EQUAZIONI GENERALI DI UN FLUSSO BIFASE

La simulazione delle correnti di torbidità in un invaso artificiale implica l'integrazione numerica delle equazioni di bilancio della quantità di moto e di conservazione della massa di un *flusso bifase completamente accoppiato* nel quale esiste interazione tra le fasi. Nella rappresentazione del fenomeno fisico intervengono delle ipotesi semplificative:

- equilibrio termo-dinamico tra le fasi;
- la fase solida è considerata come un fluido omogeneo quindi per essa vale il principio di conservazione della massa e bilancio della quantità di moto;
- le particelle solide hanno forma sferica con diametro "d" e densità costante $\tilde{\rho}_s$.

Stanti queste ipotesi, l'interazione tra le due fasi è definita dalle espressioni delle forze di accoppiamento, essenzialmente viscose, presenti nelle equazioni di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto.

1. Formulazione delle equazioni

Per la fase liquida si ha che:

- $\tilde{\rho}_f$ la densità microscopica della fase fluida;
- ρ_f la densità macroscopica della fase fluida;
- $a_f = \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}_f}$ la frazione di volume della fase fluida;
- u^l per $l = 1,2,3$ il vettore delle velocità

Per la fase solida si indica con:

- $\tilde{\rho}_s$ la densità microscopica della fase solida ovvero la densità della singola particella;
- ρ_s la densità macroscopica della fase solida ovvero la massa dell'insieme delle particelle contenute nel volume unitario della sospensione;
- $a_s = \frac{\rho_s}{\tilde{\rho}_s}$ la frazione di volume della fase solida.

Le equazioni di partenza di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto per entrambe le fasi sono:

L'equazione di conservazione della massa *liquida:*

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_f a_f}{\partial t} + \left[\tilde{\rho}_f a_f u^l\right]_{,l} = 0$$

Essendo:

$$a_f + a_s = 1$$

$$1 - a_s = a_f$$

si ha quindi:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_f (1 - a_s)}{\partial t} + [\tilde{\rho}_f (1 - a_s) u^l]_{,l} = 0$$

che sviluppata:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_f (1 - a_s)}{\partial t} + \tilde{\rho}_f \left(\frac{\partial u (1 - a_s)}{\partial x} + \frac{\partial v (1 - a_s)}{\partial y} + \frac{\partial w (1 - a_s)}{\partial z} \right) = 0$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto della fase *liquida* è:

$$\tilde{\rho}_f \frac{\partial (1 - a_s) u^l}{\partial t} + \tilde{\rho}_f [(1 - a_s) u^l u^m]_{,m} = \tilde{\rho}_f (1 - a_s) f^l - T^{lm}_{,m} - F^l_P$$

essendo:

$$f^l = -gz_{,l}$$

le componenti lungo i tre assi cartesiani (x,y,z) sono:

$$\tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)u}{\partial t} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)uu}{\partial x} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)uv}{\partial y} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)uw}{\partial z}$$
$$= -\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right) - F_P^x$$

$$\tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)v}{\partial t} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)vu}{\partial x} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)vv}{\partial y} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)vw}{\partial z}$$
$$= -\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right) - F_P^y$$

$$\tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)w}{\partial t} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)wu}{\partial x} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)wv}{\partial y} + \tilde{\rho}_f \frac{\partial(1-a_s)ww}{\partial z}$$
$$= -\tilde{\rho}_f(1-a_s)g - \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right) - F_P^z$$

Per la fase ***solida***, l'equazione di conservazione della massa è:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_s a_s}{\partial t} + [\tilde{\rho}_s a_s u_s^l]_{,l} = 0$$

che sviluppata diventa:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_s a_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s w_s}{\partial z}\right) = 0$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto è:

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s u_s^l}{\partial t} + \tilde{\rho}_s [a_s u_s^l u_s^m]_{,m} = \tilde{\rho}_s a_s f^l - T_{s,m}^{lm} + F_P^l$$

essendo:

$$f^l = -g z_{,l}$$

le componenti lungo i tre assi cartesiani (x,y,z) sono:

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s u_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s u_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s u_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s u_s w_s}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial T_{Sxx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{Sxy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{Sxz}}{\partial z} \right) + F_P^x$$

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s v_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s v_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s v_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s v_s w_s}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial T_{Syx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{Syy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{Syz}}{\partial z} \right) + F_P^y$$

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s w_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s w_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s w_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s w_s w_s}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial T_{Szx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{Szy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{Szz}}{\partial z} \right) - a_s \tilde{\rho}_s g + F_P^z$$

ove:

- F_P^l è la forza viscosa di contatto tra la fase liquida e la fase solida, ed è data da:

$$F_P^l = a_s \frac{18\mu}{d^2} (u^l - u_s^l) - a_s p_{,l}$$

espressione in cui μ rappresenta il coefficiente di viscosità dinamica della fase fluida, il primo termine a secondo membro rappresenta la resistenza viscosa espressa secondo la *legge di Stokes,* mentre il secondo membro rappresenta il gradiente di pressione del fluido che circonda la particella e che è causato dall'accelerazione del fluido stesso.

- p è la pressione del fluido
- T_s^{lm} è un tensore che tiene conto degli effetti delle interazioni tra due o più particelle:

$$T_s^{lm} = \begin{bmatrix} T_s^{xx} & T_s^{xy} & T_s^{xz} \\ T_s^{yx} & T_s^{yy} & T_s^{yz} \\ T_s^{zx} & T_s^{zy} & T_s^{zz} \end{bmatrix}$$

Quindi i due sistemi di equazioni risultano accoppiati tra loro sia a causa delle forze viscose F_p tra fluido e particelle solide, sia a causa della frazione di volume solida a_s.

2. Equazioni semplificate del flusso bifase

Al fine di rendere più agevole l'integrazione delle equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto, vengono formulate ulteriori ipotesi circa la natura della sospensione in esame.

Nel caso di sospensione diluita può aggiungersi la ulteriore ipotesi semplificativa relazionata al fatto che la frazione di volume solido a_s può essere trascurata nell'equazione di continuità, ed in quella di bilancio della quantità di moto, con l'eccezione della componente sulle forze di massa, che riguardano la fase liquida. Quindi la fase liquida è influenzata dalla fase solida solo per quanto riguarda le forze di massa.

Si ammette che la sospensione sia diluita ossia che:

$$a_s \ll 1$$

e poiché tra a_s ed a_f sussiste la relazione:

$$a_f + a_s = 1$$

<u>*solo nell'equazione del moto della fase liquida*</u> si pone:

$$1 - a_s \cong 1$$

quindi:

$$a_f = 1$$

essendo dunque:

$$a_f = \frac{\rho_f}{\tilde{\rho}_f}$$

Si pone per semplicità l'espressione:

$$\tilde{\rho}_f = \rho$$

Il tensore T_s^{lm} (tensore di Cauchy) inversamente proporzionale al rapporto tra la distanza tra le particelle e il loro diametro, quando le particelle sono distanti tra loro di almeno un diametro (soluzione diluita), può essere trascurato (ovviamente solo per la fase solida, perché le particelle fluide continuano ad interagire tra di loro).

Nelle equazioni del moto della <u>*fase solida*</u>, nel caso di sospensione diluita, possono essere trascurati i termini viscosi e quelli di pressione.

Applicando queste semplificazioni si ha che, per la fase fluida, l'equazione di continuità assume la forma:

$$u^l_{,l} = 0$$

che sviluppata:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto è:

$$\rho\frac{\partial u^l}{\partial t}+\rho u^l u^m_{,m}=\rho(1-a_s)f^l-T^{lm}_{,m}-F^l_p$$

in cui, essendo le forze di massa pari a:

$$f^l=-gz_{,l}$$

le componenti sui tre assi assumono la forma:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\frac{\partial uu}{\partial x}+\rho\frac{\partial uv}{\partial y}+\rho\frac{\partial uw}{\partial z}=-\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)-F^x_P$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\frac{\partial vu}{\partial x}+\rho\frac{\partial vv}{\partial y}+\rho\frac{\partial vw}{\partial z}=-\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right)-F^y_P$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho\frac{\partial wu}{\partial x}+\rho\frac{\partial wv}{\partial y}+\rho\frac{\partial ww}{\partial z}=-\rho(1-a_s)g-\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)-F^z_P$$

Per la fase solida l'equazione di continuità assume la forma seguente:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_s a_s}{\partial t} + [\tilde{\rho}_s a_s u_s^l]_{,l} = 0$$

che sviluppata diventa:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_s a_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s w_s}{\partial z} \right) = 0$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto è:

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s u_s^l}{\partial t} + \tilde{\rho}_s [a_s u_s^l u_s^m]_{,m} = \tilde{\rho}_s a_s f^l - F_P^l$$

essendo:

$$f^l = -g z_{,l}$$

le componenti lungo i tre assi cartesiani (x,y,z) sono:

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s u_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s u_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s u_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s u_s w_s}{\partial z} \right) = +F_P^x$$

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s v_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s v_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s v_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s v_s w_s}{\partial z} \right) = +F_P^y$$

$$\tilde{\rho}_s \frac{\partial a_s w_s}{\partial t} + \tilde{\rho}_s \left(\frac{\partial a_s w_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial a_s w_s v_s}{\partial y} + \frac{\partial a_s w_s w_s}{\partial z} \right) = -a_s \tilde{\rho}_s g + F_P^z$$

Per valutare il diverso livello di accoppiamento tra i due diversi gruppi di equazioni, si introducono:

- il fattore di carico $\beta = \frac{\tilde{\rho}_s}{\tilde{\rho}_f}$;
- il numero di Stokes $Sk = \frac{\tau_p}{\tau_f}$;

  in cui τ_p è il *tempo di rilassamento* cioè il tempo che la particella solida impiega ad assumere la velocità del fluido e τ_f è il *tempo caratteristico della fase fluida*. Il primo può essere espresso come:

$$\tau_p = \frac{\tilde{\rho}_s d^2}{18\mu f_d}$$

  con $f_d = 1 + \frac{1}{6} Re_p^{2/3}$ coefficiente di resistenza, funzione del numero di Reynolds della particella $Re_p = \frac{\rho d|\vec{v}-\vec{v_s}|}{\mu}$, con μ coefficiente di viscosità dinamica della fase fluida.

  Il valore del numero di Stokes indica quanto rapidamente la particella è capace di seguire le variazioni di velocità del fluido. Il tempo caratteristico del flusso fluido è dato da:

$$\tau_f = \frac{L}{U}$$

  in cui L ed U sono rispettivamente la lunghezza e la velocità caratteristica del campo della fase fluida.

Per $Sk < 10^{-1}$ non c'è grande differenza tra la velocità della particella solida e la velocità della particella liquida, ossia che la fase solida abbia come velocità quella che gli è impressa dalla fase fluida.

Per $Sk > 10^{-1}$ vi è differenza tra le velocità, non vi è equilibrio tra le fasi, vi è forte accoppiamento ossia, è forte la capacità della fase solida di modificare la velocità della fase fluida.

Il fattore di carico β amplifica gli effetti del numero di Stokes sulle equazioni della quantità di moto, aumentando l'accoppiamento del fluido con la particella. Si ha quindi che:

- per piccoli valori di β, la fase fluida è indipendente da quella solida ma non viceversa, quindi esiste accoppiamento univoco tra le fasi. In questa condizione,
    1. quando $Sk < 10^{-1}$ la fase fluida è poco lontana dall'equilibrio e questo permette di assumere che il campo di velocità del solido si sovrappone a quello del fluido;
    2. quando $Sk > 10^{-1}$ la fase fluida è lontana dall'equilibrio e questo induce un incremento del tempo di rilassamento tra le due fasi.
- per grandi valori di β l'accoppiamento risulta biunivoco, quindi le equazioni delle due fasi devono essere risolte simultaneamente in quanto gli effetti della fase solida sulla fase liquida non possono più essere trascurati.

3 Equazioni di un flusso bifase accoppiato linearizzato

Nel caso delle correnti di torbidità, i piccoli valori del numero di Stokes ($Sk < 10^{-1}$), danno la possibilità di considerare che le particelle solide siano in equilibrio con quelle liquide mentre i grandi valori di β indicano che gli effetti delle particelle solide su quelle liquide non possono essere trascurati. Si può quindi introdurre l'ipotesi di *linearizzazione:* il campo di velocità della fase solida può essere ottenuto sovrapponendo il campo di velocità della fase fluida e la velocità di sedimentazione delle particelle solide mentre la frazione di volume del solido è calcolabile risolvendo l'equazione della concentrazione. Si definisce quindi w_{sed} come velocità di sedimentazione delle particelle solide in un fluido in quiete ed si indica con $\overrightarrow{w_s}$ il vettore le cui componenti nel sistema di coordinate cartesiane sono $\{0,0,w_{sed}\}$.

Se le due fasi presentano simili densità è possibile considerare $\overrightarrow{v_f} = \overrightarrow{v_s}$ fatta eccezione per la componente lungo z:

$u_s = u$;

$v_s = v$;

$w_s = w - w_{sed}$.

Per mostrare l'equazione del flusso accoppiato si sommano le equazioni semplificate di bilancio della quantità di moto per la fase fluida e per quella solida considerando nulli tutti i

termini contenenti la frazione di volume solida ($a_s \ll 1$) tranne che nelle forze di massa; le equazioni di bilancio della quantità di moto del *flusso bifase* risultano:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} = \frac{1}{\rho}[-\rho(1-a_s)g - a_s\tilde{\rho}_s g] - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)$$

i termini che rappresentano le forze di massa, presenti solo lungo l'asse z, possono essere scritti come segue:

$$-\rho(1-a_s)g - a_s\tilde{\rho}_s g = -\rho g + \rho a_s g - a_s\tilde{\rho}_s g = -g[a_s(\tilde{\rho}_s - \rho) + 1]$$

dividendo tutto per ρ e ponendo R = $(\frac{\tilde{\rho}_s}{\rho} - 1)$ si ottiene:

$$-g[a_s(\tilde{\rho}_s - \rho) + 1] = -g(a_s R + 1)$$

quindi il secondo membro dell'equazione avrà la forma:

$$-g(a_s R + 1) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)$$

le equazioni del flusso bifase diventano:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial ww}{\partial z}=-g(a_sR+1)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)$$

inoltre, osservando che:

$$\frac{\partial w_{sed}}{\partial x}=\frac{\partial w_{sed}}{\partial y}=\frac{\partial w_{sed}}{\partial z}=0$$

l'equazione di conservazione della massa solida diventa:

$$\frac{\partial a_s}{\partial t}+\frac{\partial ua_s}{\partial x}+\frac{\partial va_s}{\partial y}+\frac{\partial wa_s}{\partial z}-w_{sed}\frac{\partial a_s}{\partial z}=0$$

Ricompattando le equazioni, il sistema diventa:

$$u^i_{,i} = 0$$

$$\frac{\partial u^l}{\partial t} + u^l u^m_{,m} = (1 + Ra_s) f^l - \frac{1}{\rho} T^{lm}_{,m}$$

$$\frac{\partial u^l}{\partial t} + (a_s u^l)_{,l} - (a_s w^l)_{,l} = 0$$

Assumendo per il tensore degli sforzi il legame costitutivo:

$$T^{lm} = (p - \mu' div\vec{v}) I^{lm} - 2\mu D^{lm}$$

Sotto l'ipotesi di fluido newtoniano incomprimibile si ottiene:

$$T^{lm} = p I^{lm} - 2\mu D^{lm}$$

ove I^{lm} è la matrice identità, D^{lm} è il tensore della velocità di deformazione dato da:

$$D^{lm} = \frac{1}{2}\mu\left(u^l_{,m} + u^m_{,l}\right)$$

e μ è la viscosità dinamica per la fase fluida.

In ordine alla necessità di definire le equazioni per il moto turbolento le variabili dipendenti $u^{i,}, P, a$ sono scomposte in una parte fluttuante ed in una parte media:

$$u^i = \overline{u}^i + u^{i\prime}$$

$$P = \overline{P} + P'$$

$$a = \overline{a} + a'$$

Sostituendo queste relazioni nelle equazioni del moto e mediandole nel tempo, si ottiene il tensore degli sforzi di Reynolds:

$$T_R^{lm} = \begin{bmatrix} \overline{\rho u'^2} & \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho v'u'} & \overline{\rho v'^2} & \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho w'u'} & \overline{\rho w'v'} & \overline{\rho w'^2} \end{bmatrix}$$

Avendo imposto le condizioni di moto turbolento completamente sviluppato il Tensore di Cauchy risulta trascurabile rispetto agli sforzi turbolenti quindi le equazioni del flusso bifase turbolento in forma compatta, diventano:

$$\overline{u}^i_{,i} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{u}^l}{\partial t} + \overline{u}^l \overline{u}^m_{,m} = (1 + R\overline{a}_s)\overline{f}^l - \frac{1}{\rho}\overline{P}_{,m} - \frac{1}{\rho}T^{lm}_{R,m}$$

$$\frac{\partial \overline{a}_s}{\partial t} + (\overline{a}_s\, \overline{u}^l)_{,l} - (\overline{a}_s\, \overline{w}^l)_{,l} + b^l_{,l} = 0$$

Dove T_R^{ij} sono le componenti del tensore degli sforzi turbolenti e $b^l = \overline{u'a'_s}$

esplicitando le relative componenti si ha:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u}\,\overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_R^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_R^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_R^{xz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{v}\,\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}\,\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v}\,\overline{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_R^{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_R^{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_R^{yz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{w}\,\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w}\,\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}\,\overline{w}}{\partial z}=-(1+Ra_s)g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_R^{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_R^{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_R^{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{a}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u}\,\bar{a}_s}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}\,\bar{a}_s}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}\,\bar{a}_s}{\partial z}-\overline{w_{sed}}\frac{\partial \overline{a_s}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{u'a'_s}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'a'_s}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'a'_s}}{\partial z}=0$$

Si assume che il tensore di Reynolds T_R^{ij} sia relazionato al tensore della velocità di deformazione mediata tramite il coefficiente di viscosità turbolenta ν_T :

$$T_R^{ij}=-2\nu_T\overline{D}_{ij}$$

ove $\overline{D}_{ij}$ è la parte simmetrica del gradiente di velocità.

Le equazioni diventano:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u}\,\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u}\,\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u}\,\overline{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{v}\,\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}\,\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v}\,\overline{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{w}\,\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w}\,\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}\,\overline{w}}{\partial z}$$
$$=-(1+R\overline{a_s})g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{w}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_T\,\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \overline{a}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u}\,\bar{a}_s}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}\,\bar{a}_s}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}\,\bar{a}_s}{\partial z}-\overline{w_{sed}}\frac{\partial \overline{a_s}}{\partial z}+\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\nu_T\,\frac{\partial \bar{a}_s}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\nu_T\,\frac{\partial \bar{a}_s}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\nu_T\,\frac{\partial \bar{a}_s}{\partial z}\right)\right]=0$$

Se ora si pone che:

$$C = \bar{a}_s$$

L'equazione della concentrazione:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u} C}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v} C}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w} C}{\partial z} - \overline{w_{sed}} \frac{\partial C}{\partial z} + \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \nu_T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \nu_T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right) = 0$$

4.Condizioni Al Contorno

Per poter integrare numericamente le equazioni della concentrazione, è necessario definire delle condizioni al contorno alla base dell'invaso, cioè nella zona in cui per effetto della corrente e delle azioni tangenziali si ha una risospensione dei sedimenti.

In condizioni di moto stazionario ed uniforme, per valori della velocità al fondo superiore ad una certa quantità critica, nelle quote in cui i fenomeni turbolenti sono significativi, si realizza un equilibrio dinamico tra la quantità di sedimento che risospende e quella che sedimenta nell'unità di tempo. In tali condizioni di equilibrio viene definita la Reference Concentration Cr, che è la concentrazione di sedimenti che si realizza ad una determinata quota, per effetto del bilanciamento del flusso $\nu_t(\delta C/\delta z)$ di particelle solide in moto verso l'alto, e il flusso $-w_s C$ di particelle in moto verso il basso per sedimentazione; tale concentrazione può essere espressa per vie empiriche.

La condizione al contorno per l'equazione della concentrazione dei sedimenti viene definita imponendo che , sulla superficie di frontiera inferiore, il valore del flusso di sedimenti verso l'alto dovuto alla turbolenza sia pari a quello che si avrebbe nel caso in cui il campo di velocità fosse quello associato ad un moto statisticamente stazionario ed uniforme.

L'equazione della concentrazione risulta:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial uC}{\partial x}+\frac{\partial vC}{\partial y}+\frac{\partial wC}{\partial z}-w_{sed}\frac{\partial C}{\partial z}+\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\nu_T\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\nu_T\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\nu_T\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right)=0$$

Considerando che in condizioni di equilibrio la variazione di concentrazione nel tempo è nulla, si ottiene:

$$\frac{\partial uC}{\partial x}+\frac{\partial vC}{\partial y}+\frac{\partial wC}{\partial z}-w_{sed}\frac{\partial C}{\partial z}+\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\nu_T\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\nu_T\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\nu_T\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right)=0$$

Considerando nulla anche la variazione lungo la direzione principale del moto e quella ad esso normale (assi x ed y) l'equazione diventa:

$$\frac{\partial[C(w-w_{sed})]}{\partial z}=\nu_t\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Essendo $w \ll w_{sed}$:

$$\frac{\partial C w_{sed}}{\partial z}=\nu_t\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Integrando lungo z si ottiene la condizione di equilibrio:

$$-w_{sed}C_R = \nu_t \frac{\partial C}{\partial z}$$

Nella quale a primo membro c'è il termine che rappresenta la sedimentazione e a secondo membro c'è il termine turbolento.

In condizioni di moto statisticamente non stazionario ed uniforme, il flusso verso l'alto per turbolenza non viene in generale equilibrato da quello verso il basso per sedimentazione.

Però le strutture turbolente, in prossimità del sottostrato inferiore, sono molto più piccole di quelle superiori ed il loro tempo di realizzazione, sviluppo e rottura è quindi molto più piccolo. Allora sulla frontiera inferiore si può considerare che $\nu_t \frac{\partial C}{\partial z}$ sia pari a quello del flusso verso il basso per sedimentazione, calcolato in condizioni di equilibrio.

Per quanto riguarda il calcolo della concentrazione di riferimento, in condizioni di moto statisticamente non stazionario ed uniforme, i valori della concentrazione dei solidi sospesi differiscono in generale da quelli che si realizzano nelle condizioni di equilibrio. In particolare si ha che:

1. se $C > C_R$ si ha sedimentazione;
2. se $C = C_R$ si ha equilibrio;
3. se $C < C_R$ si ha risospensione.

il flusso netto di particelle verso l'alto o verso il basso vale:

$$w_s C_R - w_s C = w_s(C_R - C_a)$$

di conseguenza la variazione del fondo viene ricavata tramite la seguente relazione:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w_s(C_a - C_R)$$

in particolare, il valore di C_R locale ed istantaneo viene relazionato al campo di velocità al fondo per mezzo della seguente espressione:

$$C_r = \frac{AZ_u^5}{\left(1 + \frac{A}{0.3} Z_u^5\right)}$$

dove

$$Z_u = \frac{u_{*s}}{v_s} R_p^{0.6}$$

Essendo:

A una costante pari a 1.3×10^{-7}

u_{*s} velocità d'attrito

v_s velocità di sedimentazione

D_p è il diametro della particella solida

$$R_p = \frac{\sqrt{RgD_{sg}}}{v} D_{sg}$$

ove peraltro

$$R = r_s/r - 1$$

D_{sg} è il diametro della particella