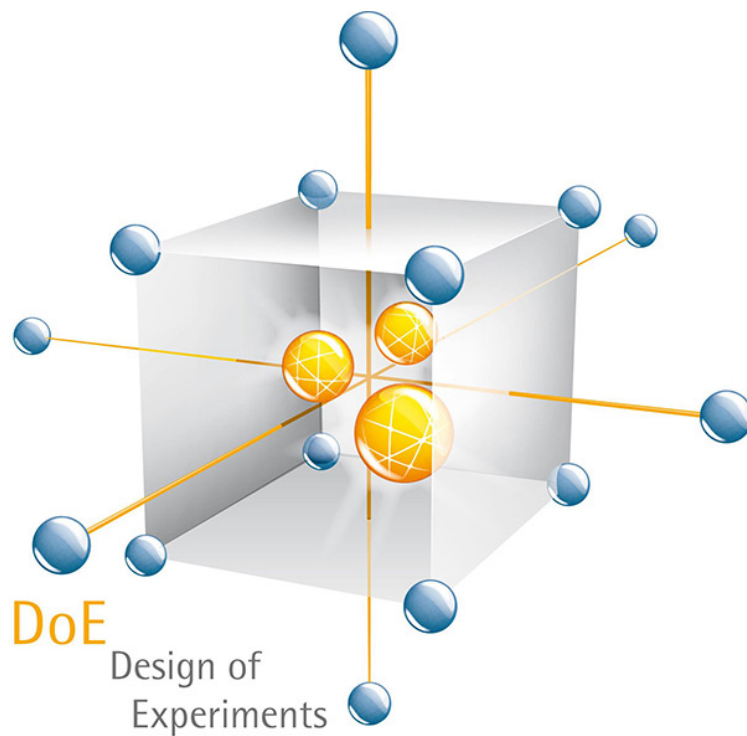


## La progettazione dei sistemi meccanici

---

### **Parte 5 – Design Of Experiments**



Cattedra di Progetto di Macchine

Rev 1.0 – A.A. 2019/2020

---

## 1 Introduzione

L'uomo, fin dall'origine dei tempi, ha intuito l'esistenza di alcuni principi naturali osservando attentamente la natura circostante, e quindi attraverso la replicazione artificiale del fenomeno naturale in questione, li ha confermati, ampliati, generalizzati, confutati.

Infatti la totalità dei fenomeni fisici, quali relazioni di causa effetto, relazioni tra grandezze e parametri di un dato sistema, seguono delle leggi naturali che spesso sfuggono all'intelletto umano, che nonostante sia in grado di intuirle in prima approssimazione, non è in grado di fornirne una formulazione esatta.

Lo scopo della ricerca, ora come allora, è quello di scoprire tali relazioni generali ed applicarle nella vita quotidiana. In questo contesto si inserisce appunto la sperimentazione, la cui evoluzione metodica è andata di pari passo con la complessità dei sistemi di studio. L'esperimento non è altro che l'indagine della risposta di un sistema quando eccitato da uno o più parametri di ingresso.

L'ottimizzazione della sperimentazione ha un ruolo determinante in tutte le applicazioni di ricerca, a maggior ragione nei progetti di ricerca e sviluppo delle aziende industriali, dove l'attività sperimentale si traduce in un costo, sia in termini di risorse economico-finanziarie, che di tempo e/o personale. Questo perché i prodotti sviluppati dalle aziende, così come gli stessi processi industriali da ottimizzare, sono sistemi complessi dove i parametri che ne influenzano le prestazioni sono estremamente numerosi e correlati tra loro, e la risposta del sistema stesso è spesso del tutto ignota.

Tecniche di sperimentazione si sono evolute nel corso dei secoli, ancor più negli ultimi decenni, al fine di ottenere risultati di interesse pratico sempre più concreti ai quali corrispondere un costo sempre minore. Lo scoglio principale che le metodiche di test devono affrontare è il fatto che la sperimentazione non sempre fornisce risultati congruenti alla realtà, per via di una serie di fattori dovuti alla sua fallibilità intrinseca, errori che possono essere classificati in errori di progettazione, errori di esecuzione, errori di misurazione ed errori di interpretazione.

Lo sviluppo di metodiche di test sempre più efficaci, atte alla limitazione dei fattori di errore intrinseci alla sperimentazione, ha portato alle attuali tecniche di Design of Experiments, che sfruttano metodi statistici complessi nella progettazione delle prove sperimentali.

### 1.1 Cenni storici

Una prima forma di design of experiments si rintraccia nel lavoro condotto nel 1747 dal chirurgo scozzese James Lind, il quale tentò un approccio sistematico nella sperimentazione di una cura contro lo scorbuto, una malattia dovuta alla carenza di vitamina C. Sulla HMS Salisbury, come medico di bordo, documentò scrupolosamente i sintomi dei marinai affetti dalla malattia, quali perdita di denti, emorragie e gengive sanguinanti. Lind selezionò 12 uomini malati e li divise in sei coppie, prescrivendo una cura di base comune a tutti gli individui e in aggiunta un alimento integrato nella dieta differente per ciascuna coppia. Ad alcuni diede del [sidro](#), ad altri acqua di mare, misture di aglio, sedano o ancora del rafano. Un'altra coppia ricevette cucchiaini di aceto e un'ultima due arance e un limone. Quei due uomini che si nutirono di agrumi guarirono e tornarono in sesto. Nonostante questa non costituisse una scoperta epocale - i benefici del lime e del limone erano

---

già noti da secoli - Lind poté dichiarare definitivamente la supremazia degli agrumi nell'elenco di possibili rimedi al disturbo, pubblicando l'esperienza nel lavoro intitolato "Treatise on the Scurvy" (Trattato sullo scorbuto).

Successivamente vennero teorizzati modelli di sperimentazione sempre più elaborati, quali l'optimal design, un antenato del più moderno response surface design, introdotto dal matematico francese Joseph Gergonne nel 1815 nel suo ["The application of the method of least squares to the interpolation of sequences"](#).

Egli sostenne la possibilità di ottenere risultati estremamente accurati utilizzando il metodo dei minimi quadrati nell'elaborazione statistica di misurazioni di sistemi lineari che rispettassero le condizioni del teorema di Gauss-Markov, secondo il quale per un sistema con [modello lineare](#) in cui i disturbi hanno [valore atteso](#) nullo e sono non [10] [11] correlati e omoschedastici, gli stimatori [lineari corretti](#) più efficienti sono gli stimatori ottenuti con il [metodo dei minimi quadrati](#). Successivamente, nel 1918, la statistica danese Kristine Smith estese la validità del metodo a sistemi con modello polinomiale del sesto ordine.

Il primo ad introdurre concetti fondamentali del design of experiments quali la ripetizione degli esperimenti, il metodo del blind experiment ma soprattutto la randomizzazione fu Charles Pierce, filosofo e matematico statunitense, che espose le sue teorie nei trattati ["Illustrations of the Logic of Science"](#) (1877-1878) and ["A Theory of Probable Inference"](#) (1883). Egli sosteneva come potessero essere molteplici i fattori che influenzano il sistema sfuggiti allo sperimentatore, proponendo modelli allo scopo di ridurre gli effetti.

Tuttavia fu solo con Ronald Fisher, importante statistico inglese, che furono introdotti e sviluppati i principi del design of experiments, nelle sue opere "The Arrangement of Field Experiments" (1926) ma soprattutto ["The Design of Experiments"](#) (1935). Nel suo lavoro egli formulò il concetto di ipotesi nulla, condizione che gli esperimenti avrebbero rispettato o meno, quindi stabilì la corretta esecuzione degli esperimenti stessi raccogliendo principi già sviluppati in precedenza quali la randomizzazione e la ripetizione dell'esperimento, ed articolandoli con dei nuovi come l'ortogonalità o il blocking, sviluppando in definitiva il metodo del factorial design.

Dal suo lavoro trarranno spunto, nei decenni a venire, numerosi statistici, matematici e ingegneri come l'indiano Raj Bose, l'inglese Robin Packett, il giapponese Genichi Taguchi e molti altri.

## 2 I principi generali del Design of Experiments

### 2.1 Gli obiettivi e i criteri del Design of Experiments

Lo scopo dei metodi di design of experiments è quello di definire il comportamento del sistema in oggetto nella maniera più precisa possibile, cioè più prossima alla realtà, con l'utilizzo del minor numero di risorse, quali tempo e/o denaro.

Tale studio è effettuato misurando le variazioni della risposta del sistema, tradotta in una funzione obiettivo Y, al variare dei vari parametri variabili di ingresso Xi secondo livelli (valori) prestabiliti. La forma della funzione obiettivo varia a seconda del metodo utilizzato.

Non esiste un metodo di design of experiments definitivo o globale che possa essere adattato a tutti i tipi di sistemi possibili, piuttosto la scelta del metodo deve

---

essere fatta tenendo conto in primo luogo del sistema oggetto di studio, ma anche degli obiettivi dello sperimentatore, dei vincoli cui è sottoposto, del grado di accuratezza che si ricerca e così via.

Tuttavia è possibile definire dei criteri generali che ogni metodo di design of experiments deve possedere per essere definito tale, quali [12]:

- Gli esperimenti effettuati devono avere uguale influenza sulla determinazione del comportamento del sistema, ovvero dei coefficienti di regressione della curva di risposta stimata;
- Il metodo deve essere in grado di individuare comportamenti non lineari;
- Il metodo deve essere robusto rispetto a fattori di ingresso non valutati, poiché si tratta di una approssimazione piuttosto che di un modello esatto;
- Metodi applicati al primo stadio della sperimentazione devono essere utili a fornire informazioni per gli stadi successivi.

Ogni metodo di design of experiments segue quindi una sequenza di attività che può essere generalizzata nella seguente lista di sette steps [13]:

- Identificazione dello stato del sistema;
- Scelta dei fattori di ingresso e dei loro livelli;
- Scelta dei fattori di risposta e della forma della funzione obiettivo;
- Scelta del metodo di design of experiments più adeguato;
- Conduzione degli esperimenti;
- Analisi dei dati;
- Conclusioni e raccomandazioni.

Nel capitolo successivo verranno meglio definiti i concetti per ora solo introdotti.

## 2.2 I parametri di input del Design of Experiments

### 2.2.1 I parametri

L'oggetto di studio è la risposta del sistema all'eccitazione di uno o più parametri di ingresso. I parametri di ingresso sono per definizione variabili, la cui variazione è definita dalla scelta dei livelli e del loro numero. I parametri possono essere quantitativi o qualitativi, ed ancora i loro livelli possono variare su un range continuo (poi discretizzato dal metodo) o discreto. Un esempio di parametro quantitativo può essere la pressione di un gas in esame, in questo caso variabile in continuo; un esempio di parametro qualitativo può essere un materiale da costruzione, in questo caso variabile in discreto. Possono esistere parametri qualitativi con soli due livelli, ovvero di tipo ON/OFF oppure SI/NO, come ad esempio il guasto o meno di un componente.

Poiché non si conosce la risposta del sistema né tantomeno quali siano i parametri che la provocano, altrimenti sarebbe inutile la sperimentazione, i parametri interessanti nello studio di primo livello sono quelli che si credono importanti per la determinazione della risposta stessa. L'insieme dei parametri può essere ridotto nei successivi stadi, di conseguenza è meglio iniziare con un ampio numero

---

di parametri al fine di ridurre al minimo la probabilità di aver trascurato un parametro invece determinante [10] [14]. Ovviamente qualora si conoscesse già quali siano i parametri più importanti, il numero degli stadi di sperimentazione può essere drasticamente ridotto, anche se spesso si è sprovvisti di tale conoscenza; anzi spesso capita di non accorgersi dell'importanza di un parametro semplicemente perché questo non è variato durante la sperimentazione, non comportando quindi alcuna variazione nella risposta [15]; ad esempio nello studio di un processo di depurazione di acqua per osmosi indotta, eseguendo tutti gli esperimenti alla temperatura ambiente, i risultati di tale sperimentazione saranno validi esclusivamente nelle condizioni di temperatura ambiente, ma potrebbero eventualmente variare sensibilmente a temperature diverse; in questo caso il processo non risulterà ottimizzato poiché un parametro fondamentale è stato erroneamente ignorato.

Per il successo di ogni metodo è necessario che i parametri di ingresso siano strettamente indipendenti tra loro, in modo che la scelta dei livelli di un parametro sia ampia ed indipendente da quella effettuata per gli altri parametri [11]. In caso contrario si deve ricorrere ad una restrizione del campo di validità della risposta in situazioni dove i parametri di ingresso siano effettivamente indipendenti, e ciò non è sempre possibile; ad esempio nella costruzione di una linea elettrica può essere eseguita una sperimentazione che tenga conto dei parametri "materiale dei cavi" (quindi resistività specifica) "voltaggio di ingresso" e "temperatura dei cavi"; la scelta dei livelli di resistività specifica, ovvero dei materiali di costruzione, è purtroppo legata alla scelta dei livelli di temperatura dei cavi, poiché la resistività specifica dei materiali è in prima approssimazione indipendente dalla temperatura solo per alcuni range della stessa, quindi una volta definiti i livelli di temperatura, alcuni materiali non potranno essere scelti poiché in tale range la loro resistività specifica ne è dipendente.

Quando è certa ed ineliminabile l'interazione tra i parametri di controllo, l'interazione stessa deve essere trattata come un nuovo parametro, che andrà ad aggiungersi a quelli già individuati precedentemente [11]. Considerandola come un nuovo parametro, sarà possibile ricondurre tutti gli effetti dell'interazione come effetto di un nuovo parametro fittizio, indipendente dai due, che possono essere ora considerati indipendenti a loro volta.

Fondamentale è la distinzione tra parametri controllabili e parametri incontrollabili. Spesso è interessante la risposta di un sistema non solo al variare dei parametri controllabili, ma piuttosto in condizioni imprevedibili [16]. Si faccia l'esempio del comportamento di un cuscinetto ad evolvente: le sue prestazioni dipendono da parametri controllabili quali il carico statico ed il carico dinamico esercitato sullo stesso, il numero di cicli cui è sottoposto e la velocità di rotazione, ma si potrebbe essere interessati alle sue prestazioni in funzioni dell'umidità dell'aria, ovvero di un parametro di processo incontrollabile. In questo caso si possono operare due scelte distinte, in funzione della controllabilità o meno del parametro in sede di laboratorio: può essere inserito tale parametro nella lista di parametri controllabili variandone il livello con le normali tecniche, oppure si può adottare tale parametro come parametro esterno; nel primo caso il metodo di design of experiments non cambia, nel secondo invece bisogna adottare un metodo di robust design [17].

### 2.2.2 I livelli

Il numero di livelli per ogni parametro è una scelta estremamente importante, perché andrà ad influenzare fortemente il numero delle prove da eseguire e quindi il costo a loro imputato.

Tale scelta è un compromesso tra più problematiche di natura diversa. Innanzitutto, se nel processo definitivo verrà utilizzato un numero definito di livelli di un parametro, ad esempio due o tre, la scelta è immediata sia nel loro numero che nel loro valore: nello studio di un sistema di isolamento delle vibrazioni di una lavatrice che opera in regimi di centrifuga di 600, 800 e 1000 rpm, scelto insieme agli altri il parametro "regime di centrifuga", questo varierà sui 3 livelli corrispondenti all'utilizzo finale.

Qualora invece non si abbia questa semplificazione, la scelta del numero dei livelli per un dato parametro è dovuta alla forma della risposta che ci si aspetta di ottenere; data una forma di grado polinomiale  $n$ , il numero  $N$  di livelli è dato dalla  $N=n+1$ : infatti sono necessari due punti per individuare un comportamento atteso lineare ( $n=1$ ), tre punti per un comportamento parabolico ( $n=2$ ) e così via [17].

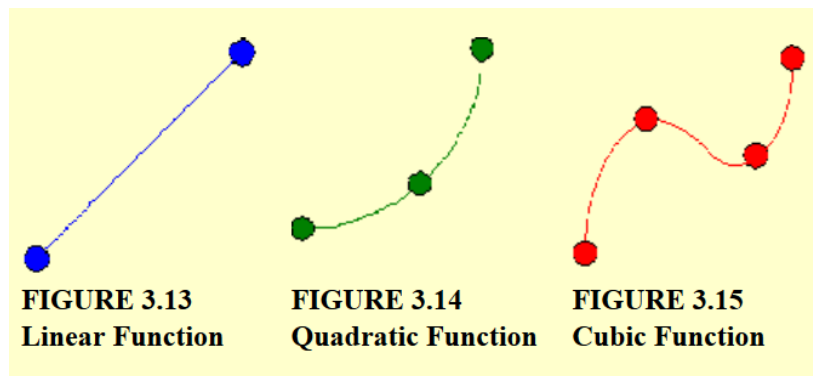


Figura 1 Scelta del numero di livelli

La scelta del valore di tali livelli dipende dal range di interesse del parametro, all'interno del quale i valori dovrebbero essere scelti in maniera randomizzata.

Nel primo caso il parametro sarà classificato come parametro fisso, nel secondo come parametro randomizzato. Tale distinzione è fondamentale, perché nel primo caso l'analisi statistica dei risultati sarà interessata alla media delle risposte, mentre nel secondo si indagherà sulla varianza delle risposte nel range considerato [10].

Una ulteriore problematica influente nella scelta del numero e del valore dei livelli è lo stadio dell'esperimento: nel caso di esperimento di primo livello, è opportuno ridurre a due il numero di livelli dato il grande numero di parametri; l'obiettivo dell'esperimento di primo livello infatti non è ancora quello di individuare esattamente la risposta, quanto piuttosto quello di identificare quali siano i parametri fondamentali e quali quelli trascurabili.

### 2.3 La matrice degli esperimenti

Definiti parametri e livelli, viene quindi stesa una matrice degli esperimenti, che presenterà un numero  $n$  di righe pari al numero degli esperimenti da condurre, un numero di colonne pari al numero di parametri che si è deciso di studiare più una colonna riservata al risultato dell'esperimento, ovvero il valore della funzione

obiettivo, mentre gli elementi della matrice consistono nel valore o livello che assumerà il parametro relativo durante l'esperimento.

Numero prova	Parametro A	Parametro B		Parametro Z	Risultato
1	1	1		1	-
2	1	2		1	-
3	2	1		2	-
n	2	1		1	-

## 2.4 La funzione obiettivo

La funzione obiettivo è la curva di risposta del sistema definita in maniera diversa a seconda del metodo di design of experiments adottato. In generale essa traduce la risposta del sistema in una funzione di più variabili di uscita misurate durante l'esperimento:

$$Y = \sum a_i \cdot y_i$$

I termini  $y_i$  individuano i parametri di uscita che misurano la prestazione del processo; i parametri vengono normalizzati nel loro valore ed omogeneizzati nella loro misura secondo dei criteri di qualità, e quindi pre moltiplicati da un parametro adimensionale  $a_i$  che ne definisce l'importanza, la somma dei quali in genere è l'unità (ma possono essere utilizzate altre proporzioni) [10].

I criteri di qualità sono il BiB (Big is Better), SiB (Small is Better) e lo STiB (STandard is Better), e la normalizzazione è data dalla formula seguente, per il criterio MiB:

$$\text{criterio BiB} \quad y_i = \frac{g_i - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}$$

$$\text{criterio SiB} \quad y_i = \frac{g_{\max} - g_i}{g_{\max} - g_{\min}}$$

$$\text{criterio STiB} \quad y_i = 1 - \left| \frac{g_{\max} - g_i}{g_{\max} - g_{\text{tar}}} \right|$$

dove  $g_i$  è la grandezza in uscita misurata, mentre  $g_{\min}$  e  $g_{\max}$  e  $g_{\text{tar}}$  sono rispettivamente la loro misura minima, massima e target che ci si aspetta [16].

Si ipotizzi l'esistenza di una sola variabile di uscita  $y$ , condizione nella quale si ha ovviamente  $Y=y$ , ovvero il comportamento del sistema è descritto da una sola variabile di uscita: si può tentare di individuare una funzione che leghi i parametri di ingresso  $X_k$  all'uscita  $y$ , della forma:

$$y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

---

Essendo  $Y$  nel caso generale una combinazione lineare delle  $y_i$ , è possibile definire la seguente funzione [17]:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum a_i \cdot f_i(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

La formulazione di tale funzione è purtroppo incognita, perché soggetta ad errore  $\varepsilon$ , e se ne cerca invece una approssimazione empirica, del tipo seguente:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) + \varepsilon$$

che può avere una forma polinomiale di vario grado a seconda del grado di approssimazione prescelto.

L'obiettivo dei vari metodi di Design of Experiment infatti non è quello di individuare la funzione che lega in maniera esatta i parametri di ingresso al comportamento del sistema, piuttosto è quello di individuare la combinazione di parametri tali che la funzione obiettivo pocanzi definita assuma valore ottimo.

## 2.5 Le basi del Design of Experiments

### 2.5.1 La Randomization

Qualsiasi scelta ponderata che si esegue in ambito sperimentale, sia essa di parametri o livelli, loro numero o loro valore, è sempre conseguenza dell'assunzione di alcune ipotesi semplificative del sistema di cui il progettista si fa carico: la distinzione tra parametri importanti e ininfluenti nel primo stadio della sperimentazione è dovuta all'ipotesi che essi lo siano o no, il numero di livelli scelto per ogni parametro è conseguenza della forma della risposta attesa del sistema, ecc.

Tali ipotesi, in quanto tali, non sono esatte ma sono una approssimazione della realtà, e la loro probabilità di discostarsi può essere più o meno elevata, poiché i fattori che erroneamente non si prendono in esame, che divengono quindi fattori di disturbo, possono essere molteplici. L'adozione di ipotesi semplificative è sempre consigliata quando il rischio di errore è ragionevolmente basso, tuttavia quando non si conosce tale rischio, o questo è troppo elevato, è meglio procedere ad una scelta randomizzata.

La randomizzazione è un processo di scelta il cui scopo è la minimizzazione dell'influenza dei fattori di disturbo sulla scelta stessa, influenza alla quale essa può essere soggetta se effettuata in maniera ponderata [18]. Tuttavia essa non è sempre possibile o a volte può essere solo parziale.

La randomizzazione può essere applicata nella decisione di diverse situazioni: ad esempio nella scelta del valore da assegnare ai livelli di un dato parametro, come precedentemente indicato, allo scopo di studiarne la varianza nel range considerato. Un esempio ne è lo studio di un processo di raffreddamento di un fluido all'interno di uno scambiatore di calore posto in atmosfera: la temperatura ambiente, ovvero la temperatura finale del corpo, può variare in un range definito tra 30°C e 0°C (escursione termica estate-inverno), e si ipotizzi una risposta quadratica, ovvero si scelga un numero di livelli pari a 3; ogni scelta ponderata può essere soggetta a influenze esterne non note a priori: ad esempio si possono scegliere gli estremi del range ed il loro valor medio, tuttavia il comportamento agli estremi potrebbe non essere quadratico come supposto, oppure si potrebbe



---

dire che tali valori sono improbabili; al contrario scegliendo tre valori intermedi (10, 15, 20°C) si potrebbe obiettare con la non copertura dell'intero intervallo; scegliendo tali valori in maniera randomizzata si risolve il problema perché la scelta non terrà conto di nessuno schema logico che ha forte probabilità di essere errato.

La randomizzazione può essere applicata all'ordine di conduzione degli esperimenti, allo scopo di minimizzare l'influenza di parametri di disturbo non considerati [19]; infatti, definita la matrice degli esperimenti, si eseguano questi ultimi in sequenza casuale nell'esempio di uno studio del consumo di un motore a scoppio: si prenda come parametro in uscita il costo in € del carburante consumato, del quale si ipotizza una risposta quadratica (3 livelli) per i parametri di ingresso di "velocità di crociera" (50, 70, 90 km/h) e di "grado di ottani della benzina" (85, 90, 95%). Si devono quindi eseguire  $3^2=9$  esperimenti e si ipotizzi di eseguirne uno ogni settimana.

Numero prova	Velocità di crociera km/h	Grado di ottani della benzina (%)	Risultato
1	50	90	-
2	90	90	-
3	70	90	-
4	90	95	-
5	90	85	-
6	70	95	-
7	50	95	-
8	50	85	-
9	70	85	-

Scegliendo ponderatamente l'ordine degli esperimenti, ad esempio dando priorità agli esperimenti con velocità di crociera bassa, si ottengono risultati differenti piuttosto che dando priorità agli esperimenti con velocità di crociera alta o media (analogamente col grado di ottani della benzina), questo perché il consumo del motore è diverso a seconda della velocità di crociera, ma il costo del carburante dipende anche dal prezzo del petrolio fissato su listino internazionale, ovvero da un parametro assolutamente fuori controllo. Quindi supponendo un consumo di carburante crescente in funzione della velocità di crociera, ed un prezzo del petrolio decrescente nel tempo, il costo del carburante nel caso di priorità ad esperimenti con velocità di crociera bassa sembrerà costante al variare della velocità, al contrario nel caso di priorità ad esperimenti con velocità di crociera alta sembrerà aumentare notevolmente. Scegliendo invece una successione randomizzata della sequenza di esperimenti si minimizza l'effetto di variazione del prezzo del petrolio.

Lo stesso caso può fungere da contro esempio: il prototipo di motore a scoppio potrebbe avere una affidabilità ignota alle alte velocità; nel caso il prototipo di motore si rompesse al terzo esperimento con velocità di crociera pari a 90 km/h,

---

ovvero il quinto esperimento della matrice, dalla sola analisi degli esperimenti eseguiti fino al quinto non si hanno risultati significativi, con conseguente spreco di risorse [12]. Qualora si fosse operata una scelta ponderata, dando la precedenza agli esperimenti con velocità di crociera più bassa, dove l'affidabilità del prototipo è nota, si sarebbero potuti eseguire più test prima della rottura del prototipo ottenendo risultati significativi.

La potenza e i difetti dello strumento della randomizzazione sono bene evidenti negli esempi ora esposti, la letteratura è ricca di argomentazioni a favore e contrarie al suo utilizzo ovunque e ogni volta sia possibile, tuttavia è necessario valutare caso per caso quando e in che grado effettuarla.

### 2.5.2 Il Blocking

Nel corso dello studio dei parametri influenti per il processo in studio, se ne possono individuare al fianco dei principali, altri parametri che, pur avendo un effetto non trascurabile sul processo, non ne interessa la valutazione, e vengono detti quindi parametri di disturbo. Nel caso in cui questi parametri siano controllabili in sede di sperimentazione, essi possono essere bloccati [10].

Il bloccaggio dei parametri di disturbo è un processo particolarmente utile in sede di pianificazione delle sperimentazioni, in quanto consente di impedire l'influenza dei parametri bloccati sulla prova che si va a condurre, riducendo quindi l'errore nell'approssimazione della funzione obiettivo, ma soprattutto riducendo il numero dei parametri oggetto di studio, semplificando la sperimentazione.

Il bloccaggio consiste nella riduzione dei suddetti parametri ad un solo livello, il valore del parametro risulta quindi bloccato per tutte le prove, ed il suo effetto sarà quindi nullo sul risultato finale, poiché nulla ne è la variazione.

Un parametro di disturbo può anche essere un parametro del quale già si conosce l'effetto sul sistema, e bloccandolo si riesce a semplificare l'esperimento. Tuttavia in tal caso si perderanno tutte le informazioni relative ad una eventuale interazione tra i parametri principali di studio e i parametri di disturbo.

Un esempio di esperimento bloccato può essere il seguente: si eserciti una prova di flessione (statica) a tre punti per una trave metallica in ambiente corrosivo; parametri principali possono essere il materiale della trave, le dimensioni della trave, il carico applicato, l'atmosfera circostante, e se ne misurino il carico di rottura e la freccia massima. E' possibile bloccare il parametro atmosfera, in quanto è nota l'azione peggiorativa dell'ambiente corrosivo sul carico di rottura, si scelga quindi un livello di blocco del parametro sufficientemente alto in modo da avere un coefficiente di sicurezza idoneo, ed eseguire le prove senza valutare l'incidenza dell'atmosfera corrosiva sui campioni. Non è un esempio di bloccaggio il fissare le dimensioni della trave se queste sono obbligate ad esempio da vincoli di spazio o di progetto, perché appunto dovuta a vincoli esterni, o non lo è il fissare il materiale con la motivazione che tutti gli acciai da costruzione hanno medesimo modulo di young E, perché in questo caso il parametro è considerato non significativo, mentre il parametro di disturbo rimane sempre un parametro significativo.

### 2.5.3 La replicazione dell'esperimento e le misure ripetute

Il risultato della singola prova di sperimentazione, eseguita correttamente, è soggetta a due tipi di errori:

- 
- 1) Un errore intrinseco del fenomeno, è un errore casuale dovuto al fatto che la funzione obiettivo è una approssimazione della curva reale; tale errore può essere dovuto oltre al grado di approssimazione adottato, anche all'influenza di parametri esterni, eventuali correlazioni minime tra parametri non considerate in prima approssimazione ecc. Tale errore è stato già definito con la lettera  $\varepsilon$ .
  - 2) Un errore intrinseco della misura dell'uscita del sistema, dovuta appunto alla precisione dello strumento di misura, definibile con la lettera  $\mu$ .

I due tipi di errori sono del tutto indipendenti, sia nelle medie che nelle dispersioni, e vanno entrambi a sommarsi al risultato della prova effettuata. Data la loro indipendenza, diversi ed indipendenti sono i metodi volti alla loro limitazione: il primo si affronta con la replicazione dell'esperimento, il secondo con la ripetizione delle misure.

La replicazione dell'esperimento ha lo scopo di individuare la dispersione  $\sigma_\varepsilon$  al fine di valutarne l'entità: una dispersione troppo elevata indica la presenza di uno o più parametri importanti che sono stati trascurati nella progettazione dell'esperimento [10]. Tuttavia è impossibile effettuare una reale replicazione dell'esperimento, perché è impossibile replicare esattamente tutte le stesse condizioni della prima prova effettuata; mentre è ammessa, anzi necessaria una variazione dei parametri non controllati, una minima variazione dei parametri di controllo come ad esempio una piccola oscillazione del livello di uno di essi, oppure una minima differenza nella modalità di esecuzione della prova, come ad esempio il cambio dell'operatore, il cambio di un componente del macchinario usato, o anche l'utilizzo di uno stesso componente ma ora più usurato, sono situazioni che dovrebbero invalidare la prova. Accettando questo compromesso si può considerare l'esperimento come replicato.

Bisogna inoltre capire il ruolo della replicazione nell'esperimento: se il parametro tempo risulta fondamentale nell'effettuazioni delle ripetizioni, o se ci si può ragionevolmente aspettare una risposta diversa per ogni replicazione, allora la replicazione stesa deve essere considerata uno dei parametri di controllo [10].

La ripetizione delle misure su uno stesso esperimento è necessaria al fine di determinare a posteriori la precisione della misura stessa. La dispersione  $\sigma_\mu$  del valore misurato è un indicatore fondamentale di tale caratteristica della misura: ipotizzando una distribuzione gaussiana delle misure attorno al valore medio, assunzione valida anche in caso di poche misure ripetute, si può aumentare la precisione della misura, ovvero diminuirne la dispersione, utilizzando il principio di propagazione degli errori, secondo il quale la dispersione delle medie di più serie di

---

misure si può calcolare a partire da una sola serie di n misure, secondo la legge:

$$\sigma_{x_m} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Tale assunzione potrebbe far pensare che con un numero molto elevato di misure l'errore della media potrebbe annullarsi; in realtà n può essere elevato ma non elevatissimo, perché non è possibile rilevare indefinitamente la stessa grandezza con lo stesso strumento sempre nelle stesse condizioni.

## 2.6 L'analisi dei risultati: il metodo ANOVA

Il metodo di analisi dei risultati generalmente adottato dai vari modelli di pianificazione degli esperimenti consiste nell'analisi della varianza, riassunto nella sigla ANOVA.

Lo scopo del metodo è quello di valutare se all'interno dell'insieme di dati esistono gruppi più o meno isolati la cui esistenza, che risulta nascosta nella media d'insieme, risulta invece evidente dall'analisi della varianza.

Il metodo parte dall'ipotesi che nell'insieme di dati vi siano G gruppi tra loro indipendenti, e ne studia la varianza intra-gruppo nonché la varianza inter-gruppo, mettendole in relazione [20] [21].

La varianza (campionaria corretta) di un insieme di N dati è data dalla seguente:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - X)^2$$

dove con X si intende la media dei valori  $x_i$ .

Scomponendo la sommatoria sulle n valori in una sommatoria sui G gruppi, ed introducendo il parametro  $X_g$  come media dei valori  $x_i$  appartenenti al gruppo g-esimo di numerosità  $n_g$  (e da ora rinominati  $x_{gi}$ ) si ottiene la seguente:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{g=1}^G \left[ \sum_{i=1}^{n_g} (x_{gi} - X_g)^2 + \sum_{i=1}^{n_g} (X_g - X)^2 \right]$$

moltiplicando e dividendo la prima sommatoria interna per il termine  $n_g-1$ , e svolgendo la seconda sommatoria interna, si ottiene:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{g=1}^G \left[ \frac{1}{n_g-1} \sum_{i=1}^{n_g} (x_{gi} - X_g)^2 \cdot (n_g - 1) + (X_g - X)^2 \cdot n_g \right]$$

dove si ha il termine

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{n_g-1} \sum_{i=1}^{n_g} (x_{gi} - X_g)^2$$

che corrisponde alla varianza interna al gruppo g-esimo. Separando la sommatoria principale si ottiene infine:

$$\sigma^2 = \sum_{g=1}^G \sigma_g^2 \cdot \frac{n_g - 1}{n - 1} + \sum_{g=1}^G (X_g - X)^2 \cdot \frac{n_g}{n - 1}$$

Le due sommatorie così ottenute corrispondono rispettivamente alla varianza intra-gruppo (within) e la varianza inter-gruppo (between), ovvero:

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2$$

Al fine di verificare che l'ipotesi assunta sia probabilmente vera, ovvero statisticamente realistica, possono essere eseguiti dei test sulla varianza. Essi consistono nell'assunzione dell'ipotesi "nulla", detta  $H_0$ , ovvero dell'ipotesi di alcuna ripartizione in gruppi distinti, o dell'ipotesi contraria  $H_1$ ; la decisione avviene tramite il confronto tra una variabile di test, costituita dalla distribuzione delle varianze di un campione in funzione di parametri quali numerosità del campione totale  $n$ , numerosità dei gruppi  $G$  o altri, e la distribuzione di una funzione nota degli stessi parametri. Numerosi e diversi sono i test esistenti, quali tra gli altri il test di Bayes o il test di Waldes, tuttavia in questa sede ci si limita allo studio del test più utilizzato, il test di Fisher.

La variabile di test usata nel test di Fisher è data dal rapporto tra la varianza inter-gruppo e la varianza intra-gruppo, della forma seguente:

$$T = \frac{\sigma_B^2 / (G - 1)}{\sigma_W^2 / (n - G)}$$

Il valore assunto da tale variabile viene confrontato con quello assunto dalla distribuzione di Fisher-Snedecor, che ha la forma seguente [21]:

$$f(x, G, n) = \frac{1}{x \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{G-3}{2}}}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} dt} \cdot \sqrt{\frac{(G-1)^{G-1} (n-G)^{n-G} x^{G-1}}{[(G-1)x + n - G]^{n-1}}}$$

Dove  $x$  è il grado di certezza richiesto per l'ipotesi effettuata, in genere 95%. Tuttavia ne è più spesso utilizzata una sua forma parametrica più adatta alla tabellazione [21]:

$$\alpha = G - 1 \quad ; \quad \beta = n - G$$

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta x^\alpha}{(\alpha x + \beta)^{\alpha+\beta}}}$$

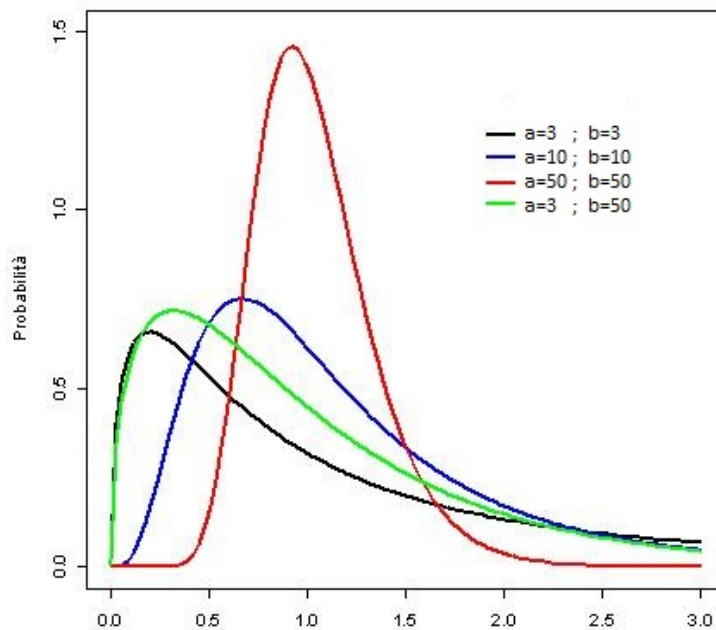


Figura 2 Distribuzione di Fisher in funzione dei parametri a e b

Il criterio di decisione del test di Fisher è sintetizzato nella tabella seguente:

Caso	$f(x, \alpha, \beta) \geq T(\alpha, \beta)$	$f(x, \alpha, \beta) < T(\alpha, \beta)$
Decisione	$H_0$	$H_1$
Rischio	errore di II specie	errore di I specie

## 2.7 Alcune metodiche di Design of Experiments

Esistono molti metodi di design of experiments, alcuni dei quali in uso da oltre 70 anni, il loro uso è diffuso in numerosi campi dalla produzione industriale alla medicina, dall'agricoltura allo sport. Nei successivi capitoli vengono presentati alcuni dei metodi principali, che si adattano a numerosissimi casi. Ne verrà specificato il campo d'azione, verrà illustrato il procedimento di scelta dei parametri e dei loro livelli come la definizione della funzione obiettivo; verranno evidenziati i loro punti di forza e di debolezza, e quindi messi a confronto.

### 2.7.1 Il Full Factorial Design

Il Full Factorial Design è il primo metodo rigoroso di Design of Experiments, introdotto all'inizio del secolo scorso [11]. Il metodo consiste nel sondare tutte e possibili combinazioni tra i livelli dei vari parametri di controllo; il numero delle prove è dato dalla legge

$$l^p$$

dove p è il numero dei parametri ed l il numero dei livelli.

In generale, dato l'enorme numero di prove sperimentali indicate dal metodo, lo stesso si applica a sistemi a risposta lineare di non più di cinque parametri [17], ottenendo un numero massimo di esperimenti pari a

$$2^5 = 32$$

Il metodo è utilizzato per esperimenti sia di primo che di secondo tentativo, con lo scopo di identificare quali parametri sono più significativi, sondare eventuali dipendenze tra parametri e quindi procedere ad una sperimentazione più importante.

Nel caso semplice di due soli parametri articolati in due soli livelli, la matrice degli esperimenti è ridotta a quattro prove sperimentali, e presenta oltre alle due colonne relative ai due parametri, una terza colonna per la loro interazione. Il valore del livello è per facilità identificato con il fattore +1 per quello più alto, e con il fattore -1 per quello più basso, e banalmente nella colonna del parametro fittizio d'interazione si ha esattamente il prodotto tra i livelli interagenti [10]:

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Interazione AxB	Risultato
1	+1	+1	+1	-
2	+1	-1	-1	-
3	-1	+1	-1	-
4	-1	-1	+1	-

La funzione del sistema è quindi di tipo lineare, e vengono considerate le sole interazioni del secondo ordine, ovvero tra due parametri; notare come la matrice si traduca nella formula approssimata della funzione del sistema: questa presenta numero di monomi pari a quello delle colonne della matrice

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_1 \cdot X_2 + \varepsilon$$

Nel caso in cui la risposta attesa sia quadratica piuttosto che lineare, il numero di livelli richiesto per i singoli parametri è ora 3; nel caso semplice di due soli parametri, la matrice è la seguente, dove si tengono conto di interazioni del terzo ordine [10]:

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Interazione AxB	Interazione AxB <sup>2</sup>	Risultato
1	0	0	0	0	-
2	1	0	1	1	-
3	2	0	2	2	-
4	0	1	1	2	-
5	1	1	2	0	-
6	2	1	0	1	-
7	0	2	2	1	-

---

<b>8</b>	1	2	0	2	-
<b>9</b>	2	2	1	0	-

Dove si è adottati per semplicità gli indici 0, 1 e 2 per qualificare il valore dei livelli assegnati ai parametri. Nelle colonne delle interazioni si è eseguita la seguente scomposizione dei parametri:

$$A \cdot B = A + B ; A \cdot B^2 = A + 2B$$

dove il risultato è espresso in base 3 (ovvero  $2+2=1$ ,  $1+2=0$ )

Ancora la funzione del sistema è di tipo quadratico, dove si hanno le sole interazioni del terzo ordine:

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_1 \cdot X_2 + dX_1 \cdot X_2^2 + eX_1^2 \cdot X_2 + \varepsilon$$

Come si può notare il metodo di full factorial design è un modello molto potente per quanto riguarda la valutazione delle interazioni tra i parametri, tuttavia ha un grosso limite nel numero di esperimenti richiesti estremamente sensibile all'aumento anche minimo del numero dei parametri di controllo coinvolti e/o dei livelli a loro assegnati.

### 1.1.1 Il Fractional Factorial Design

Il Fractional factorial design è definito come un factorial design dove solo una adeguata frazione delle prove viene selezionata per essere effettuata. Nasce dall'esigenza di limitare il numero di esperimenti richiesto nel full factorial design. Il numero delle prove richieste è dato dalla legge [22] [23]:

$$l^{p-k}$$

dove si hanno ancora p numero dei parametri ed l numero dei livelli, con k grado di riduzione, di valore in genere 1 o 2 [23].

Tale riduzione è possibile perché lo spazio di soluzione coperto dagli esperimenti del full factorial design può essere ugualmente rappresentato da un suo insieme ordinato di punti, come mostrato in figura 10, ed addirittura esistono numerosi sistemi adatti allo scopo.



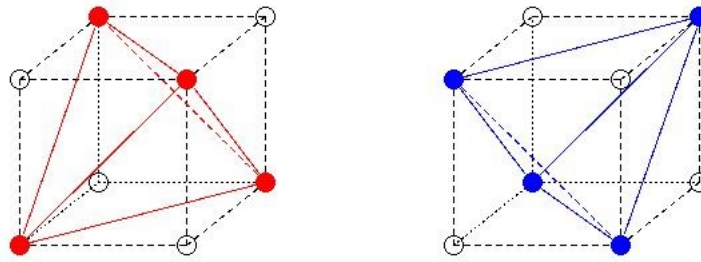


Figura 3 Distribuzione spaziale delle prove sperimentale nel Fractional Design

Si consideri il caso semplice di 3 parametri articolati in 2 livelli; nel caso di full factorial design si avrebbe un numero di esperimenti pari a 8 (i vertici del cubo di figura 10), mentre con un grado di riduzione pari a 1 è possibile ridurre gli esperimenti a 4, come indicato nella matrice seguente:

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Parametro C	Risultato
<b>1</b>	+1	+1	+1	-
<b>2</b>	+1	-1	-1	-
<b>3</b>	-1	+1	-1	-
<b>4</b>	-1	-1	+1	-

alla quale è associata una funzione di sistema di tipo lineare

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_3 + \varepsilon$$

Se si mettono a confronto la matrice ora ottenuta con quella del metodo full factorial, si nota che esse sono identiche. Infatti si è sfruttata l'ortogonalità della terza colonna, riservata nel full factorial all'interazione tra i parametri, per inserire il terzo parametro garantendo la significatività dei risultati. Per contro si è persa la capacità di studiare l'interazione tra i parametri, e si ha la forte possibilità di incappare nel fenomeno del confounding, scambiando l'effetto dovuto ad un fenomeno interattivo per quello dovuto ad un parametro principale o viceversa [10].

Discorso analogo si può fare per un sistema fractional factorial con 4 parametri con 3 livelli assegnati e grado di riduzione 2: la matrice risulterà identica a quella del full factorial corrispondente:

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Parametro C	Parametro D	Risultato
<b>1</b>	0	0	0	0	-
<b>2</b>	1	0	1	1	-

3	2	0	2	2	-
4	0	1	1	2	-
5	1	1	2	0	-
6	2	1	0	1	-
7	0	2	2	1	-
8	1	2	0	2	-
9	2	2	1	0	-

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + \varepsilon$$

### 2.7.2 Il Completely Randomized Design

Un completely randomized design è un metodo di pianificazione degli esperimenti che consiste nell'utilizzo spinto della tecnica della randomizzazione. Con questa tecnica è possibile indagare un enorme numero di parametri (30+) al fine di individuare facilmente quelli principali, a condizione che le interazioni siano deboli [17].

La randomizzazione viene effettuata su tre piani differenti:

- 1) nella scelta del valore da assegnare ai livelli dei singoli parametri;
- 2) nella sequenza di esecuzione delle prove sperimentali;
- 3) nella scelta di quali prove effettuare tra quelle presenti nella matrice degli esperimenti [17].

Della scelta del valore da assegnare ai livelli dei parametri di controllo si è già discusso nel capitolo riguardante la randomizzazione.

Nella sequenza delle prove sperimentali la randomizzazione si intende effettuata non solo nella determinazione dell'ordine della tipologia di prova, ovvero dell'ordine delle righe della matrice degli esperimenti, quanto piuttosto della determinazione dell'ordine delle prove effettivamente realizzate, tenendo conto della ripetizione delle stesse. La scelta viene quindi effettuata tra un numero di possibilità pari a:

$$N = p \cdot l \cdot n$$

dove per p ed l stanno rispettivamente numero di parametri e di livelli in fase di studio, mentre n è proprio il numero di ripetizioni richiesto.

Nel caso di fractional factorial design si è parlato di una possibile riduzione ponderata del numero delle prove in quanto lo spazio della soluzione può essere ben rappresentato anche solo da un insieme ordinato di prove. Tuttavia nel caso in cui il numero di prove sia decisamente superiore, ad esempio con un numero di parametri di controllo elevatissimo, lo spazio della soluzione è ben rappresentato da un insieme casuale di prove, come mostrato in figura 11.

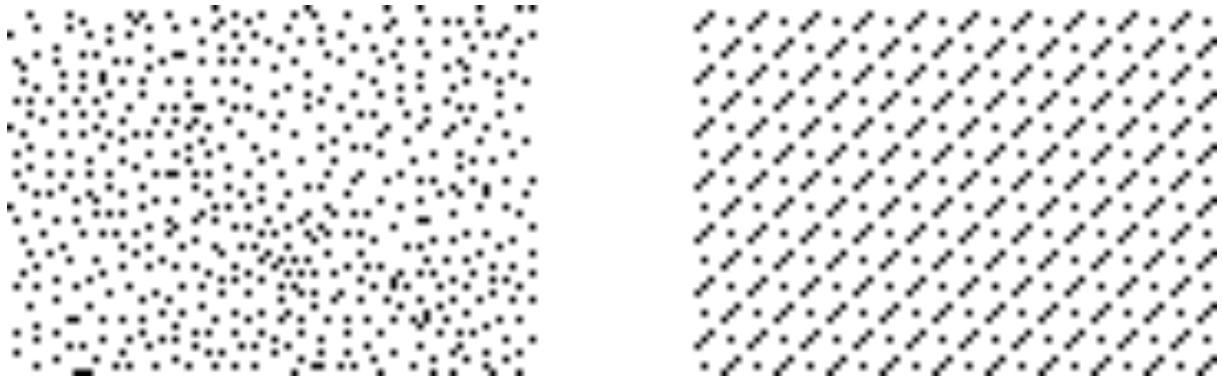


Figura 4 distribuzione spaziale delle prove nel Randomized Design (sinistra) e nel Fractional Design (destra)

I vantaggi del completely randomized design sono nella possibilità di un relativamente ridotto numero di prove in caso di un numero elevato di parametri di controllo, oltre a una certa robustezza nei confronti di parametri fuori controllo garantita dalla completa randomizzazione. Per contro tale randomizzazione spesso è inattuabile a causa di vincoli tra parametri dipendenti, e risulta inefficace nella determinazione delle correlazioni tra i parametri di controllo.

### 2.7.3 Il Response Surface Method Design

Il response surface method design si distingue da tutti i precedenti in quanto, piuttosto che cercare la combinazione migliore dei livelli tra i parametri di controllo al fine di determinarne la configurazione ottimale, cerca di individuare una funzione che approssimi il sistema al meglio, e quindi trattare la funzione così ottenuta con i metodi analitici idonei per individuarne i punti critici. Si cerca una funzione di tipo:

$$f := \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$$

ovvero una funzione che associ ad  $m$  variabili di ingresso  $n$  variabili di uscita, dove  $\mathbf{R}^m$  è lo spazio di controllo, spazio nel quale è possibile scegliere i livelli dei parametri di controllo, e  $\mathbf{R}^n$  è lo spazio di misurazione, dove alloggia il valore della funzione.

Cercandosi una funzione approssimata, questa sarà della forma [24]:

$$Y = \sum a_i X_i + \sum b_j X_j^l X_k^q$$

Per una trattazione graficamente possibile si consideri il semplice caso di  $m=2$  e  $n=1$ , e la scelta di una approssimazione di tipo quadratico con interazioni del secondo ordine. La funzione sarà della forma [17]

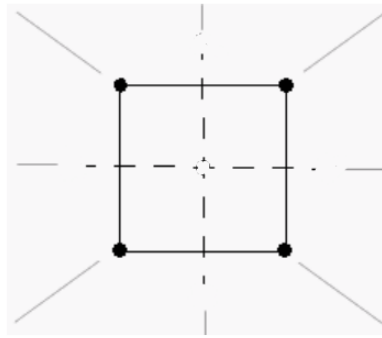
$$Y = a_0 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1 \cdot X_2 + \varepsilon$$

Ovvero bisogna individuare solo 6 parametri per definire la curva.

Nel caso di un esperimento full factorial  $2^2$ , dove si prendono i parametri di controllo temperatura (190-210°C) e pressione (50-100MPa) lo spazio di controllo può essere rappresentato dalla figura seguente [25]:

210°, 50MPa

210°, 100MPa



190°, 50MPa

190°, 100MPa

*Figura 5 Distribuzione spaziale delle prove nel Full Factorial Design*

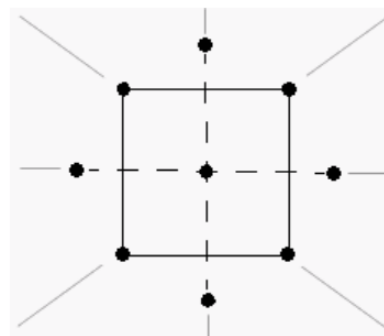
tale configurazione spaziale tuttavia non può essere rappresentativa dell'intero campo di controllo, sia per l'esiguo numero di punti individuati, sia per la loro disposizione. La seguente invece, arricchita da altri punti intermedi, appare molto più rappresentativa [25].

210°, 50MPa

214.1°, 75MPa (axial point)

210°, 100MPa

200°, 39.6MPa (axial point)



200°, 110.4MPa (axial point)

190°, 50MPa

185.9°, 75MPa (axial point)

190°, 100MPa

*Figura 6 Distribuzione spaziale delle prove nel Response Surface Design*

Il valore delle grandezze da assegnare ai livelli intermedi prima non considerati, sono presi a partire dal centro del campo di controllo lungo gli assi di simmetria dello stesso, la cui distanza è funzione di un parametro  $\alpha$  a sua volta funzione della tipologia di metodo di fattorializzazione iniziale, in questo caso di un sistema 22. La tabella a pagina seguente definisce meglio il valore di  $\alpha$  [25].

Factors	Design	Runs	Blocks	Cube blocks	Cube runs	Center points	Cube center points	Axial center points	Default alpha	Rotatable
2	Full	13	1	---	4	5	---	0	1.414	y
2	Full	14	2	1	4	6	3	3	1.414	y
3	Full	14	1	---	8	6	---	0	1.682	y
3	Full	20	2	1	8	6	4	2	1.633	n
3	Full	20	3	2	8	6	4	2	1.633	n
4	Full	31	1	---	16	7	---	0	2	y
4	Full	30	2	1	16	6	4	2	2	y
4	Full	30	3	2	16	6	4	2	2	y
5	Full	52	1	---	32	10	---	0	2.378	y
5	Full	54	2	1	32	12	8	4	2.366	n
5	Full	54	3	2	32	12	8	4	2.366	n
5	Half	32	1		16	6	---	0	2	y
5	Half	33	2	1	16	7	6	1	2	y
6	Full	90	1	---	64	14	---	0	2.828	y
6	Full	90	2	1	64	14	8	6	2.828	y
6	Full	90	3	2	64	14	8	6	2.828	y
6	Full	90	5	4	64	14	8	6	2.828	y
6	Half	53	1	---	32	9	---	0	2.378	y
6	Half	54	2	1	32	10	8	2	2.366	n
6	Half	54	3	2	32	10	8	2	2.366	n
7	Full	152	1	---	128	10	---	0	3.364	y
7	Full	160	2	1	128	18	8	10	3.364	y
7	Full	160	3	2	128	18	8	10	3.364	y
7	Full	160	5	4	128	18	8	10	3.364	y
7	Half	88	1	---	64	10	---	0	2.828	y
7	Half	90	2	1	64	12	8	4	2.828	y
7	Half	90	3	2	64	12	8	4	2.828	y
7	Half	90	5	4	64	12	8	4	2.828	y
8	Half	154	1	---	128	10	---	0	3.364	y
8	Half	160	2	1	128	16	8	8	3.364	y
8	Half	160	3	2	128	16	8	8	3.364	y
8	Half	160	5	4	128	16	8	8	3.364	y
8	Quarter	90	1	---	64	10	---	0	2.828	y
8	Quarter	90	2	1	64	10	8	2	2.828	y
8	Quarter	90	3	2	64	10	8	2	2.828	y
8	Quarter	90	5	4	64	10	8	2	2.828	y
9	Quarter	156	1	---	128	10	---	0	3.364	y
9	Quarter	160	2	1	128	14	8	6	3.364	y
9	Quarter	160	3	2	128	14	8	6	3.364	y
9	Quarter	160	5	4	128	14	8	6	3.364	y

Individuato il campo di controllo e quindi i valori da assegnare ai parametri, si esegua la prova sperimentale, si misuri la funzione obiettivo e se ne faccia la mappa dei punti nello spazio di misurazione.

Maggiore sarà il numero di prove effettuate, maggiore sarà il numero di punti di mappatura, quindi migliore il fit della curva approssimata; nelle figure seguenti due esempi di curve interpolate [17]:

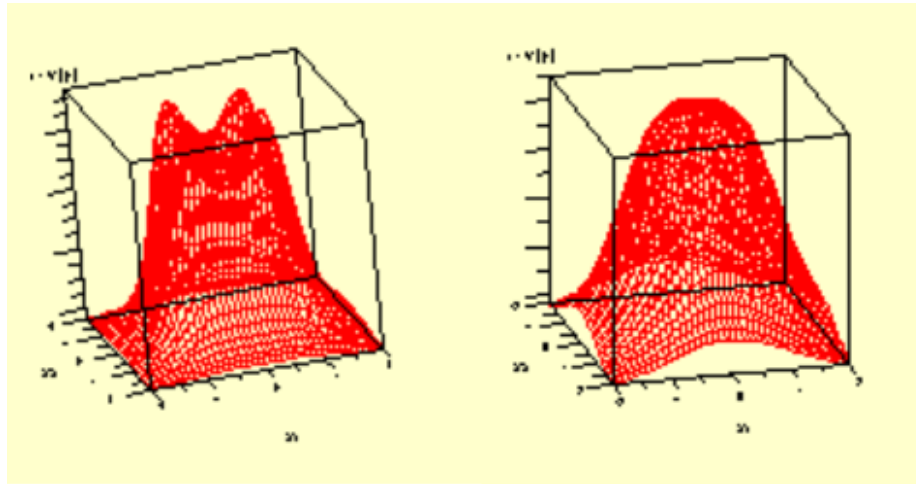


Figura 7 Esempi di soluzione del Response Surface Design

nota la curva Y grazie all'interpolazione dei coefficienti  $a_{ij}$ , si può procedere alla determinazione dei punti critici della suddetta; la curva può essere riscritta nella generica forma matriciale:

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + c$$

dove si hanno i termini

$$x = \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \quad A = \begin{matrix} 2a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & 2a_{22} \end{matrix} \quad b = \begin{matrix} -a_1 \\ -a_2 \end{matrix} \quad c = a_0$$

Si individui la soluzione particolare  $x^*$  per la quale si abbia

$$\nabla f(x^*) = 0$$

e dalla qualità della matrice Hessiana corrispondente, che nel caso di funzione ellittica

$$H_{ij}(x^*) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2 \delta x_j^2}(x^*) = A(x^*) = A$$

nel caso A sia definita positiva, allora il punto  $x^*$  è di minimo, se definita negativa di massimo, ovvero di ottimo.

## 2.8 Il metodo Taguchi

Il metodo Taguchi è un modello di pianificazione di prove sperimentali che prevede l'utilizzo di matrici di esperimenti ridotte secondo la condizione di ortogonalità delle stesse. Il metodo venne introdotto dall'ingegnere e statistico giapponese Genichi Taguchi già nel 1981, quando nel corso di una conferenza per la direzione della Ford, illustrò la sua teoria sulla "loss quality function" e sul "robust design", concetti che trovano la loro completezza nel manuale "Taguchi's Quality Engineering Handbook" del 2005.

---

### 2.8.1 Le matrici ortogonali

La peculiarità del metodo di Taguchi consiste nella riduzione della matrice degli esperimenti, ovvero nel loro numero, adottandone invece una sua base ortogonale, ovvero un suo sottoinsieme minimo di righe linearmente indipendenti [16]: ciascuna delle righe della matrice degli esperimenti del full factorial design, come già indicato, presenta una combinazione possibile tra livelli e parametri del processo in esame; tra queste è possibile isolarne alcune tra loro linearmente indipendenti, che ne costituiscono una base completa, che andranno a costituire la matrice ortogonale di Taguchi corrispondente. Nell'esempio seguente è indicata la matrice corrispondente ad un full factorial design con 3 parametri che si articolano in 2 livelli [11]:

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Parametro C
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

Tenendo conto di una numerazione di base 2, si nota ad esempio come la riga corrispondente all'esperimento numero 8 sia data dalla somma delle righe corrispondenti agli esperimenti numero 2 e 7, o ancora come la riga corrispondente all'esperimento numero 5 sia data dalla somma delle righe corrispondenti agli esperimenti numero 2 e 6. E' possibile quindi isolare 4 righe della matrice tra loro indipendenti, che ne costituiscono una base, e nell'esempio indicato una delle scelte possibili è la seguente [16]:

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Parametro C
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

La matrice così ottenuta è detta ortogonale, poiché le colonne sono tra loro ortogonali, ovvero la somma dei rispettivi prodotti, espressa nella base corrispondente, è nulla. Ciò si riflette, in ambito sperimentale, nella necessità di

---

studiare parametri che siano tra loro indipendenti; in queste condizioni è possibile valutare l'importanza  $\Delta$  del singolo parametro sul risultato finale utilizzando la sola matrice ridotta, infatti il risultato di ogni altra prova sperimentale non presente in tale matrice è dato da una combinazione lineare di quelli presenti.

La potenza del metodo però è ancora più evidente nel caso di prove sperimentali che prevedano il sondaggio di più parametri: infatti, ad esempio, nel caso che i parametri siano fino a 7, ammettendo l'ipotesi lineare (due livelli), la matrice completa degli esperimenti prevede fino a  $2^7=128$  esperimenti, mentre quella ridotta ne prevede solo 8, un numero inferiore di addirittura quattro volte rispetto o quello previsto nel fractional factorial design corrispondente con una riduzione di secondo grado, come mostrato nella matrice a pagina seguente, detta matrice L8 [16]:



N°	Parametro A	Parametro B	Parametro C	Parametro D	Parametro E	Parametro F	Parametro G
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1

La base della matrice degli esperimenti completa ha una dimensione pari a 8 per un numero di parametri fino a 7, e poiché la scelta della base è libera purché ne venga rispettata la condizione di ortogonalità, è possibile selezionare una base comune valida in casi di diversa complessità, dando la possibilità di tabellare delle matrici universali, valide per un numero diverso di parametri: nel caso di 4 parametri sarà sufficiente considerare le prime 4 colonne della matrice L8, nel caso di 5 parametri le prime 5 colonne e così via.

Le matrici sono classificate in funzione del numero di parametri e di livelli secondo la tabella di pagina seguente, dove il numero degli esperimenti da effettuare è indicato nella nomenclatura stessa della matrice (p.e. alla matrice L8 corrispondono 8 esperimenti):

Parametri \ Livelli	2	3	4	5
2	L4	L9	L16	L25
3				
4				
5	L8	L18	L32	L50
6				
7				
8	L12	L27	L32	L50
9				
10				
11	L16	L27	L32	L50
12				
13				
14	L16	L27	L32	L50
15				
16				
17	L32	L36	L32	L50
18				
19				
20	L32	L36	L32	L50
21				
22				
23	L32	L36	L32	L50
24				
25				
26	L32	L36	L32	L50
27				
28				
29	L32	L36	L32	L50
30				
31				
32	L32	L36	L32	L50
33				

### 2.8.2 L'analisi dei risultati: il metodo ANOM

La riduzione delle matrici complete è possibile grazie all'adozione di un sistema di analisi statistica delle medie, detta ANOM, differente dalla comune ANOVA, l'analisi delle varianze presentata precedentemente.

Nell'analisi delle medie, il risultato delle prove sperimentali viene analizzato secondo l'effetto medio col quale il singolo parametro vi ha contribuito.

Si prenda in considerazione una successione di N valori  $y_i$ ; i loro valori medio Y e massimo  $Y_{max}$  sono dati dalle seguenti:

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

$$Y_{max} = MAX[y_i]$$

Si introduca il concetto di media di lavoro  $\tilde{Y}$ , di valore arbitrario; il valore medio della successione data sarà equivalente alla somma tra la media di lavoro introdotta e la media degli scarti di ciascun valore rispetto a tale media, mentre il valore massimo sarà dato dalla somma tra la media di lavoro e lo scarto massimo tra un valore e la media stessa. Di conseguenza le espressioni precedenti divengono [16] [26]:

$$Y = \tilde{Y} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{Y})$$

$$Y_{max} = \tilde{Y} + MAX[y_i - \tilde{Y}]$$

Qualora la successione di valori corrisponda ai risultati delle prove sperimentali, questi valori possono essere discriminati in funzione dei singoli parametri, in particolare, la media complessiva dei risultati corrisponderà alla media delle medie dei risultati ottenuti a seguito del livello scelto; fissato il parametro P, si ottiene infatti che:

$$Y = Y_{P0} + Y_{P1} + \dots + Y_{P(l-1)} = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Y_{Pk}$$

Dove l è il numero di livelli selezionato. Tale risultato è il medesimo per qualsiasi parametro P scelto, in particolare si ha, variando il parametro selezionato:

$$p \cdot Y = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Y_{2k} + \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Y_{2k} + \dots + \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Y_{pk}$$

ovvero:

$$Y = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left( \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Y_{jk} \right)$$

Dove p è il numero di parametri in esame. Si reintroduca il concetto di media di lavoro  $\tilde{Y}$ ; la relazione precedente diviene quindi:

$$Y = \tilde{Y} + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left[ \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} (Y_{jk} - \tilde{Y}) \right]$$

Dove il termine tra le parentesi quadre corrisponde allo scarto medio di ogni parametro con la media di lavoro  $\tilde{Y}$ , ovvero all'influenza  $\Delta_j$  del parametro j-esimo sul risultato. L'equazione può essere ripresentata nella forma seguente:

$$Y = \tilde{Y} + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \Delta_j$$

Confrontando il risultato ottenuto con le considerazioni iniziali, il valore massimo della successione è dato dalla seguente [16]:

$$Y_{max} = \tilde{Y} + \sum_{j=1}^p MAX[\Delta_j]$$

Il valore massimo è quindi dato dalla somma tra la media di lavoro e la sommatoria degli scarti dei singoli parametri con la media di lavoro stessa, ovvero non si fa alcun riferimento né alla media generale  $\tilde{Y}$  né alla successione di valori completa  $Y_i$ .

Questo risultato fondamentale ci permette di utilizzare la matrice ortogonale di Taguchi in luogo della matrice completa: infatti il valore massimo della funzione risultato, corrispondente all'esperimento con la migliore combinazione di livelli per i parametri, è calcolabile a partire dal risultato di un numero di esperimenti minore, tra i quali non è necessaria la presenza di tale esperimento. La media di lavoro corrisponderà alla media dei risultati della matrice ridotta, mentre l'importanza dei parametri è definita come il loro scarto medio dalla media di lavoro:

$$\Delta_j = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} (Y_{jk} - \tilde{Y})$$

valore per il quale verrà aggiunta una riga alla matrice della pianificazione.

### 2.8.3 Il vettore di massimo

Il vettore di massimo (o di ottimo) non è altro che la riga della matrice completa alla quale corrisponde il valore massimo registrato nella colonna dei risultati, è costituito ovvero dal livello corrispondente ad ogni parametro tale che il processo abbia la risposta migliore. L'esperimento relativo a tale vettore non deve forzatamente essere uno di quelli indicati nella matrice ridotta di Taguchi, anzi molto spesso ne è fuori.

La determinazione di tale vettore è permessa dall'analisi delle medie della risposta del processo discriminata in funzione del parametro e del livello scelto per esso: definito il parametro  $p$  del quale determinare il livello di massimo, si confrontino le medie della risposta discriminate in base ai livelli assegnati al parametro in esame, al livello desiderato corrisponderà la media più elevata.

Allo scopo si aggiunga alla matrice un numero di righe pari al numero di livelli in cui si articolano i parametri; ad ogni cella corrisponderà la media della risposta discriminata in funzione del parametro e del livello a lui assegnato secondo la seguente [16]:

$$Y_{pl} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=i^*}^{n^*} Y_i$$

dove con  $p$  e con  $l$  vengono fissati il parametro ed il livello di riferimento, e con  $Y_i$  i risultati delle prove corrispondenti a tali riferimenti.

Si aggiungano inoltre una riga da assegnare all'importanza del parametro (paragrafo precedente), ed una da assegnare al vettore di massimo. Si riservino due celle al calcolo della media di lavoro  $\bar{Y}$  e del valore di massimo  $Y_{\max}$ .

Numero prova	Parametro A	Parametro B	Parametro C		Parametro G	Risultato
1	0	0	0		0	Y1
2	0	0	0		1	Y2
8	1	1	0		1	Y8
$Y_{p0}$	$Y_{A0}$	$Y_{B0}$	$Y_{C0}$		$Y_{G0}$	$\bar{Y}$
$Y_{p1}$	$Y_{A1}$	$Y_{B1}$	$Y_{C1}$		$Y_{G1}$	
$\Delta$	$\Delta_A$	$\Delta_B$	$\Delta_C$		$\Delta_G$	$Y_{\max}$
$v_{\max}$	$l_A$	$l_B$	$l_C$		$l_G$	

#### 2.8.4 Le interazioni tra i parametri

Come specificato precedentemente, alle colonne ortogonali della matrice ridotta di Taguchi devono necessariamente corrispondere parametri tra loro indipendenti. Nella pratica questo non sempre succede, anzi spesso non è nemmeno nota l'esistenza di una eventuale interazione. Tuttavia il metodo di Taguchi fornisce degli strumenti per valutarne l'esistenza così come l'entità, per poi eventualmente considerare questo effetto in un piano di sperimentazione di grado successivo.

E' possibile valutare l'interazione tra due parametri tramite la costruzione di due vettori, o serie di vettori nel caso di numero di livelli superiore a 2, corrispondenti all'andamento del risultato in funzione della variazione mutua dei due parametri: la figura seguente mostra le due curve in uno spazio di rappresentazione bidimensionale che presenta in ascissa la variazione di uno dei parametri nei suoi livelli, mentre in ordinata le medie dei risultati dell'esperimento assunte alla variazione dell'altro parametro nei suoi livelli [16]:

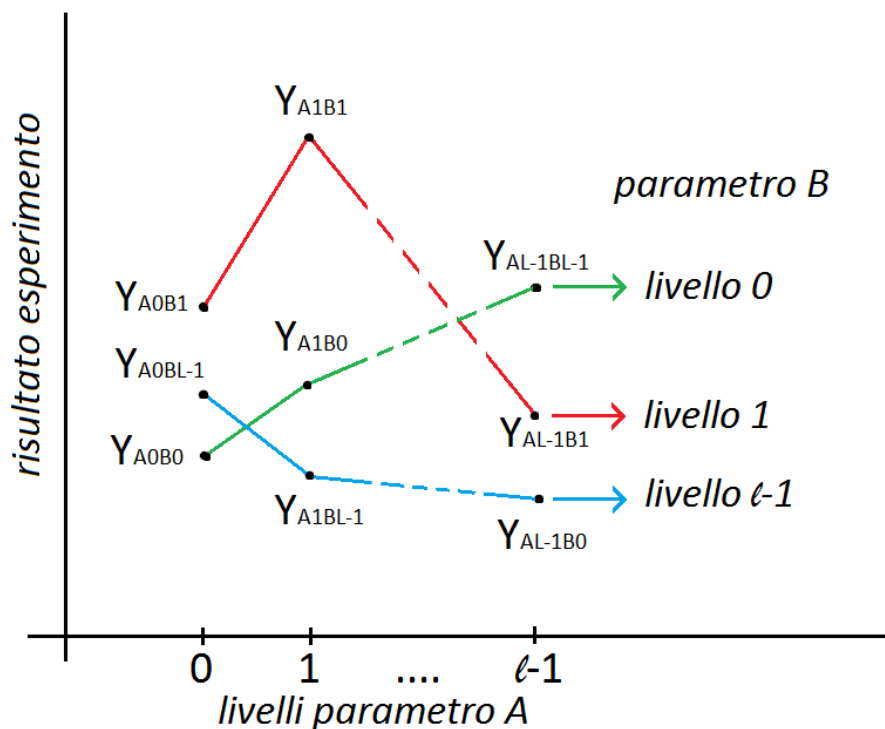


Figura 8 Grafico delle interazioni tra parametri nel metodo Taguchi

Qualora il grafico presenti delle curve parallele allora è verificata l'indipendenza tra i due parametri in esame; nel caso di curve simil parallele l'interazione esiste ma è di debole entità, quindi trascurabile; mentre nel caso in cui le curve si presentino incidenti o persino intersecate, l'interazione non è trascurabile.

Quando venga verificata l'esistenza di almeno una interazione non trascurabile, è necessario eseguire di nuovo la sperimentazione, valutando l'interazione come un numero di nuovi parametri pari a  $l-1$ , con  $l$  numero dei livelli su cui si articolano i parametri interagenti. Tuttavia la posizione delle nuove colonne relative all'interazione non può essere assegnata casualmente: come nel caso del metodo full factorial design infatti, la colonna (o le colonne) dell'interazione tra due parametri è la risultante del prodotto delle colonne relative ai due parametri interagenti; quindi, selezionato il numero di livelli idoneo al piano di sperimentazione, la posizione mutua dei due parametri interagenti e della loro interazione è legata alla dimensione della matrice corrispondente. Ad ogni numero di livelli  $l$  scelto corrisponde una matrice di forma triangolare, che presenta come dati di ingresso la posizione delle colonne dei parametri interagenti, e come dato di uscita la posizione che dovrà assumere la colonna relativa all'interazione. Un esempio di matrice triangolare è la seguente, nel caso di numero di livelli pari a 2 (ridotta, nel caso, all'utilizzo di matrici fino alla dimensione 16):

		Posizione PARAMETRO A													
		15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Po	1	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3
	2	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	

3	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7
4	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	
5	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3		
6	9	8	11	10	13	12	15	14	1			
7	8	9	10	11	12	13	14	15				
8	7	6	5	4	3	2	1					
9	6	7	4	5	2	3						
10	5	4	7	6	1							
11	4	5	6	7								
12	3	2	1									
13	2	3										
14	1											

### 2.8.5 Un esempio numerico

Per meglio chiarire i concetti finora espressi, si consideri l'esempio numerico seguente.

Si studi, per un processo, l'influenza di 7 parametri per i quali può essere ipotizzata una legge lineare, ovvero articolati in 2 livelli. La matrice di Taguchi corrispondente alle condizioni indicate è la matrice L8, che presenta i seguenti risultati:

N°	PARAMETRI							Risultato
	A	B	C	D	E	F	G	
1	0	0	0	0	0	0	0	98,94
2	0	0	0	1	1	1	1	65,70
3	0	1	1	0	0	1	1	49,41
4	0	1	1	1	1	0	0	95,89
5	1	0	1	0	1	0	1	75,68
6	1	0	1	1	0	1	0	97,38
7	1	1	0	0	1	1	0	90,93
8	1	1	0	1	0	0	1	84,15
Y <sub>p0</sub>	77,485	84,425	84,930	78,740	82,470	88,665	95,785	media 82,260
Y <sub>p1</sub>	87,035	80,095	79,590	85,780	82,050	75,855	68,735	
Δ	4,775	2,165	2,670	3,520	0,210	6,405	13,525	ottimo 115,53
V <sub>max</sub>	1	0	0	1	0	0	1	

Il vettore di massimo che si ottiene dall'analisi dei risultati è il seguente:

$$v_{max} = \{ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \}$$

il quale, come già accennato nella trattazione teorica precedente, non è tra quelli sperimentati realmente. Il valore di massimo ad esso associato è il seguente:

$$Y_{max} = 82,26 + (4,775 + 2,165 + 2,67 + 3,52 + 0,21 + 6,405 + 13,525) = 115,53$$

Inoltre, dai risultati degli esperimenti, si nota come i parametri che maggiormente influiscono sul processo sono i parametri F e G (rispettivamente di  $\Delta$  pari a 6,4 e 13,5), il parametro E non ha praticamente nessun effetto sul processo mentre i parametri A, B, C e D lo influenzano in maniera relativamente minore.

Si indaghi quindi sull'eventuale interazione tra i parametri F e G; si ha che:

$$Y_{F0,G0} = \frac{Y_1 + Y_4}{2} = \frac{98,94 + 95,89}{2} = 97,415$$

$$Y_{F0,G1} = \frac{Y_5 + Y_8}{2} = \frac{75,68 + 84,15}{2} = 79,915$$

$$Y_{F1,G0} = \frac{Y_6 + Y_7}{2} = \frac{97,38 + 90,93}{2} = 94,115$$

$$Y_{F1,G1} = \frac{Y_2 + Y_3}{2} = \frac{65,70 + 49,41}{2} = 57,555$$

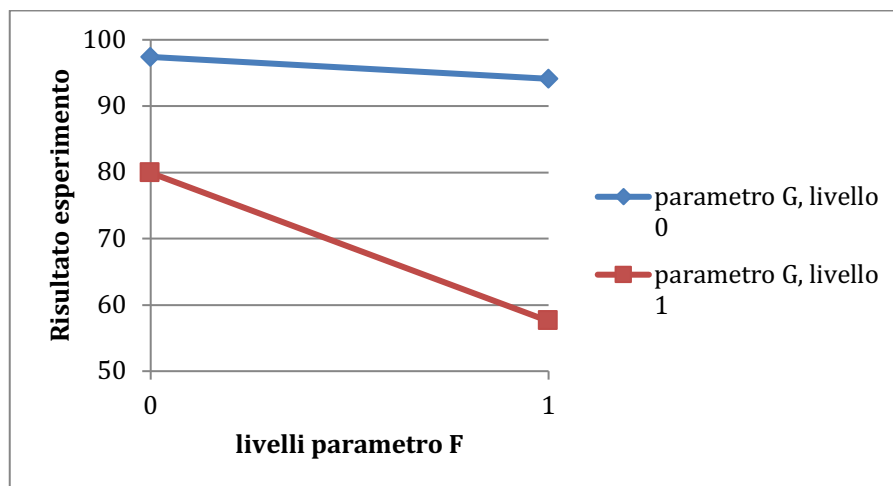


Figura 9 Grafico interazione parametri

Dal grafico risulta evidente l'interazione tra i due parametri, e quindi si rende necessaria la realizzazione di un piano sperimentale di secondo grado che ne tenga conto.

Si proceda a tale pianificazione tenendo conto delle seguenti informazioni:

- i parametri E, B e C possono essere trascurati;
- è presente una interazione tra i parametri F e G, e per tale interazione, essendo di primo grado (ipotesi lineare,  $l=2$ ), è necessario riservare una colonna della matrice.

La pianificazione prevede quindi lo studio di  $4+1=5$  parametri di processo, ancora sotto l'ipotesi lineare, ovvero  $l=2$ ; la matrice ridotta di Taguchi è, anche in questo caso, la matrice L8; assegnando ai parametri F e G rispettivamente la prima e la seconda colonna, dalla matrice triangolare si ricava che la colonna che bisogna



riservare all'interazione è la terza\*, l'assegnazione del posto per gli altri parametri resta libera. La matrice ortogonale verrà quindi costruita nella seguente maniera:

Numero prova	Parametro F	Parametro G	Interazione FxG	Parametro A	Parametro D
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0
4	0	1	1	1	1
5	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	1	0	0	1
8	1	1	0	1	0

### 2.8.6 Il Robust design

Precedentemente si è parlato di fattori esterni che potessero influenzare il processo. Il metodo di Taguchi esteso a tali parametri è detto "robust design", in quanto piuttosto che registrare come il processo ne risulta influenzato, valuta la robustezza che il processo stesso presenta a seguito di loro eventuali variazioni. Allo scopo vengono correlate due matrici ortogonali di Taguchi, corrispondenti rispettivamente allo studio dei parametri di processo e allo studio dei parametri esterni, la risposta delle quali verrà valutata rispettivamente tramite l'analisi delle medie ANOM e l'analisi delle varianze ANOVA. Per meglio chiarire quanto espresso si guardi all'esempio seguente.

Si consideri un processo sul quale intervengano tre parametri sotto l'ipotesi di linearità ( $p=3, l=2$ ), del quale si vuole studiare anche la robustezza rispetto a tre parametri esterni sotto l'ipotesi di linearità ( $p=3, l=2$ ); in entrambi i casi la matrice ortogonale di Taguchi corrispondente è la matrice L4. La correlazione delle stesse è presentata nella matrice della pagina seguente, nella quale è indicato come il numero delle prove da eseguire sia  $4 \times 4 = 16$ :

					N°	1	2	3	4	$\tilde{Y}_{E0}$	$\sigma_{E0}$	$\tilde{Y}_{E0}$	$\sigma_{E1}$	$\Delta$
					EG	0	1	1	0	$\tilde{Y}_{G0}$	$\sigma_{G0}$	$\tilde{Y}_{G1}$	$\sigma_{G1}$	$\Delta_F$
					EF	0	1	0	1	$\tilde{Y}_{F0}$	$\sigma_{F0}$	$\tilde{Y}_{F1}$	$\sigma_{F1}$	$\Delta_E$
					ED	0	0	1	1	$\tilde{Y}_{D0}$	$\sigma_{D0}$	$\tilde{Y}_{D1}$	$\sigma_{D1}$	$\Delta_D$
N°	PA	PB	PC	Y	Y <sub>E1</sub>	Y <sub>E2</sub>	Y <sub>E3</sub>	Y <sub>E4</sub>						
1	0	0	0	Y <sub>P1</sub>	Y <sub>11</sub>	Y <sub>12</sub>	Y <sub>13</sub>	Y <sub>14</sub>						
2	0	1	1	Y <sub>P2</sub>	Y <sub>21</sub>	Y <sub>22</sub>	Y <sub>23</sub>	Y <sub>24</sub>						
3	1	0	1	Y <sub>P3</sub>	Y <sub>31</sub>	Y <sub>32</sub>	Y <sub>33</sub>	Y <sub>34</sub>						
4	1	1	0	Y <sub>P4</sub>	Y <sub>41</sub>	Y <sub>42</sub>	Y <sub>43</sub>	Y <sub>44</sub>						
Y <sub>p0</sub>	Y <sub>A0</sub>	Y <sub>B0</sub>	Y <sub>C0</sub>	$\tilde{Y}$										
Y <sub>p1</sub>	Y <sub>A0</sub>	Y <sub>B0</sub>	Y <sub>C0</sub>											
$\Delta$	$\Delta_A$	$\Delta_B$	$\Delta_C$	Y <sub>max</sub>										
v <sub>max</sub>	l <sub>A</sub>	l <sub>B</sub>	l <sub>C</sub>											

Dove sono applicate le seguenti [16]:

$$Y_{Pi} = \frac{1}{n_E} \sum_{j=1}^{n_E} Y_{ij} \quad \tilde{Y} = \frac{1}{n_P} \sum_{i=1}^{n_P} Y_{Pi} \quad Y_{PL} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=i^*}^{n^*} Y_{Pi} \quad \Delta_i = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} Y_{ik}$$

$$Y_{Ej} = \frac{1}{n_P} \sum_{i=1}^{n_P} Y_{ij} \quad \tilde{Y}_{EL} = \frac{1}{n^*} \sum_{j=j^*}^{n^*} Y_{Ej} \quad \sigma_{EL} = \sqrt{\frac{\sum_{j=j^*}^{n^*} (Y_{Ej} - \tilde{Y}_{EL})^2}{n^*}} \quad \Delta_i = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \sigma_{ik}$$

La matrice correlata presenta tre blocchi principali, due blocchi corrispondenti alle matrici ortogonali relative ai due insiemi di parametri, di processo ed esterni, e un terzo blocco corrispondente ai risultati delle prove sperimentali eseguite.

Nel senso orizzontale si legge l'effetto dei parametri di processo sul processo stesso, ne viene indicato il vettore di massimo e il suo valore corrispondente. L'analisi ANOM è eseguita, nelle stesse modalità già descritte, sulla media delle risposte relativa ad una stessa riga della matrice dei parametri di processo.

Nel senso verticale si legge la robustezza del processo ai parametri esterni, la risposta ai singoli esperimenti è fornita sotto la forma di deviazione standard, che viene discriminata in funzione del singolo parametro, nel singolo livello, in modo da definirne l'importanza; ad una maggiore deviazione riscontrata corrisponde una minore robustezza del processo nei confronti del parametro esterno in esame.

---

### 3 Conclusioni

Nei precedenti paragrafi sono stati mostrati alcuni tra i metodi di pianificazione degli esperimenti più utilizzati, enunciandone caratteristiche, difetti e punti di forza. La scelta del metodo da applicare infatti è strettamente legata alla natura degli esperimenti da programmare, in particolare al numero di parametri da indagare e la loro importanza presunta, la quantità ed il grado delle interazioni attese, oltre allo scopo stesso della pianificazione, ovvero se uno screening di primo grado, piuttosto che l'individuazione dell'ottimo del processo (tipico della ricerca industriale) o ancora un'indagine sul comportamento del processo su tutto il campo esaminato (tipico della ricerca accademica). Nella tabella di pagina seguente vengono messi a confronto i vari metodi:

Metodo	Obiettivo	Numero parametri	Importanza parametri	Interazioni
Full factorial design	Individua l'ottimo del processo	2 - 4	Tutti i parametri sono importanti	Pochissime interazioni ma rilevanti, fino al II ordine
Fractional factorial design		4 - 6		
Completely randomized design	Screening di primo grado	30+	Pochissimi parametri sono importanti	Interazioni deboli o trascurabili
Response surface design	Indagine sul comportamento del processo	2 - 9	Indifferente	
Metodo Taguchi	Individua l'ottimo del processo	4 - 32	Alcuni parametri (anche tutti) importanti	Poche interazioni ma importanti, solo di I ordine