**Equazione della concentrazione**

Sia $M_s$ la massa della fase solida in sospensione all'interno di una fase liquida. Sia $V$ il generico elemento di volume, contemporaneamente occupato dalla fase solida, di volume $V_s$, e dalla fase liquida, di volume $V_l$.

Sia $\rho_s = M_s/V$ la densità macroscopica della fase solida in sospensione, data dal rapporto tra la massa della fase solida e il volume totale.

Si applica il principio di conservazione della massa $M_s$ all'interno di $V$. Tale principio si esprime imponendo che sia nulla la derivata sostanziale di $M_s$

$\frac{dM_S}{dt} = 0$ che si può esprimere nella forma $\frac{d}{dt}\int_V \rho_s dv = 0$ (1)

Applicando il teorema del trasporto, la (1) si scrive

$$\int_V \frac{\partial \rho_s}{\partial t} dv - \int_A \rho_s \vec{v}_S \cdot \hat{n}\, dA = 0 \tag{2}$$

in cui $A$ è la superficie di contorno del volume $V$, $\vec{v}_S$ è la velocità della fase solida ed $\hat{n}$ è la normale interna alla superficie $A$.

Applicando il teorema della divergenza, la (2) si scrive

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + div(\rho_s \vec{v}_S)\right) dv = 0 \tag{3}$$

Dal momento che la (3) vale per qualunque volume $V$, la (3) implica la seguente equazione differenziale

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + div(\rho_s \vec{v}_S) = 0 \tag{4}$$

Dividendo ogni termine della (4) per la densità microscopica, $\hat{\rho}_s = M_S/V_S$, la (4) si scrive

$$\frac{\partial \rho_s/\hat{\rho}_s}{\partial t} + div((\rho_s/\hat{\rho}_s)\vec{v}_S) = 0 \tag{5}$$

Ricordando che il rapporto $\rho_s/\hat{\rho}_s$ è dato dalla seguente espressione

$$\frac{\rho_s}{\hat{\rho}_s} = \frac{M_S/V}{M_S/V_S} = \frac{V_S}{V} = C \tag{6}$$

in cui $C$ rappresenta la concentrazione volumetrica della fase solida, la (5) diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + div(C\vec{v}_S) = 0 \tag{7}$$

Esplicitando le derivate, la (7) si scrive

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial u_s C}{\partial x}+\frac{\partial v_s C}{\partial y}+\frac{\partial w_s C}{\partial x}=0 \tag{8}$$

Assumendo alcune ipotesi semplificative, le componenti orizzontali del vettore velocità della fase solida possono essere approssimate da quelle della fase liquida, $u$ e $v$, mentre la componente verticale può essere approssimata dalla differenza tra la velocità della fase liquida e la velocità di sedimentazione in acqua ferma $w - w_{sed}$,

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{u} C}{\partial x}+\frac{\partial v C}{\partial y}+\frac{\partial (w-w_{sed})C}{\partial x}=0 \tag{9}$$

Considerando che, generalmente, i fenomeni di trasporto solido si verificano in regime di moto turbolento, le componenti della velocità e la concentrazione di solido sospesi vengono scomposti in una componente mediata secondo Reynolds e in una componente fluttuante. Indichiamo con la sopralineatura ( $\tilde{}$ ) la somministrazione della media secondo Reynolds e scomponiamo la generica grandezza $f$ nella sua componente mediata alla Reynolds $\tilde{f}$ e fluttuante $f' = f - \tilde{f}$. Per ottenere l'equazione di bilancio della concentrazione mediata secondo Reynolds, l'Eq. (8) viene sottoposta ad un'operazione di media alla Reynolds e viene espressa in termini di grandezze mediate alla Reynolds $\tilde{C}, \tilde{u}, \tilde{v}$ e $\tilde{w}$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{u}\tilde{C}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}\tilde{C}}{\partial y}+\frac{\partial (\tilde{w}-\tilde{w}_{sed})\tilde{C}}{\partial x}=-\left(\frac{\partial \widetilde{u'C'}}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{v'C'}}{\partial y}+\frac{\partial \widetilde{w'C'}}{\partial x}\right) \tag{10}$$

Il termine a secondo membro è la divergenza di un vettore incognito dato dal prodotto delle componenti fluttuanti del vettore velocità e della concentrazione. Tale termine incognito viene rappresentato, per mezzo di una relazione di chiusura, in funzione delle componenti mediate alla Reynolds.

**Equazione della concentrazione mediata lungo la profondità**

Sia $h_{\sup}$ la quota della superficie libera rispetto ad un piano orizzontale di riferimento. Sia $z_a$ la quota, rispetto allo stesso piano di riferimento, di una superficie parallela al fondo posta ad una distanza $a$ dal fondo. Sia $H = h_{\sup} - z_a$ la profondità del dominio occupato dalla fase solida in sospensione. Si integra lungo la verticale l'equazione della concentrazione, considerando come estremi di integrazione la quota $z_a$ (fissa nel tempo) e la quota della superficie libera (mobile nel tempo), e si applicano le opportune condizioni al contorno riportate di seguito.

**Condizione alla superficie di contorno inferiore**

Sia $F_a(x, y, z) = 0$ la funzione implicita, indipendente dal tempo, che definisce il luogo geometrico dei punti appartenenti al contorno inferiore (diverso dal fondo del corpo idrico in questione). La componente della velocità normale a tale superficie è data dal prodotto scalare tra il vettore velocità e il gradiente della funzione implicita $F_a$. Matematicamente tale componente normale è data dalla seguente espressione

$$v_n = \vec{v}_a \cdot grad(F_a) \tag{11}$$

con segno positivo se rivolta nel verso concorde con gli assi coordinati. Assumendo che la superficie di contorno inferiore sia espressa da una funzione analitica $z = z_a(x, y)$, la funzione implicita che definisce il luogo geometrico di tale superficie si può scrivere nella forma

$$F_a = z - z_a(x, y) = 0 \tag{12}$$

Applicando alla (12) la relazione (11) si ottiene la condizione alla superficie di contorno inferiore nella seguente forma:

$$v_n = -u_a \frac{\partial z_a}{\partial x} - v_a \frac{\partial z_a}{\partial y} + w_a \tag{13}$$

**Condizione cinematica sulla superficie libera**

Sia $F_{\sup}(x, y, z, t) = 0$ la funzione implicita, dipendente dal tempo, che definisce il luogo geometrico dei punti appartenenti al contorno mobile (in questo caso la superficie libera del corpo idrico in questione). La condizione cinematica esprime l'impossibilità delle particelle di fluido (che rappresenta la fase solida) di attraversare la superficie libera durante il moto. Matematicamente, ciò equivale a imporre che il luogo dei punti dello spazio che in un dato istante "t" costituiscono la superficie libera cambi nel tempo in accordo con lo spostamento compiuto (in direzione normale alla superfice stessa) dalle particelle di fluido che all'istante "t" occupano la posizione della superficie libera. Tale condizione si traduce nell'imporre che la derivata sostanziale della funzione implicita che rappresenta la superficie libera sia nulla:

$$\frac{DF_{\sup}}{Dt} = 0 \tag{14}$$

Assumendo che la superficie libera sia espressa da una funzione analitica $z = h_{sup}(x, y, t)$, la funzione implicita che ne definisce il luogo geometrico si traduce nella forma

$$F_{\sup} = z - h_{\sup}(x, y, t) = 0$$

Applicando a quest'ultima la relazione (14), si ottiene la condizione alla superficie libera nella seguente forma:

$$-\frac{\partial h_{\sup}}{\partial t} - u_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial x} - v_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial y} + w_{\sup} = 0 \tag{15}$$

**Integrazione dell'equazione della concentrazione lungo la verticale**

A tal fine si applicano le regole di integrazione di Leibniz che per una generica funzione $f$ si scrivono:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f dz = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dz + f(b)\frac{\partial b}{\partial x} - f(a)\frac{\partial a}{\partial x} \tag{16}$$

Per maggiore semplicità, la procedura di integrazione lungo la verticale viene eseguita solo sul primo membro della Eq. (10), in cui si omettono i simboli di sopralineatura dovuti all'applicazione della media secondo Reynolds e si usa il simbolo $w$ per indicare la differenza $w - w_{sed}$

$$\int_{z_\alpha}^{h_s}\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z}\right) dz = 0 \tag{17}$$

Applicando le regole di integrazione di Leibniz si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_{\mathrm{a}}}^{h_{\sup}} C dz - C_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial t} + C_\alpha \frac{\partial z_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_{\mathrm{a}}}^{h_{\sup}} (uC) dz - u_{\sup}C_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial x} + u_a C_a \frac{\partial z_a}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_{\mathrm{a}}}^{h_{\sup}} (vC) dz - v_{\sup}C_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial y} + v_a C_a \frac{\partial z_{\mathrm{a}}}{\partial y} + w_{\sup}C_{\sup} - w_a C_a = 0 \tag{18}$$

Definendo per mezzo della seguente espressione $\bar{f} = \frac{1}{H}\int_{z_{\mathrm{a}}}^{h_{\sup}} f dz$ il valore mediato lungo la profondità per la generica funzione $f$ , dove $H = h_{\sup} - z_{\mathrm{a}}$ esprime la profondità della corrente interessata dalla presenza della fase solida in sospensione, l'equazione (18) diventa:

$$\frac{\partial(\bar{C}H)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{uC}H)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{vC}H)}{\partial y} + C_a\frac{\partial z_{\mathrm{a}}}{\partial t}$$
$$+C_a\left[u_a\frac{\partial z_{\mathrm{a}}}{\partial x} + v_a\frac{\partial z_{\mathrm{a}}}{\partial y} - w_a\right] + C_{\sup}\left(-\frac{\partial h_{\sup}}{\partial t} - u_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial x} - v_{\sup}\frac{\partial h_{\sup}}{\partial y} + w_{\sup}\right) = 0 \tag{19}$$

Il termine $\partial z_{\mathrm{a}}/\partial t$ è nullo, perché la quota $z_{\mathrm{a}}$ della superficie di contorno inferiore è costante nel tempo; il termine tra parentesi quadre è pari a $-v_n$, ossia alla componente della velocità normale alla superficie di contorno inferiore; mentre il termine tra parentesi tonde è nulla, per la condizione cinematica alla superficie libera. Di conseguenza l'equazione (19) diventa:

$$\frac{\partial(\bar{C}H)}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{uC}H)}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{vC}H)}{\partial y}=v_n C_a \tag{20}$$

Per ottenere termini convettivi espressi in funzione delle componenti della velocità mediata lungo la verticale, si introducono a primo membro della (20) i seguenti termini nulli

$$\frac{\partial}{\partial x}(H(\bar{u}\bar{C}-\bar{u}\bar{C}))+\frac{\partial}{\partial y}(H(\bar{v}\,\bar{C}-\bar{v}\,\bar{C})) \tag{21}$$

Con l'aggiunta di tali termini la (20) si scrive nella forma:

$$\frac{\partial\bar{C}H}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}\bar{C}H}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}\bar{C}H}{\partial y}=-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(H(\overline{uC}-\bar{u}\,\bar{C})\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H(\overline{vC}-\bar{v}\bar{C})\right)\right\}+v_n C_a \tag{22}$$

in cui i termini all'interno delle parentesi graffe a secondo membro rappresentano la divergenza di un vettore bidimensionale incognito. Per ottenere la chiusura del sistema di equazioni del moto, tale vettore incognito deve essere espresso, tramite una relazione di chiusura, in termini delle grandezze di evoluzione del sistema, $\bar{u},\bar{v},\bar{C},H$.

Il secondo membro della Eq. (10) contiene i termini incogniti legati alle fluttuazioni turbolente. L'integrazione lungo la verticale dei suddetti termini produce ulteriori termini incogniti che rappresentano l'effetto prodotto sulla concentrazione mediata lungo la verticale dalle fluttuazioni turbolente. La somma di tali termini incogniti e di quelli tra parentesi graffe a secondo membro della Eq. (22) viene rappresentato mediante la divergenza bidimensionale di un vettore che ha componenti solo nelle direzioni orizzontali, $div_2(\vec{V}_{ts})$, in cui $div_2=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Tale vettore bidimensionale $\vec{V}_{ts}$ viene assunto proporzionale al gradiente bidimensionale, $grad_2$, della concentrazione mediata lungo la profondità, $\vec{V}_{ts}=-\nu_t grad_2(\bar{C}H)$, in cui $\nu_t$ rappresenta un coefficiente di dispersione turbolenta che viene espresso, mediante una relazione di chiusura, in funzione delle velocità mediate lungo la profondità.

L'ultimo termine a secondo membro della (22) rappresenta il flusso netto di materiale solido che attraversa la superficie inferiore di contorno del dominio interessato dalla fase solida in sospensione. Tale flusso netto è dato dalla differenza tra due contributi espressi come $P$ e $D$, ossia $v_n C_a=P-D$.

La (22) assume quindi la forma:

$$\frac{\partial(\bar{C}H)}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{C}H)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}\,\bar{C}H)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{C}H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{C}H}{\partial y}\right)+P-D \tag{23}$$

Il primo contributo, $P$, è dato dal flusso di materiale solido diretto verso l'alto, prodotto dalla turbolenza, e rappresenta la capacità della corrente di aumentare la quantità di materiale solido presente nella colonna d'acqua sollevandolo dal letto del fiume.

Il secondo contributo, D, è dato dal flusso di materiale solido diretto verso il basso, dovuto al peso proprio delle particelle solide, e rappresenta la tendenza della materiale solido ad abbandonare la colonna d'acqua e precipitare sul letto del fiume.

Il flusso verso l'alto è dato dal termine $P = w_s C_R$, che rappresenta il prodotto tra il modulo della velocità di sedimentazione e la cosiddetta concentrazione di riferimento. La concentrazione di riferimento è la concentrazione che si avrebbe alla quota $z_a$ se si realizzasse nel corso d'acqua una condizione d'equilibro, ossia una condizione caratterizzata da valori costanti dei valori medi nel tempo delle velocità e dai valori medi nel tempo delle concentrazioni di solidi sospesi. Tale concentrazione è quindi quella che si avrebbe se la profondità e la velocità che si realizzano in un dato istante e in una data sezione del corso d'acqua permanessero nel tempo fino a realizzare una concentrazione costante.

Il flusso verso il basso di materiale solido è dato dal termine $D = w_s C_a$, che rappresenta il prodotto tra il modulo della velocità di sedimentazione e la effettiva concentrazione delle particelle che si realizza in un dato istante ed in un data sezione alla quota $z_a$.

**Concentrazione di riferimento**

La Concentrazione di riferimento può essere calcolata tramite una formala empirica. Una delle formule empiriche utilizzate in letteratura nel contesto del trasporto solido fluviale è quella di Van Rijn (1984)

$$C_R = 0.015\,\frac{d_{50}(\theta-\theta_{cr})^{1,5}}{a\left(d_{50}^*\right)^{0.3}}\text{ , con } d_{50}^* \text{ pari al diametro adimensionale } d_{50}^* = d_{50}\left(\frac{\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)g}{\nu^2}\right)^{1/3} \qquad (24)$$

in cui $\rho_s$ è la densità delle particelle solide, $\rho$ e $\nu$ sono, rispettivamente, la densità e la viscosità dinamica dell'acqua, $\theta$ è il parametro adimensionale di mobilità di Shields ovvero lo sforzo di taglio istantaneo al fondo posto in forma adimensionale e $\theta_{cr}$ il parametro di stabilità di Shields ovvero lo sforzo di taglio critico o di incipiente movimento, anch'esso posto in forma adimensionale. Il valore di soglia $\vartheta_{cr}$ esprime, per il singolo grano al fondo in condizioni di moto stazionarie, una condizione di perfetto equilibrio dinamico tra forze di sedimentazione e forze di risollevamento. La curva di Shields che individua la fascia di separazione tra la zona di mobilità del

sedimento (al di sopra della curva) e la zona di stabilità (al di sotto della curva), ricavata sperimentalmente per materiali incoerenti di diverse densità ma con granulometria uniforme nel range delle sabbie e forma pseudosferica, è quella proposta da 'Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport' ; Leo, Van Rijn (1984), e viene espressa come segue

per: $d_{50}^* \leq 4$ : $\vartheta_{cr} = 0{,}24 {d_{50}^*}^{-1}$

per: $4 \leq d_{50}^* \leq 10$ : $\vartheta_{cr} = 0{,}14 {d_{50}^*}^{-0{,}64}$

per: $10 \leq d_{50}^* \leq 20$ : $\vartheta_{cr} = 0{,}14 {d_{50}^*}^{-0{,}10}$

per: $20 \leq d_{50}^* \leq 150$ : $\vartheta_{cr} = 0{,}14 {d_{50}^*}^{-0{,}29}$

per: $d_{50}^* > 150$ : $\vartheta_{cr} = 0{,}055$

ricordando che lo sforzo di attrito al fondo esercitato dal fluido si indica con $\tau_0$ (o in termini della velocità di attrito, $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ ), il parametro di mobilità di Shields $\theta$ è una grandezza adimensionale ottenuta dividendo lo sforzo di attrito al fondo esercitato dal fluido per la grandezza $(\gamma_s - \gamma)d_{50}$, che ha dimensioni di uno sforzo (in cui $\gamma = \rho g$ è il peso specifico del fluido e $\gamma_s$ quello delle particelle solide), mediante una delle seguenti espressioni

$$\theta = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma)d_{50}} = \frac{{u_*}^2 \rho}{(\rho_s - \rho) g d_{50}} = \frac{{u_*}^2}{(s-1) g d_{50}} \tag{25}$$

Conseguentemente, $C_R$ è funzione delle caratteristiche delle particelle solide e della velocità di attrito al fondo prodotta dal moto.

**Velocità di attrito al fondo secondo la teoria dello strato limite turbolento**

La velocità di attrito al fondo, $u_*$, è ricavata ipotizzando che, ad ogni istante, il profilo di velocità all'interno dello strato limite turbolento sia di tipo logaritmico, ossia approssimabile mediante una funzione analitica del tipo

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\mathrm{K}} \ln\left(\frac{z}{k_s/30}\right) \tag{26}$$

ove: $U = U(z,t)$ è il modulo istantaneo del vettore velocità orizzontale $\boldsymbol{u} = (u, v) = [u(\boldsymbol{x}, t), v(\boldsymbol{x}, t)\,]$ nel punto di coordinate $\boldsymbol{x} = (x, y)$ , alla generica quota $z$ interna allo strato limite turbolento (calcolata a partire dal fondo), K la costante di Von Karman (pari a 0,4) e $k_s$ la rugosità del fondo (pari a $2{,}5 d_{50}$ in accordo con Andersen, Silberg (1985); che rimanda a Fredsoe (1976)).

**Concentrazione effettiva**

Il valore di concentrazione effettiva $C_a$ che compare nella (23) dipende dal modo in cui la concentrazione di materiale solido sospeso si distribuisce lungo la colonna d'acqua; tale distribuzione a sua volta è funzione dell'intensità della turbolenza che si realizza nella colonna d'acqua. In condizioni di moto turbolento la rappresentazione delle variazioni della concentrazione di solidi sospesi può essere ottenuta mediante l'equazione tridimensionale della concentrazione mediata secondo Reynolds. Sotto opportune ipotesi semplificative (ed omettendo il simbolo di sopralineatura per indicare le grandezze mediate alla Reynolds), la suddetta equazione della concentrazione si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial Cu}{\partial x}+\frac{\partial Cv}{\partial z}+\frac{\partial[C(w-w_{sed})]}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial C}{\partial z}\right) \tag{27}$$

in cui $\nu_t$ è il coefficiente di viscosità turbolenta e $w_{sed}$ è il modulo della velocità di sedimentazione dei solidi sospesi in acqua ferma. In condizioni di moto turbolento statisticamente stazionario, in cui sono trascurabili sia le variazioni orizzontali delle concentrazioni e delle velocità mediate alla Reynolds sia la componente verticale della velocità della fase fluida mediata alla Reynolds, la equazione (27) si riduce alla seguente forma

$$-\frac{\partial Cw_{sed}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

che integrata lungo la direzione verticale tra la generica quota z e la quota della superficie (dove $C$ e $\nu_t\frac{\partial C}{\partial z}$ possono essere considerati nulli) si scrive

$$-\int_z^{z_s}\left(\frac{\partial Cw_{sed}}{\partial z}\right)dz=\int_z^{z_s}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right)dz=-\left[Cw_{sed}\right]_z=\left[\nu_t\frac{\partial C}{\partial z}\right]_z \tag{28}$$

L'equazione (28) esprime il fatto che, in condizioni statisticamente stazionarie, ad una generica quota z, il flusso di sedimenti verso il basso, dovuto al peso delle particelle e rappresentato dal termine a primo membro, è bilanciato dal flusso di sedimenti verso l'alto, dovuto alla turbolenza e rappresentato dal termine a secondo membro. L'integrazione lungo la profondità della (28) fornisce, nota la distribuzione lungo la colonna d'acqua della viscosità turbolenta $\nu_t=\nu_t(z)$, la corrispondente distribuzione della concentrazione $C(z)$.

**Distribuzione verticale della concentrazione nell'ipotesi di viscosità turbolenta uniforme**

Nell'ipotesi di viscosità turbolenta uniforme lungo la verticale ($\nu_t=cost$), l'integrazione lungo la profondità della (28)

$$-Cw_{sed} = \nu_t \frac{dC}{dz} \tag{29}$$

risulta molto semplice

$$-\frac{w_{sed}}{\nu_t} dz = \frac{1}{C} dC$$

$$-\int_a^z \frac{w_{sed}}{\nu_t} dz = \int_{C_a}^{C(z)} \frac{1}{C} dC$$

$$-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(z-a) = \ln \frac{C(z)}{C_a}$$

$$C(z) = C_a\, e^{-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(z-a)} \tag{30}$$

essendo $a$ la quota $z$, in corrispondenza della quale è noto il valore di concentrazione ($C_a$ ) , che può essere assunta pari a $2d_{50}$. Inoltre se si tiene conto che il valor di $\bar{C}$ può essere espresso come

$$\bar{C} = \frac{1}{h_{\sup}-a} \int_a^{h_{\sup}} C(z)\, dz \tag{31}$$

in cui $h_{\sup} - a$ può essere approssimato mediante la profondità $H$, e la dipendenza della concentrazione rispetto a può essere espresso attraverso la variabile $f_a(z)$ definita di seguito

$$f_a(z) = e^{-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(z-a)} \tag{32}$$

l'integrale a secondo membro della (31) può essere risolto analiticamente, ottenendo la seguente espressione che lega $\bar{C}$ a $C_a$

$$\bar{C} = \frac{1}{H} \int_a^{h_{\sup}} [C_a f_a(z)]\, dz =$$

$$= \frac{C_a}{H} \int_a^{h_{\sup}} e^{-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(z-a)}\, dz =$$

$$= \frac{C_a}{H} \left[ e^{-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(z-a)} \left( -\frac{\nu_t}{w_{sed}} \right) \right]_a^{h_{\sup}} =$$

$$= \frac{C_a}{H} \left( \frac{\nu_t}{w_{sed}} \right) \left[ 1 - e^{-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(h_{\sup}-a)} \right] \tag{33}$$

Definito quindi il parametro $\beta_d$ , rappresentativo dei livelli di viscosità turbolenza che si realizzano nella colonna d'acqua, come:

$$\beta_d = \frac{\nu_t}{H w_{sed}} \left[ 1 - e^{-\frac{w_{sed}}{\nu_t}(h_{\sup} - a)} \right] \tag{34}$$

la concentrazione effettiva alla quota $a$, nel caso di viscosità turbolenta uniforme lungo la verticale, è funzione diretta del valore della concentrazione media lungo la verticale nel generico punto del dominio di calcolo

$$C_a = \frac{\bar{C}}{\beta_d} \tag{35}$$

La Eq. (35) può essere usata anche nel caso più generale, in cui una distribuzione non uniforme del coefficiente di viscosità turbolenta non consente di calcolare analiticamente né l'integrale lungo la verticale della distribuzione della concentrazione né il termine $\beta_d$. In questo caso sia la distribuzione della concentrazione lungo la verticale sia il termine $\beta_d$ possono essere approssimati mediante una procedura numerica.

**Distribuzione verticale della concentrazione nell'ipotesi di distribuzione parabolica del coefficiente di viscosità turbolenta**

Un caso semplice di distribuzione non uniforme del coefficiente di viscosità turbolenta $\nu_t$ (che consente una espressione analitica per la distribuzione della concentrazione lungo la verticale) è quello in cui si assume una distribuzione parabolica di $\nu_t$ lungo la verticale, con valore nullo al fondo ($z = 0$) e a quota $z = \beta$

$$\nu_t(z) = a_p z^2 + b_p z = b_p z\left(1 - \frac{z}{-(b_p/a_p)}\right) = \omega z\left(1 - \frac{z}{\beta}\right) \tag{36}$$

in cui $a_p$ e $b_p$ sono coefficienti noti e quindi anche $\omega = b_p$ e $\beta = -(b_p/a_p)$. Con tale distribuzione analitica della viscosità turbolenta, la (28) può essere integrata lungo la profondità nel seguente modo

$$-\int_a^z \frac{w_{sed}}{\nu_t(z)} dz = \int_{C_a}^C \frac{1}{C} dC$$

$$-\frac{w_{sed}}{\omega}\int_a^z \frac{1}{z\left(1 - \frac{z}{\beta}\right)} dz = \int_{C_a}^C \frac{1}{C} dC$$

$$\frac{w_{sed}\beta}{\omega}\int_a^z \frac{1}{z(z-\beta)} dz = \int_{C_a}^C \frac{1}{C} dC$$

$$\frac{w_{sed}\beta}{\omega}\left[\int_a^z \frac{A}{z} dz + \int_a^z \frac{B}{(z-\beta)} dz\right] = \int_{C_a}^C \frac{1}{C} dC \tag{37}$$

in cui, nell'ultimo passaggio, sono state definite due costanti $A$ e $B$ tali che

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(z-\beta) + Bz = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottengono i valori delle due costanti

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{\beta} \\ B = \frac{1}{\beta} \end{cases} \tag{38}$$

Sostituendo la (38) nella (37), si risolvono facilmente i due integrali risultanti

$$\frac{w_{sed}}{\omega}\left[-\int_a^z \frac{1}{z}dz + \int_a^z \frac{1}{(z-\beta)}dz\right] = \int_{C_a}^{C} \frac{1}{C}dC$$

$$\frac{w_{sed}}{\omega}\{-[\ln z]_a^z + [\ln(z-\beta)]_a^z\} = [\ln C]_{C_a}^{C}$$

$$\left(\frac{z-\beta}{z}\cdot\frac{a}{a-\beta}\right)^{\frac{w_{sed}}{\omega}} = \frac{C}{C_a}$$

Se all'interno della parentesi tonda moltiplico per -1 sia il numeratore che il denominatore, ottengo la seguente espressione

$$C(z) = C_a\left(\frac{\beta-z}{z}\cdot\frac{a}{\beta-a}\right)^{\frac{w_{sed}}{\omega}}$$

che consente di calcolare la concentrazione $C(z)$ ad una quota z rispetto al fondo, nota la legge parabolica (28) con cui viene rappresentata la viscosità turbolenta $\nu_t(z)$. Se nella legge parabolica per il coefficiente di viscosità turbolenta $\nu_t(z) = \omega z\left(1-\frac{z}{\beta}\right)$ si assumono $\alpha = Ku_*$ (con $K$ costante di Von Karman e $u_*$ velocità d'attrito al fondo) e $\beta = h_{\sup}$ (quota della superficie libera rispetto al fondo), la espressione finale per la distribuzione lungo la verticale della concentrazione diventa la equazione di Rouse

$$C(z) = C_a\left(\frac{h_{\sup}-z}{z}\cdot\frac{a}{h_{\sup}-a}\right)^{\frac{w_{sed}}{Ku_*}} \tag{39}$$

**Boundary layer**

Nello strato turbolento in prossimità di una parete rigida, l'equazione del moto turbolento viene scritta in forma semplificata, trascurando tutti i termini ad eccezione dei seguenti componenti degli sforzi turbolenti e viscosi

$$-\frac{\partial(\widetilde{u'w'})}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)=0 \tag{40}$$

Integrando lungo $z$ tra la parete (dove gli sforzi turbolenti sono nulli) e una quota all'interno dello strato turbolento (dove gli sforzi viscosi sono trascurabili), si ottiene

$$-\left(\widetilde{u'w'}\right)_z-\left(\nu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)_0=0 \tag{41}$$

Esprimendo lo sforzo turbolento mediante una relazione di chiusura $-\left(\widetilde{u'w'}\right)=\nu_t\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}$ e lo sforzo viscoso in termini dello sforzo d'attrito al fondo, $\left(\nu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)_0=\frac{\tau_0}{\rho}$ (in cui lo sforzo d'attrito al fondo $\tau_0$ è esprimibile in termini di velocità d'attrito, $u_*$), la Eq. (41) si scrive

$$\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\tau_0}{\rho}=(u_*)^2 \quad \text{(in cui viene omessa la sopralineatura)} \tag{42}$$

Nel suddetto strato limite il coefficiente di viscosità turbolenta è rappresentato per mezzo della relazione di chiusura proposta da Prandt, $\nu_t=l^2\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ , in cui la lunghezza di mescolamento $l$ è espressa nella forma $l=Kz$ (in cui $K$ è la costante di Von Karman e $z$ è la distanza dalla parete). La Eq. (42) diventa

$$K^2z^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=(u_*)^2 \text{ , che si scrive } \qquad Kz\frac{\partial u}{\partial z}=u_* \tag{43}$$

Dal momento che nella Eq. (43), la $u$ dipende solo da $z$, la Eq. 43 si scrive

$$Kz\frac{du}{dz}=u_* \tag{44}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{du}{u_*}=\frac{1}{K}\frac{dz}{z} \tag{45}$$

Integrando la Eq. (45) si ottiene

$$\frac{u(z)}{u_*}=\frac{1}{\mathrm{K}}\ln(z)+\mathrm{C} \tag{46}$$

Tale legge logaritmica, valida nello strato limite turbolento, assume forma diversa in base al regime idraulico a cui è applicata.

Il flusso turbolento in prossimità di un contorno solido ha tre regioni: sottostrato laminare, zona di transizione e zona completamente turbolenta. Nello strato laminare, il numero di Reynolds $\frac{uz}{\nu}$ (in cui $u$ è la velocità a distanza $z$ dal contorno) è basso e il flusso è laminare. All'interno di tale strato

si può assumere che la velocità vari linearmente con $z$ e quindi che lo sforzo di resistenza $\tau_0$ all'interno dello strato sia costante

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dz}; \text{ oppure } u = \frac{\tau_0 z}{\mu} \tag{46}$$

In cui $\mu$ è la viscosità dell'acqua. All'estremo superiore dello strato laminare $z = \delta$ (in cui $\delta$ è lo spessore dello strato laminare), la Eq. (46) fornisce una velocità $u_\delta = \frac{\tau_0 \delta}{\mu}$. Da misure sperimentali si è riscontrato che il punto a cui corrisponde la fine dello strato laminare e l'inizio della zona di transizione è caratterizzato da un numero di Reynolds di parete $\frac{u_* z}{\nu} = 11.6$, in cui $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ è la velocità d'attrito. Quindi lo spessore dello strato laminare è

$$z = 11.6 \frac{\nu}{u_*}, \text{ che viene anche espresso nella forma } z/\left(\frac{\nu}{u_*}\right) = z^+ = 11.6 \tag{47}$$

in cui $\frac{\nu}{u_*}$, che ha le dimensioni di una lunghezza, viene utilizzata per adimensionalizzare la distanza dalla parete, in modo da calcolare la suddetta distanza in unità adimensionali dette "unità parete" $z^+ = z/\left(\frac{\nu}{u_*}\right)$.

Su superfici scabre, lo strato laminare può essere disturbato dalle particelle che costituiscono la scabrezza della parete, che possono protrudere all'interno dello strato turbolento. La dimensione delle particelle che costituiscono la scabrezza è utilizzata per classificare la superficie della parete mediante tre possibili regimi: regime idraulicamente liscio, regime di transizione e regime idraulicamente scabro. Da misure sperimentali si è determinato che per il regime idraulicamente liscio vale la seguente relazione

$$\frac{k_s u_*}{\nu} < 5 \text{ oppure } k_s < 5 \frac{\nu}{u_*} \text{ che equivale a } k_s < 5\, z^+ \tag{48}$$

In cui $k_s$ è il diametro medio dei grani di sabbia utilizzati da Nikuradse e viene definita "scabrezza della sabbia di Nikuradse". All'interno del suddetto regime, le particelle della scabrezza sono così piccole da essere contenute all'interno dello strato laminare. Conseguentemente, lo sforzo turbolento di resistenza al moto e il profilo di velocità nello strato turbolento sono indipendenti dalla scabrezza.

Per il regime di transizione, il numero $\frac{k_s u_*}{\nu}$ è compreso tra 5 e 70. Le particelle della scabrezza in parte protrudono oltre lo strato laminare e influenzano il moto turbolento. Tale protrusione produce ulteriore resistenza al moto.

Per il regime idraulicamente scabro, il numero $\frac{k_s u_*}{\nu}$ è superiore a 70. Le particelle della scabrezza protrudono all'interno dello strato completamente turbolento producendo una significativa resistenza al moto. La resistenza al moto turbolento, e quindi il profilo di velocità nello strato turbolento, sono fortemente dipendenti dalla scabrezza.

**Profilo di velocità per flusso turbolento nel caso di regime idraulicamente liscio**

Come detto precedentemente, nella regione prossima alla parete rigida, vale la seguente legge logaritmica per la componente parallela alla parete della velocità mediata alla Reynolds

$$\frac{u(z)}{u_*} = \frac{1}{\mathrm{K}}\ln(z) + \mathrm{C} \tag{49}$$

in cui la costante K di Van Karman vale 0.4. Nel caso di regime idraulicamente liscio, la costante di integrazione C si calcola considerando che, a seguito di misure sperimentali, si è riscontrato che l'estremo superiore dello strato viscoso è posto a tra $z = \delta = 11.6\frac{\nu}{u_*}$ , dove la velocità varia ancora linearmente e vale $\frac{\tau_0 \delta}{\mu}$.

Sostituendo nella Eq. (49) si ottiene

$$\frac{\tau_0 \delta}{\mu u_*} - 2.5\ln\left(11.6\frac{\nu}{u_*}\right) = \mathrm{C} \tag{50}$$

Sostituendo $\delta = 11.6\frac{\nu}{u_*}$ nel primo termine, considerando che $\tau_0 = \rho {u_*}^2$ e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene

$$\frac{{u_*}^2\, 11.6\nu}{\nu {u_*}^2} - 2.5\ln(11.6) - 2.5\ln\left(\frac{\nu}{u_*}\right) = \mathrm{C} \tag{51}$$

$$11.6 - 2.5\ln(11.6) - 2.5\ln\left(\frac{\nu}{u_*}\right) = \mathrm{C} \tag{51}$$

$$\mathrm{C} = 11.6 - 2.5\ln(11.6) - 2.5\ln\left(\frac{\nu}{u_*}\right) = 5{,}5 - 2.5\ln\left(\frac{\nu}{u_*}\right) \tag{52}$$

Sostituendo l'espressione di C nella Eq.(49) si ottiene la legge logaritmica per il moto turbolento nella regione prossima alla parete, nel caso di regime idraulicamente liscio

$$\frac{u(z)}{u_*} = 2.5\ln\left(\frac{z u_*}{\nu}\right) + 5{,}5 \tag{53}$$

che, per la definizione di unità parete, $z^+ = z\frac{u_*}{\nu}$, si scrive anche nella forma

$$\frac{u(z)}{u_*} = 2.5\ln(z^+) + 5{,}5 \tag{54}$$

**Profilo di velocità per flusso turbolento nel caso di regime idraulicamente scabro**

Nel caso di regime idraulicamente scabro, la costante di integrazione si calcola considerando che, a seguito di misure sperimentali, si è riscontrato che alla distanza dalla parete pari a $k_s$ il valore $\frac{u(k_s)}{u_*}$ vale 8.5. Quindi, applicando la Eq. (49) alla quota $k_s$, dove $\frac{u(k_s)}{u_*} = 8.5$, si ottiene

$$\frac{u(k_s)}{u_*} - 2.5\ln(k_s) = \mathrm{C} \tag{55}$$

da cui,

$$\mathrm{C} = \frac{u(k_s)}{u_*} - 2.5\ln(k_s) = 8.5 - 2.5\ln(k_s) \tag{56}$$

Sostituendo l'espressione per C nella Eq. (49) e utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene la legge logaritmica per il moto turbolento nella regione prossima alla parete, nel caso di regime idraulicamente scabro

$$\frac{u(z)}{u_*} = 2.5\ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + 8{,}5 \tag{57}$$

che, inglobando la costante nel logaritmo, si scrive anche nella forma

$$\frac{u(z)}{u_*} = 2.5\ln\left(\frac{z}{k_s/30}\right) \tag{58}$$

**Andamento parabolico del coefficiente di viscosità turbolenta**

La distribuzione parabolica lungo la verticale della viscosità turbolenta utilizzato nella Eq. di Rouse può essere ricavata analiticamente ipotizzando un andamento lineare lungo la verticale dello sforzo tangenziale in condizioni di moto turbolento. Si ipotizza che lo sforzo d'attrito turbolento sia nullo in corrispondenza della superficie libera e che al fondo coincida con lo sforzo di parete $\tau_0$, ovvero che abbia la seguente distribuzione lineare

$$\rho \nu_t \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{h_{\mathrm{sup}}}\right) \tag{60}$$

Come risulta dalla teoria dello strato limite (Eq. (44)), la velocità di attrito al fondo $u_*$ si lega allo derivata della velocità rispetto alla distanza dalla parete come segue

$$Kz \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = u_* \tag{61}$$

Sostituendo a primo membro della Eq. (60) l'espressione $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = \frac{u_*}{Kz}$ ricavata dalla Eq. (61) e sostituendo a secondo membro la espressione $\tau_0 = {u_*}^2 \rho$, la Eq. (60) fornisce la seguente distribuzione parabolica del coefficiente di viscosità turbolenta

$$\rho \nu_t \frac{u_f}{zK} = {u_*}^2 \rho \left(1 - \frac{z}{h_{\mathrm{sup}}}\right)$$ che si scrive anche

$$\nu_t(z) = K u_* z \left(1 - \frac{z}{h_{\mathrm{sup}}}\right) \tag{62}$$

Tale andamento parabolico è quello utilizzato nella Eq. di Rouse mostrata sopra (Eq. 39).

**Equazione di aggiornamento delle quote del fondo**

In condizioni di stazionarietà, la derivata temporale del prodotto tra la concentrazione mediata lungo la verticale e la profondità che compare a primo membro dell'equazione (23) si annulla; conseguentemente, nella Eq. (23) la somma dei tassi di variazione (nelle due direzioni spaziali) dei flussi orizzontali di sedimenti in sospensione risulta pari al termine $(P - D)$. Tale differenza, cambiata di segno, può essere utilizzata per calcolare il tasso di variazione nel tempo della quota del fondo (nota la quota del fondo $z_f$ e la porosità dei sedimenti $p$):

$$\frac{\partial z_f}{\partial t} = -\frac{1}{1-p}(P - D) \tag{63}$$