovvero all'inizio della seconda, contribuiscono al valore attuale dell'investimento mediante il coefficiente $(1+i)^{-1} = 0,8929$; quelle relative all'annualità successiva (si noti che in questo caso si tratta di somma algebrica tra un termine positivo ed uno negativo, cioè tra un risparmio ed un esborso) sono affette dal coefficiente $(1+i)^{-2}=1.12^{-2} = 0.7972$; e così via, per cui in formule si può scrivere:

$$P(i) \text{ attuale} = \sum_{t=0}^n F_t (1+i)^{-t}$$

ed in forma numerica:

$$P(i) \text{ attuale} = -28.000*(1) + 9.500*(0,8929) + 7.000*(0.7972) + \\ +9.500*(0.7118) + 17.500*(0.6355) = 3.946 \text{ €}$$

Poiché il risultato è positivo, se ne deduce che il valore attuale dei risparmi è maggiore del valore attuale degli esborsi, quindi **l'investimento può essere ritenuto conveniente dal punto di vista economico.**

5.3.3 Valutazione del tasso di rendimento.

Un metodo efficace e sintetico per valutare l'opportunità economica dell'investimento, consiste nel calcolarne il tasso di rendimento cioè il valore del tasso di interesse che rende il valore attuale degli esborsi uguale al valore attuali dei risparmi; in formule:

$$0 = P(i^*) \text{ attuale} = \sum_{t=0}^n F_t (1+i^*)^{-t}$$

i^* = tasso di rendimento dell'investimento.

La soluzione della precedente relazione va trovata per interpolazione numerica come nel seguente calcolo riferito all'esempio che trattiamo:

- **posto $i=15\%$ si calcola $P(i) = 31.982-29.800 = 2.182$**

- **posto $i=20\%$ si calcola $P(i) = 28.450-29.736 = -1.286$**

interpolando si ottiene

$$i^* = 15\% + 5 \left[\frac{(2.182-0)}{(2.182+1.286)} \right] \% = 18.15\%$$

o per via grafica come in fig. seguente.

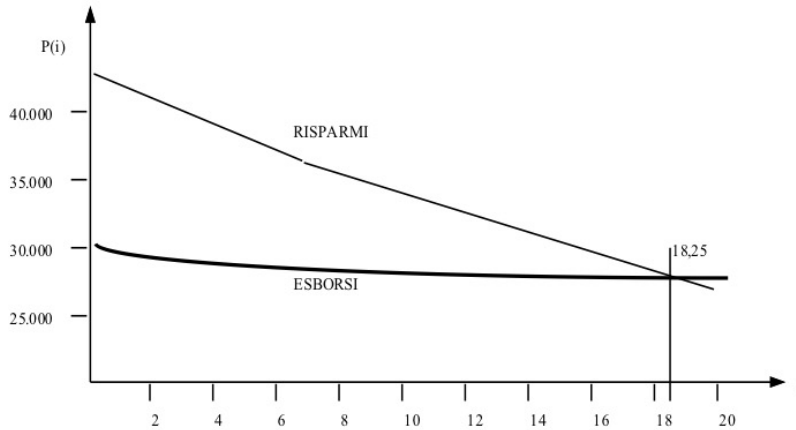


Figura 52 - interpolazione per il calcolo di i^*

5.3.4 Valutazione del tempo di restituzione (PAYOUT) del capitale investito.

Un'altra maniera di valutare la convenienza di una spesa consiste nel calcolare, in base ad un prefissato tasso di interesse, dopo quanto tempo, a partire dal momento dell'investimento iniziale, il valore attuale dei benefici (risparmi) risulta equivalente al valore attuale degli oneri (esborsi), cioè dopo quante annualità risulta nulla la somma algebrica dei predetti termini :

$$0 = \sum_{t=0}^n F_t(1+i)^{-t}$$

Anche in questo caso la soluzione va definita per interpolazione.

Riferendosi all'esempio proposto si calcol :

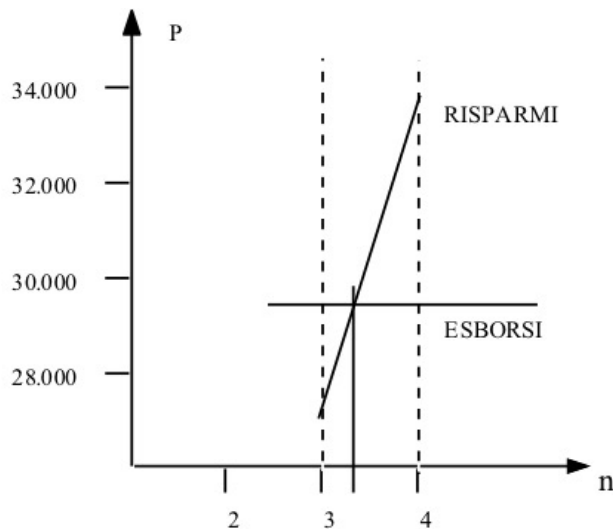
- posto $i = 12\%$

- per $n = 3$ $\sum_{t=0}^n F_t(1+i)^{-t} = - 1.486$

- per $n = 4$ $\sum_{t=0}^n F_t(1+i)^{-t} = 3.946$

interpolando si ottiene $n = 3.27$;

ovvero si può risolvere per via grafica come in figura seguente.



5.3.5 Confronto economico tra diverse alternative in condizioni di certezza.

Spesso al progettista si presenta il problema di dover scegliere tra alternative che dal punto di vista tecnico e funzionale sono perfettamente equivalenti, e, pertanto, devono essere valutate sul piano economico si deve cioè individuare l'alternativa che, a parità di servizio reso, offra il miglior risultato economico.

In sostanza si tratta di applicare in forma comparativa le considerazioni precedentemente proposte alle singole alternative, in forma indipendente ciascuna dalle altre, e scegliere quell'alternativa cui corrispondono i maggiori vantaggi.

Per la trattazione seguente ci si riferisca ad un esempio.

Al progettista che ha il compito di definire un sistema che, tra l'altro, deve compiere un certo insieme di operazioni, si pone il problema di scegliere tra due possibili alternative, ciascuna in grado di compiere le operazioni predette con la stessa efficienza e qualità. La prima alternativa consiste nel realizzare una apparecchiatura semiautomatica : l'investimento corrispondente sia $P= 110.000$ (unità di conto), le annualità di utilizzazione siano $n=6$, il valore di recupero al termine delle sei annualità sia $F= 10.000$ (u.c.), il costo dell' esercizio annuale dell'apparecchiatura (comprensivo di energia, personale ecc., ma al netto delle quote di ammortamento) sia 28.000 (u.c.). La seconda alternativa prevede la realizzazione di un'apparecchiatura completamente automatica, che compie lo stesso servizio, con un investimento iniziale $P= 160.000$ (u.c.), un valore di recupero $F= 14.000$ (u.c.), al termine delle stesse $n=6$ annualità di esercizio ed un costo di esercizio, come sopra definito, pari a 12.000 (unità di conto). Il tasso di interesse di riferimento sia $i=14\%$.

Valore attuale.

Si tratta di attualizzare alla data iniziale tutti gli oneri e tutti i benefici economici, previsti per ciascuna alternativa durante l'intero ciclo di utilizzazione, calcolandone la somma algebrica come in tabella:

		Altern. 1	Altern. 2
Valore attuale dell'invest. iniz.	$P \cdot (1+i)^0$ [4.6.1]	110.000	160.000
Valore attuale dell'annualità di esercizio	$A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$ [4.6.6]	28.000*3.888	12.000*3.888
Valore attuale del valore di recupero	$-F \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right]$ [4.6.2]	-10.000*0.4556	-14.000*0.4556
Totale		214.328	200.286

L'alternativa 2 presenta una somma minore (costi) ; è pertanto da preferirsi.

Annualità di costo.

Analogo procedimento può essere utilizzato per confrontare le alternative dal punto di vista dell'annualità costante di costo equivalente alla differenza tra l'attualizzazione dei costi e l'attualizzazione dei ricavi.

		Altern. 1	Altern. 2
Annualità equiv. a invest. iniziale	$A = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ [4.6.5]	110.000*0.2572	160.000*0.2572
Annualità di esercizio	A	28.000	12.000
Annualità equiv. a valore di recupero	$A = -F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$ [4.6.4]	-10.000*0.1175	-14.000*0.1175
Totale		55.118	51.507

Anche da questo confronto risulta preferibile l'alternativa 2.

Tasso di rendimento.

I calcoli precedentemente sviluppati mostrano che nell'esempio, per un tasso di interesse $i=14\%$, la realizzazione di una piena automazione è preferibile rispetto ad una apparecchiatura semiautomatica.

Tuttavia ripetendo i calcoli, con un tasso di interesse annuo del 25% si troverebbe un risultato opposto, cioè l'alternativa 1 sarebbe preferibile a quella 2. **Ciò significa che esiste un valore del tasso di interesse che rende equivalenti anche dal punto di vista economico le due alternative.**

Utilizzando l'espressione del valore attuale, si tratta di risolvere in i la seguente espressione:

$$\begin{aligned} 110.000 + 28.000 * \left\{ \frac{[(1+i)^6 - 1]}{i * (1+i)^6} \right\} - 10.000 * \left[\frac{1}{(1+i)^6} \right] = \\ = 160.000 + 12.000 * \left\{ \frac{[(1+i)^6 - 1]}{i * (1+i)^6} \right\} - 14.000 * \left[\frac{1}{(1+i)^6} \right] \end{aligned}$$

Si ottiene $i=23.6\%$.

Ciò significa che fino a quando la normale rendita del denaro è inferiore al 23.6%, è preferibile l'alternativa 2 .

5.3.6 Valutazioni economiche in condizioni di rischio e di incertezza

La trattazione precedente ha illustrato come due o più alternative possono essere confrontate dal punto di vista economico, mediante l'attualizzazione ad una stessa data di riferimento degli oneri e dei benefici economici previsti: è questo il valore omogeneo che rende possibile e significativo il confronto.

Il progettista che si trova a dover valutare dal punto di vista economico diverse alternative in condizioni di rischio o di incertezza, non deve far altro che compilare la matrice di decisione propria del caso in esame, con i valori delle distinte alternative nelle diverse possibili condizioni future, calcolando il predetto valore omogeneo di confronto.

Il progettista può scegliere, tra quelle precedentemente illustrate, la forma più opportuna e significativa in relazione al caso in esame, ovvero elaborare tutti i possibili confronti.

Le matrici di decisione così ottenute, vanno quindi sviluppate come esposto nella trattazione della teoria elementare delle decisioni.

5.3.7 Valutazione del punto di pareggio (Break-even point).

Quando il costo di due o più alternative è funzione della stessa variabile, è spesso utile definire, se esiste, il valore di questa variabile che rende equivalenti dal punto di vista economico le alternative.

Si tratta di scrivere, per ciascuna alternativa, la funzione di merito in termini della omogenea variabile economica significativa e ricercare l'intersezione tra le diverse funzioni scritte, che spesso hanno andamento rettilineo.

Esempio : costruire o acquistare.

Si supponga di dover decidere se impiantare la produzione di un certo componente necessario per la realizzazione di altri prodotti, ovvero acquistarlo dal mercato e limitarsi a montarlo sul prodotto finale.

Nella prima ipotesi si prevede un costo annuo fisso, dovuto all'impianto, alla manutenzione ecc., pari a 12.000 unità di conto, ed un costo proporzionale al numero di componenti realizzati (costo di fabbricazione) di 4 unità di conto per pezzo. Il miglior prezzo ottenibile sul mercato per lo stesso componente sia pari a 8 unità di conto per pezzo.

Ad un generico istante, durante la produzione, si avrà :

- - nel caso di costruzione $C_{tot\ cstr} = 12.000 + 4*N$
- - nel caso di acquisto $C_{tot\ acq} = 8*N$

essendo N il numero di componenti prodotti o acquistati.

Eguagliando i due termini e risolvendo rispetto a N si ottiene :

$$N = 12.000 / 4 = 3.000 \text{ unità}$$

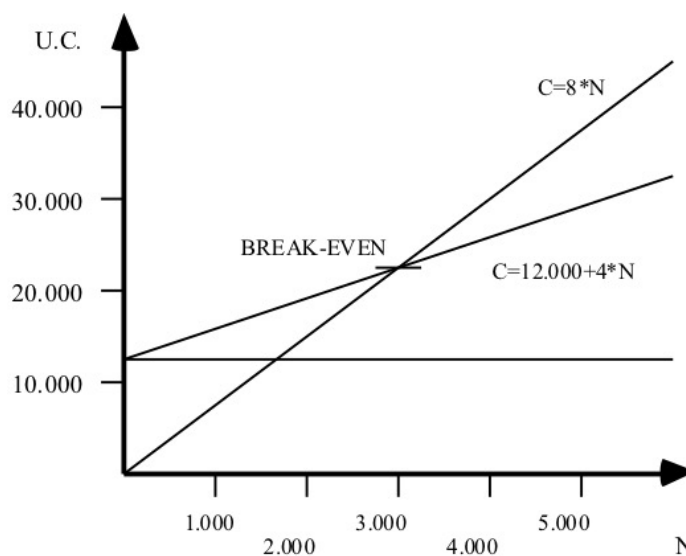


Figura 53 - break even point

Come appare evidente, anche dalla rappresentazione grafica, finché non vengono prodotte o acquistate 3.000 unità, è conveniente acquistare; oltre quella quantità è preferibile costruire.

Esempio : scelta tra apparecchiature di produzione .

Il progettista si trovi a dover scegliere tra due possibili alternative per la realizzazione di certe lavorazioni necessarie al prodotto: l'una completamente automatica, l'altra semiautomatica. Il prezzo di acquisto dell'apparecchiatura automatica sia 140.000 unità di conto ed il valore di recupero al termine dei 4 anni di utilizzazione prevista sia 20.000, il costo annuale di manutenzione sia pari a 12.000 (u.c.) ed il costo proprio per l'esercizio dell'apparecchiatura sia pari a 85 unità di conto per ora.

Per l'apparecchiatura semiautomatica, il prezzo di acquisto sia 55.000 (u.c.), il valore di recupero, al termine degli stessi 4 anni, sia nullo ed i costi per l'esercizio e per la manutenzione siano stimati in ragione di 140 unità di conto per ora di esercizio. Il tasso di interesse di riferimento sia $i = 10\%$

Per entrambe le soluzioni il costo totale derivante dall'esercizio dell'apparecchiatura dipende dal numero di ore di utilizzazione . In base alla:

$$A = (P - F) \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] + F \cdot i$$

si può dunque scrivere per ciascuna alternativa l'espressione del costo annuale in funzione di $N =$ numero di ore annue di utilizzazione :

- per l'apparecchiatura automatica:

$$\begin{aligned} \mathbf{C \text{ annuo auto} = (140.000 - 20.000) \cdot \{ [0.10 \cdot (1.10)^4] / [(1,10)^4 - 1] + 20.000 \cdot 0.10 +} \\ \mathbf{+ 12.000 + 85 \cdot N = 51.800 + 85 \cdot N} \end{aligned}$$

- per l'apparecchiatura semiautomatica :

$$\begin{aligned} \mathbf{C \text{ annuo semi} = (55.000 - 0) \cdot \{ [0.10 \cdot (1.10)^4] / [(1,10)^4 - 1] + 0 \cdot 0.10 +} \\ \mathbf{+ 0 + 140 \cdot N = 17.400 + 140 \cdot N} \end{aligned}$$

Eguagliando i due risultati e risolvendo si ottiene

$$\mathbf{N = 625 \text{ ore}}$$

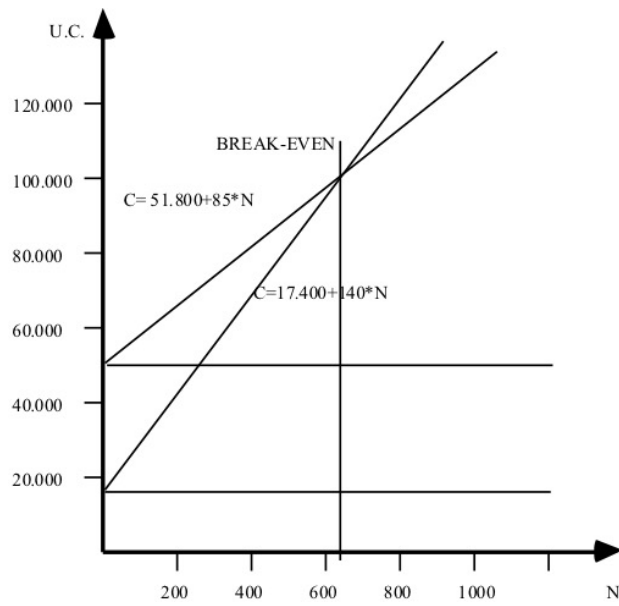


Figura 54

La risoluzione grafica corrispondente è proposta in fig. Figura 54

In pratica la soluzione automatica è economicamente preferibile se è prevista una utilizzazione superiore alle 625 ore annue che rappresentano il punto di pareggio tra le due alternative.