MATEMATICA ATTUARIALE

Esercizi di Matematica Attuariale

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Indice

MATEMATICA ATTUARIALE

1) Calcolo del premio puro dall'osservazione statistica

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Agenda

1. **Il premio equo e il premio puro**

2. **Calcolo del premio equo e del premio puro dall'osservazione statistica**

   a) **Indicatori per unità di rischio (Quota danni)**

   b) **Indicatori per unità monetaria (Tasso di premio)**

   c) **Il premio puro**

Il premio equo

- Il premio equo, P, di un contratto di assicurazione contro i danni è uguale al valore atteso del risarcimento globale, X, a carico dell'assicuratore nel periodo di copertura (ad esempio l'anno):

$$\boxed{P = E(X)}$$

- Si considerino le seguenti ipotesi sulla base tecnica del rischio (ovvero sulla distribuzione di probabilità del risarcimento globale)

  A. Le variabili aleatorie numero di sinistri N e risarcimento Y_i relativo all'i-esimo sinistro siano tra loro indipendenti

  B. Per ogni determinazione n (n≠0) della v.a. N, le v.a. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ siano tra di loro indipendenti ed identicamente distribuite.

- Si ha

$$\boxed{P = E(X) = E(N) \cdot E(Y)}$$

Il premio puro

- Il premio puro, Π, comprensivo di un caricamento di sicurezza può essere opportunamente definito mediante la seguente espressione:

$$\boxed{\Pi = H(X)}$$

<u>Principio del Valore Atteso</u>

$$\boxed{\Pi = (1+\alpha) \cdot E(X)} \quad \text{con} \quad \boxed{\alpha > 0}$$

<u>Principio dello scarto quadratico medio</u>

$$\boxed{\Pi = E(X) + \gamma \cdot \sigma(X)} \quad \text{con} \quad \boxed{\gamma > 0}$$

Agenda

1. Il premio equo e il premio puro

2. Calcolo del premio equo e del premio puro dall'osservazione statistica

   a) Indicatori per unità di rischio (Quota danni)

   b) Indicatori per unità monetaria (Tasso di premio)

   c) Il premio puro

Stima del premio equo dall'osservazione statistica

- ✓ Il premio equo, P, può essere calcolato anche sulla base dei risultati provenienti da un'opportuna osservazione statistica
- ✓ La stima delle basi tecniche del premio possono riferirsi a:
  - ✓ Indicatori per unità di rischio (quota danni)
  - ✓ Indicatori per unità monetaria (tasso di premio)

Agenda

1. **Il premio equo e il premio puro**
2. **Calcolo del premio equo e del premio puro dall'osservazione statistica**

   a) **Indicatori per unità di rischio (Quota danni)**

   b) **Indicatori per unità monetaria (Tasso di premio)**

   c) **Il premio puro**

Indicatori per unità di rischio

- ✓ Si ipotizzi di avere osservato, ad esempio per la durata di un anno, una collettività costituita da un numero sufficientemente grande di rischi analoghi a quello in esame con riferimento:
  - ✓ alle caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili all'epoca di stipulazione del contratto
  - ✓ alle condizioni contrattuali di copertura
  - ✓ ai valori monetari di esposizione al rischio

Quota danni

- Indichiamo inoltre con:
  - R il numero dei rischi osservati
  - m il numero dei sinistri osservati
  - $y_1, y_2, \ldots, y_m$ i risarcimenti osservati in relazione agli m sinistri

- In tali ipotesi il risarcimento medio relativo ad un rischio è pari a:

$$\boxed{Q = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{R}}$$

Quota Danni

ed è interpretabile come **premio equo osservato** ex post (se infatti a ciascun contratto fosse stato richiesto un premio pari a Q si sarebbe realizzato l'equilibrio attuariale: QxR = risarcimento totale osservato)

Fattorizzazione della Quota danni

- La quota danni può essere così fattorizzata:

$$Q = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m} \cdot \frac{m}{R}$$

$\bar{y}$: **Risarcimento medio** osservato in relazione agli m sinistri

ψ : **Indice di sinistrosità** (numero medio di sinistri relativi a un rischio)

- E' possibile fornire la seguente interpretazione:

$$\begin{array}{ccccc} Q & = & \bar{y} & \cdot & \psi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E(X) & = & E(Y) & \cdot & E(N) \end{array}$$

Fattorizzazione dell'indice di sinistrosità

- E' interessante evidenziare una ulteriore fattorizzazione dell'indice di sinistrosità; si indichi con s il numero massimo di sinistri che hanno colpito un singolo rischio e si conosca la seguente distribuzione:

$$R = r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_s$$

dove r_h rappresenta il numero di rischi che hanno registrato h sinistri

- Si ha $m = r_1 + \ldots + h \cdot r_h + \ldots + s \cdot r_s$
- Vale dunque la seguente fattorizzazione:

$$\frac{m}{R} = \underbrace{\frac{r_1 + \ldots + h \cdot r_h + \ldots + s \cdot r_s}{r_1 + r_2 + \ldots + r_s}}_{\rho} \cdot \frac{R - r_0}{R}$$

Frequenza osservata di avere almeno un sinistro

ρ: Indice di ripetibilità
(numero medio di sinistri per rischio sinistrato)

Fattorizzazione completa della Quota Danni

- Si ha dunque la quota danni espressa in funzione di parametri caratteristici della collettività di rischi considerata

$$Q = \frac{r_1 + \ldots + h \cdot r_h + \ldots + s \cdot r_s}{r_1 + r_2 + \ldots + r_s} \cdot \frac{R - r_0}{R} \cdot \bar{y}$$

- Fissati il costo medio e l'indice di sinistrosità, un più elevato indice di ripetibilità comporta una maggior frequenza di non sinistri, con una più forte concentrazione dei sinistri su un numero minore di contratti

Quota Danni – Esempio numerico (1/6)

Esempio

- *Consideriamo la seguente distribuzione del numero dei sinistri osservata per un portafoglio R.C.A.*

k	Rischi	Sinistri
0	92,754	-
1	6,722	6,722
2	461	922
3	52	156
4	9	36
5	2	10
Totale	100,000	7,846

Quota Danni – Esempio numerico (2/6)

Esempio

- *Consideriamo la seguente distribuzione degli importi dei risarcimenti osservati per il medesimo portafoglio R.C.A.*

Fascia di Importo	Numero di sinistri
y≤1000	5,161
1000<y≤2000	1,076
2000<y≤3000	506
3000<y≤4000	258
4000<y≤5000	168
5000<y≤6000	124
6000<y≤7000	87
7000<y≤8000	65
8000<y≤9000	58
9000<y≤10000	44
y>10000	299
Totale	**7,846**

*Si ipotizzi inoltre di aver osservato nell'anno, in relazione agli m=7846 sinistri, un **risarcimento totale** pari a 16'504'515 Euro*

Quota Danni – Esempio numerico (3/6)

Esempio

- *Obiettivo dell'esempio è quello di determinare in relazione al portafoglio osservato le seguenti grandezze:*
  - *Quota danni*
  - *Risarcimento medio*
  - *Indice di sinistrosità*
  - *Coefficiente di ripetibilità*
  - *Frequenza osservata di avere almeno un sinistro*

Quota Danni – Esempio numerico (4/6)

Esempio

- *Stima della Quota Danni*

$$\boxed{Q = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{R} = \frac{16'504'515}{100'000} = 165\,€}$$

- *Stima del risarcimento medio e dell'indice di sinistrosità*

$$\boxed{Q = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m} \cdot \frac{m}{R} = \bar{y} \cdot \psi = \frac{16'504'515}{7'846} \cdot \frac{7'846}{100'000}}$$

- *Risarcimento medio*

$$\boxed{\bar{y} = 2'104\,€}$$

- *Indice di sinistrosità*

$$\boxed{\psi = 7.85\%}$$

Quota Danni – Esempio numerico (5/6)

Esempio

- *Fattorizzazione dell'indice di sinistrosità:*

$$\boxed{\psi = \frac{m}{R} = \rho \cdot \frac{R - r_0}{R}}$$

- *Coefficiente di ripetibilità:*

$$\boxed{\rho = \frac{m}{R - r_0} = \frac{7'846}{100'000 - 92'754} = 1.08}$$

- *Frequenza osservata di avere almeno un sinistro*

$$\boxed{\frac{R - r_0}{R} = \frac{100'000 - 92'754}{100'000} = 7.25\%}$$

Quota Danni – Esempio numerico (6/6)

Esempio

- *Stima della Quota Danni*

$$\boxed{Q = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{R} = \bar{y} \cdot \psi = \bar{y} \cdot \rho \cdot \frac{R - r_0}{R}}$$

$$\boxed{Q = 2'104 \cdot 7.85\% = 165€}$$

$$\boxed{Q = 2'104 \cdot 1.08 \cdot 7.25\% = 165€}$$

Agenda

1. Il premio equo e il premio puro
2. Calcolo del premio equo e del premio puro dall'osservazione statistica
   a) Indicatori per unità di rischio (Quota danni)
   b) Indicatori per unità monetaria (Tasso di premio)
   c) Il premio puro

Indicatori per unità monetaria

- ✓ Si ipotizzi di avere osservato, ad esempio per la durata di un anno, una collettività costituita da un numero sufficientemente grande di rischi analoghi a quello in esame con riferimento:
  - ✓ alle caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili all'epoca di stipulazione del contratto
  - ✓ alle condizioni contrattuali di copertura

- ✓ A differenza di quanto fatto in precedenza si assuma che gli R rischi osservati siano caratterizzati da **valori monetari** delle **esposizioni** (valori assicurati o massimali) **diversi** e rappresentati da:

$$w_1, w_2, \ldots, w_R$$

Tasso di premio

- ✓ Si definisce **Tasso di premio** il seguente valore:

$$\boxed{\tau = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_m}{w_1 + w_2 + \ldots + w_R}}$$

ed è interpretabile come **premio equo osservato** ex post per **unità monetaria** di esposizione

- ✓ Il **tasso di premio** è esprimibile anche nel seguente modo:

$$\tau = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_m / m}{w_1 + w_2 + \ldots + w_R / R} \cdot \frac{m}{R} = \frac{\overline{y}}{\overline{w}} \cdot \psi = g \cdot \psi$$

dove g è il **grado medio di danno** e rappresenta il risarcimento medio per unità monetaria di esposizione sinistrata

Tasso di premio – Esempio numerico (1/8)

Esempio

- *Consideriamo la seguente distribuzione del numero dei sinistri osservata per un portafoglio di assicurazioni contro il furto*

k	Rischi	Sinistri
0	84,324	-
1	5,032	5,032
2	1,367	2,734
3	582	1,746
4	103	412
5	16	80
Totale	91,424	10,004

Tasso di premio – Esempio numerico (2/8)

Esempio

- *Consideriamo la seguente distribuzione degli importi delle somme assicurate per il medesimo portafoglio*

Fascia di Importo	Numero polizze
w≤2000	42,338
2000<w≤4000	19,444
4000<w≤6000	9,605
6000<w≤8000	5,579
8000<w≤10000	3,614
10000<w≤12000	2,435
12000<w≤14000	1,713
14000<w≤16000	1,215
16000<w≤18000	993
18000<w≤20000	724
w>20000	3,764
Totale	**91,424**

Si ipotizzi inoltre di aver osservato nell'anno, in relazione alle R=91424 polizze delle ***somme assicurate totali*** *pari a 454'284'977 Euro*

Tasso di premio – Esempio numerico (3/8)

Esempio

- *Consideriamo la seguente distribuzione degli importi dei risarcimenti osservati per il medesimo portafoglio*

Fascia di Importo	numero sinistri
y≤1000	4,878
1000<y≤2000	2,089
2000<y≤3000	988
3000<y≤4000	572
4000<y≤5000	343
5000<y≤6000	253
6000<y≤7000	185
7000<y≤8000	130
8000<y≤9000	95
9000<y≤10000	79
y>10000	392
Totale	**10,004**

Si ipotizzi inoltre di aver osservato nell'anno, in relazione agli m=10004 sinistri, un ***risarcimento totale*** *pari a 23'419'364 Euro*

Tasso di premio – Esempio numerico (4/8)

Esempio

- *Obiettivo dell'esempio è quello di determinare in relazione al portafoglio osservato le seguenti grandezze:*
  - *Tasso di premio*
  - *Risarcimento medio*
  - *Somma assicurata media*
  - *Grado medio del danno*
  - *Indice di sinistrosità*
  - *Coefficiente di ripetibilità*
  - *Frequenza osservata di avere almeno un sinistro*

Tasso di premio – Esempio numerico (5/8)

Esempio

- *Stima del Tasso di Premio*

$$\boxed{\tau = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_m}{w_1 + w_2 + \ldots + w_R} = \frac{23'419'364}{454'284'977} = 5.16\%}$$

Tasso di premio – Esempio numerico (6/8)

Esempio

- *Stima del Risarcimento medio*

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_m}{m} = \frac{23'419'364}{10'004} = 2'341\,€$$

- *Stima della Somma assicurata media*

$$\overline{w} = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_R}{R} = \frac{454'284'977}{91'424} = 4'969\,€$$

- *Stima del grado medio del danno*

$$g = \frac{\overline{y}}{\overline{w}} = \frac{2'341}{4'969} = 47.11\%$$

Tasso di premio – Esempio numerico (7/8)

Esempio

- *Stima dell'indice di sinistrosità e fattorizzazione*

$$\psi = \frac{m}{R} = \rho \cdot \frac{R - r_0}{R} = \frac{10'004}{91'424} = 10.94\%$$

- *Stima del coefficiente di ripetibilità*

$$\rho = \frac{m}{R - r_0} = \frac{10'004}{91'424 - 84'324} = 1.41$$

- *Frequenza osservata di avere almeno un sinistro*

$$\frac{R - r_0}{R} = \frac{91'424 - 84'324}{91'424} = 7.77\%$$

Tasso di premio – Esempio numerico (8/8)

Esempio

- *Stima del Tasso di Premio*

$$\boxed{\tau = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_m}{w_1 + w_2 + \ldots + w_R} = g \cdot \psi = g \cdot \rho \cdot \frac{R - r_0}{R}}$$

$$\boxed{\tau = 47.11\% \cdot 10.94\% = 5.16\%}$$

$$\boxed{\tau = 47.11\% \cdot 1.41 \cdot 7.77\% = 5.16\%}$$

Agenda

1. Il premio equo e il premio puro
2. Calcolo del premio equo e del premio puro dall'osservazione statistica
   a) Indicatori per unità di rischio (Quota danni)
   b) Indicatori per unità monetaria (Tasso di premio)
   c) Il premio puro

Premio puro dall'osservazione statistica (1/2)

- A partire dal premio equo, P, anche il premio puro, Π, può essere convenientemente calcolato sulla base dei risultati dell'osservazione statistica nell'ipotesi che il caricamento di sicurezza sia proporzionale al valore atteso del risarcimento globale, X, o, più opportunamente, alla rischiosità del contratto valutata mediante un'idonea misura di variabilità di X.

- A fini esemplificativi si assuma che l'assicuratore abbia stabilito di calcolare il premio puro mediante:
  - il principio del valore atteso $V = (1+\alpha)\cdot Q$
  - il principio dello scarto quadratico medio. In tale ipotesi il premio puro, Π, eguaglia il premio puro osservato, V, così definito:

$$V = Q + \gamma \cdot S(X)$$

Premio puro dall'osservazione statistica (2/2)

- Nelle ipotesi classiche ipotesi probabilistiche precedentemente enunciate si ha:

$$S^2(X) = \left(\frac{m}{R}\right)\cdot S^2(Y) + S^2(N)\cdot\left(\bar{y}\right)^2$$

dove:

$$S^2(N) = \sum_{i=0}^{s}\left(i - \frac{m}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{R}\right) \qquad S^2(Y) = \left(\frac{1}{m-1}\right)\sum_{j=1}^{m}\left(y_j - \bar{y}\right)^2$$

sono rispettivamente le stime campionaria della varianza della v.a. numero dei sinistri N e della varianza della v.a. risarcimento per il singoli sinistro Y

Premio puro dall'osservazione statistica (1/5)

Esempio

- *Consideriamo il precedente portafoglio R.C.A., che era caratterizzato da:*
  - *Quota Danni = € 165*
  - *Indice di sinistrosità = 7.85%*
  - *Risarcimento medio = € 2'104*
- *Premio puro* $V = (1+\alpha)\cdot Q$
- *Premio puro:* $V = Q + \gamma \cdot S(X)$
- *Poniamo*
  - $\alpha = 25\%$
  - $\gamma = 2\%$
- *Obiettivo: calcolare il premio puro (bisogna quindi determinare* $S(X)$ *)*

Premio puro dall'osservazione statistica (2/5)

Esempio

- *Calcolo del premio puro con il principio del valore atteso:*

$$V = (1+\alpha)\cdot Q = (1+25\%)\cdot 165 = 206€$$

- *Caricamento di sicurezza pari a 206 € - 165€ =41€*

Premio puro dall'osservazione statistica (3/5)

Esempio

- *Determiniamo* $S^2(X)=\left(\frac{m}{R}\right)\cdot S^2(Y)+S^2(N)\cdot\left(\bar{y}\right)^2$

- *Indice di sinistrosità = 7.85%*
- *Risarcimento medio = € 2'104*
- *Varianza del numero dei sinistri*
- *Varianza del risarcimento 79'839'732 €*

Premio puro dall'osservazione statistica (4/5)

Esempio

- *Varianza del numero dei sinistri*

k	Rischi	Sinistri	A: (i-m/R)^2	B: freq relative	AxB
0	92,754	-	0.0062	0.9275	0.0057
1	6,722	6,722	0.8492	0.0672	0.0571
2	461	922	3.6923	0.0046	0.0170
3	52	156	8.5354	0.0005	0.0044
4	9	36	15.3785	0.0001	0.0014
5	2	10	24.2216	0.0000	0.0005
Totale	100,000	7,846	**S^2(N)**	**8.61%**	
m/R	**7.85%**				

Premio puro dall'osservazione statistica (5/5)

Esempio

- *Deviazione standard di X:*

$$S(X)=\left(\left(\frac{m}{R}\right)\cdot S^2(Y)+S^2(N)\cdot\left(\overline{y}\right)^2\right)^{0.5}=$$

$$S(X)=\left(7.85\%\cdot 79'839'732+8.61\%\cdot(2'104)^2\right)^{0.5}=2'578\,€$$

- *Premio puro:*

$$V=Q+\gamma\cdot S(X)=165+2\%\cdot 2'578=217€$$

- *Caricamento di sicurezza pari a 217 € - 165€ =52€*

MATEMATICA ATTUARIALE

2) La riserva premi

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Agenda

1. **Riserve tecniche danni**
2. **Riserva premi**
3. **Riserva pro rata**
4. **Riserva per rischi in corso**
5. **Tenuta della riserva premi e modulo 31**

Riserve tecniche - Inversione del ciclo produttivo

- ✓ L'attività assicurativa è caratterizzata dall'**inversione del ciclo produttivo,** in forza del quale l'impresa di assicurazione incassa i premi in via anticipata rispetto all'eventuale prestazione a suo carico.
- ✓ Alla data di chiusura dell'esercizio l'impresa di assicurazione deve quindi accantonare una parte dei premi raccolti, destinata a far fronte ai prevedibili oneri (per sinistri e spese) futuri, iscrivendo al passivo del bilancio di esercizio l'ammontare complessivo dell'esposizione debitoria nei confronti di contraenti ed assicurati.
- ✓ Le **riserve tecniche** così costituite si differenziano dalle **riserve patrimoniali** (riserva legale, riserva statutaria, riserve facoltative…) poiché rappresentano un **accantonamento di premi** e non un accantonamento di utili.

Riserve tecniche – Codice delle Assicurazioni

- ✓ Codice delle Assicurazioni (art.37):

  "L'impresa che esercita i rami danni ha **l'obbligo** di costituire, per i contratti del portafoglio italiano, **riserve tecniche** che siano sempre **sufficienti** a far fronte, per quanto **ragionevolmente prevedibile**, agli **impegni** derivanti dai contratti di assicurazione. Le **riserve** sono costituite, al **lordo** delle cessioni in **riassicurazione**, nel rispetto delle disposizioni e dei metodi di valutazione stabiliti dall'**ISVAP** con il **regolamento n.16** del 2008".

- ✓ L'impresa che esercita i rami danni costituisce alla fine di ogni esercizio:

  a. La Riserva Premi
  b. La Riserva Sinistri
  c. Le Riserve di perequazione
  d. La Riserva di senescenza
  e. La Riserva per partecipazione agli utili e ristorni

Riserva Premi – Definizioni (Regolamento n. 16)

- ✓ La **riserva premi** comprende l'ammontare complessivo delle somme necessarie per far fronte al **costo futuro dei sinistri relativi ai rischi non estinti alla data di valutazione**. (IMP. <u>Costo relativo a sinistri ancora non avvenuti</u>).
- ✓ La riserva premi è composta dalla
  1. riserva per frazioni di premi, correlata al criterio della ripartizione temporale del premio per competenza
  2. riserva per rischi in corso connessa all'andamento tecnico del rischio.

Riserva Premi – Definizioni (Regolamento n. 16)

RISERVA PREMI

Riserva per frazioni di premio

utilizzata per coprire quei rischi i cui premi sono già stati incassati, ma la cui durata va oltre la chiusura dell'esercizio.

Riserva per rischi in corso

deve essere accantonata per far fronte ai maggiori costi dei futuri sinistri che potrebbero colpire contratti che hanno dato luogo alla formazione della riserva per frazioni di premi.

Classificazione e rappresentazione dei premi a bilancio (1/2)

- ✓ Il premio è l’importo pagato dal contraente a fronte della copertura assicurativa offerta dalla Compagnia. Si definiscono:
- ✓ **Data di emissione (D_EMI)** della polizza: il giorno in cui il contratto assicurativo viene stipulato presso l’agenzia
- ✓ **Data di effetto o decorrenza (D_DEC)** della polizza: il giorno in cui inizia la copertura assicurativa relativa al contratto stipulato. Generalmente D_DEC≥D_EMI
- ✓ **Data di contabilizzazione (D_CONT)** della polizza: il giorno in cui l’impresa di assicurazione contabilizza il premio. Generalmente D_CONT≥D_EMI

Classificazione e rappresentazione dei premi a bilancio (2/2)

- ✓ **Premi lordi contabilizzati** nell’esercizio t**:** ammontare dei premi la cui D_CONT è compresa nell’esercizio di bilancio t.

- ✓ (definizione art. 45 del decreto legislativo 26 maggio 1997, n. 173)
  “I premi lordi contabilizzati comprendono tutti gli importi maturati durante l'esercizio per i contratti di assicurazione, indipendentemente dal fatto che tali importi siano stati incassati o che si riferiscano interamente o parzialmente ad esercizi successivi; sono in ogni caso esclusi gli importi delle relative imposte e dei contributi riscossi per rivalsa”

- ✓ Il premio deve essere contabilizzato **indipendentemente** dall’eventuale **incasso** avvenuto. La contabilizzazione del premio è subordinata esclusivamente all’emissione e non al suo incasso. Qualora il premio, una volta contabilizzato, non è incassato, viene successivamente “stornato”, ossia è nuovamente contabilizzato con segno negativo

Riserva per frazioni di premio

- **Principio della competenza** (uno dei principi alla base della redazione del bilancio di una impresa di assicurazione:
- "i costi e i ricavi devono essere contabilizzati in conformità al principio della competenza economica, indipendentemente dalla loro manifestazione finanziaria"

$$\Downarrow$$

- Le imprese determinano la riserva per frazioni di premi sulla base degli importi **dei premi lordi contabilizzati di competenza degli esercizi successivi**.

- Le imprese valutano e costituiscono la riserva per frazioni di premio separatamente per ciascun ramo ed eventualmente nell'ambito delle diverse tipologie di rischio rientranti nel ramo.

Riserva per frazioni di premio: "pro rata temporis"

- Le imprese determinano la **riserva per frazioni di premi** separatamente per **ciascun contratto** con il metodo "**pro rata temporis**" sulla base dei premi lordi contabilizzati, dedotte le provvigioni di acquisizione e le altre spese di acquisizione, limitatamente ai costi direttamente imputabili.

- Per i contratti di durata pluriennale, in caso di ammortamento delle predette provvigioni e spese corrisposte per l'acquisizione di contratti, è deducibile soltanto la quota relativa all'esercizio.

- IPOTESI:
  - All'interno del periodo t, t+1 la frequenza sinistri è costante
  - All'interno del periodo t, t+1 la funzione di ripartizione della v.a. Y importo del danno non cambia

$$\boxed{RP = \sum_{h=1}^{n} P_h^T \cdot (1-\alpha_h) \cdot (1-t_h)}$$

Riserva "pro rata temporis" – ESEMPIO 1

DATI INPUT:

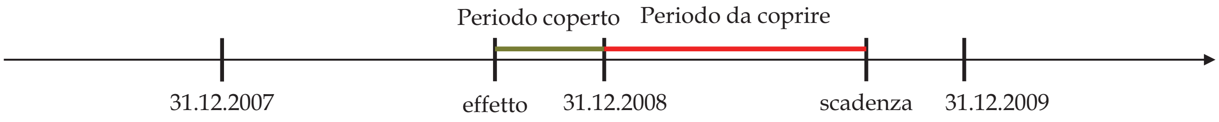
Premio di Tariffa: € 1500 (al netto delle imposte)

Data di effetto della polizza: 15/10/2008

Durata copertura: annuale

Data di valutazione: 31/12/2008

Provvigioni e spese di acquisizione: 18% del premio



DETERMINAZIONE DELLA RISERVA:

Riserva pro rata = 1500 * (285/360) * (1-18%) = € 973,75

Numero di giorni oggetto di copertura del rischio per l'esercizio 2009

Numero di giorni oggetto di copertura

Riserva "pro rata temporis" – ESEMPIO 2

DATI INPUT:

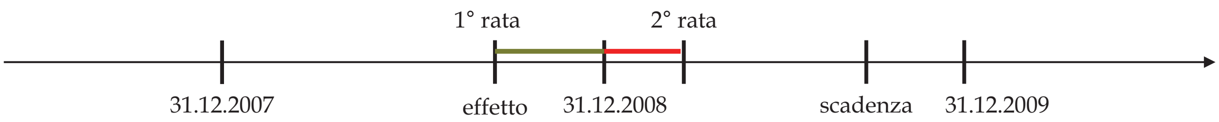
Premio di Tariffa: € 2000 (al netto delle imposte). Rata Semestrale: € 1000

Data di effetto della polizza: 1/8/2008

Durata copertura: annuale

Data di valutazione: 31/12/2008

Provvigioni e spese di acquisizione: 20% del premio



DETERMINAZIONE DELLA RISERVA:

Riserva pro rata = 1000 * (30/180) * (1-20%) = € 133,33

Numero di giorni coperti dalla prima rata di premio

Numero di giorni coperti dalla prima rata di premio relativi al 2009

Riserva “pro rata temporis” – ESEMPIO 3

DATI INPUT:

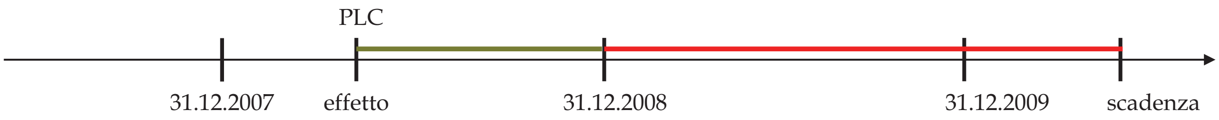
Premio di Tariffa Unico: € 4000 (al netto delle imposte).

Data di effetto della polizza: 1/4/2008

Durata copertura: 2 anni

Data di valutazione: 31/12/2008

Provvigioni e spese di acquisizione: 10% del premio



DETERMINAZIONE DELLA RISERVA:

Riserva pro rata = 4000 * (450/720) * (1-10%) = € 2250

Numero di giorni coperti dal premio unico

Numero di giorni coperti dal premio unico relativi a esercizi successivi

Riserva per frazioni di premio - metodo forfetario

- ✓ In alternativa all’applicazione del metodo “pro rata temporis”, le imprese possono determinare la riserva per frazioni di premio con un **metodo forfettario** solo qualora esso comporti un accantonamento non inferiore rispetto a quello risultante con il metodo “pro rata temporis” e lo scostamento percentuale **non superi il 2%** riferito al singolo ramo.
- ✓ Le imprese, qualora effettuino il calcolo con un metodo forfetario, conservano nei propri atti le evidenze documentali da cui risultino le valutazioni operate ai fini della verifica della condizione di cui al punto precedente.
- ✓ Non è consentito nell’ambito dello stesso ramo l’utilizzo contemporaneo dei due metodi (“pro rata temporis” e “forfettario”).

Riserva per frazioni di premio - metodo forfetario ex. D.lgs 173

✓ All'articolo n. 32 del D.lgs 173 del 1997 veniva descritto un possibile metodo forfettario per il calcolo della riserva per frazioni di premio.

✓ La riserva per frazioni di premio di un dato Ramo i era pari a:

$$\boxed{RP_i = PLC_i \cdot \beta_i}$$

- PLC_i : Premi Lordi Contabilizzati nel Ramo i
- β_i : aliquota che rappresenta la parte di premio di competenza dell'esercizio successivo e posta pari a:
  - 40% per il ramo RCA
  - 35% altri rami
  - 15% rischi di breve durata (durata < 6 mesi)

Riserva per frazioni di premio - metodo 24-esimi (forfettario)

✓ Un ulteriore criterio di approssimazione, frequentemente utilizzato prima dell'avvento dei pc, è rappresentato dal metodo dei ventiquattresimi, che ipotizza, oltre alle predette ipotesi alla base del metodo "pro rata temporis", anche che vi sia l'uniforme distribuzione dei premi in ciascun mese.

Mese(j)	PLC	Quota a Riserva t(j)	Calcolo della riserva per frazioni di premio
Gennaio	PLC(j)	1/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Febbraio	PLC(j)	3/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Marzo	PLC(j)	5/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Aprile	PLC(j)	7/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Maggio	PLC(j)	9/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Giugno	PLC(j)	11/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Luglio	PLC(j)	13/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Agosto	PLC(j)	15/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Settembre	PLC(j)	17/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Ottobre	PLC(j)	19/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Novembre	PLC(j)	21/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
Dicembre	PLC(j)	23/24	PLC(j)*(1-α)*t(j)
TOTALE			**Somma rispetto a j**

Riserva per frazioni di premio – ESEMPIO metodi forfettari

- Ramo RCA
- Aliquota costi acquisizione α=30%
- Riserva per frazioni di premio metodo forfettario (ex d.lgs 173):

  € 28’100 *40%=€ 11’240
- Riserva per frazioni di premio metodo 24-esimi:

  € 9’534,58

Mese(j)	PLC (€ 000)	Quota a Riserva t(j)	Calcolo della riserva per frazioni di premio
Gennaio	€ 2.400,00	1/24	€ 70,00
Febbraio	€ 2.200,00	3/24	€ 192,50
Marzo	€ 2.300,00	5/24	€ 335,42
Aprile	€ 3.000,00	7/24	€ 612,50
Maggio	€ 2.700,00	9/24	€ 708,75
Giugno	€ 2.900,00	11/24	€ 930,42
Luglio	€ 2.000,00	13/24	€ 758,33
Agosto	€ 1.600,00	15/24	€ 700,00
Settembre	€ 2.300,00	17/24	€ 1.140,42
Ottobre	€ 2.400,00	19/24	€ 1.330,00
Novembre	€ 2.200,00	21/24	€ 1.347,50
Dicembre	€ 2.100,00	23/24	€ 1.408,75
TOTALE	**€ 28.100,00**		**€ 9.534,58**

Riserva per frazioni di premio – Riserve integrative (1/2)

- Le imprese che esercitano le assicurazioni delle **cauzioni, della grandine e** delle altre **calamità naturali, del terremoto/maremoto/eruzione vulcanica e** quelle dei danni derivanti **da rischi atomici** integrano la riserva per frazioni di premi sulla base dei criteri indicati dalla normativa (Reg. n. 16 art. 12-23).
- Riserva **per frazioni di premio**, è quindi a sua volta formata da:
  - riserva “**pro rata temporis**”
  - riserva integrativa per le assicurazioni del ramo **cauzioni**
  - riserva integrativa **grandine** e altre calamità naturali
  - riserva integrativa **terremoto**, **maremoto**, eruzione vulcanica e fenomeni connessi
  - riserva integrativa **rischi atomici**

Riserva per frazioni di premio – Riserve integrative (2/2)

- ✓ Tale integrazione deriva dalla necessità di tener conto delle situazioni in cui l'andamento del rischio nel tempo non è lineare o comunque non uniformemente distribuito nell'arco della durata contrattuale.
- ✓ Il calcolo deve essere effettuato con riferimento ai soli premi e sinistri riconducibili all'assicurazione rientranti nella casistica
- ✓ Vengono definiti inoltre, per ognuna delle riserve integrative, i criteri calcolo della riserva e di suo utilizzo in caso di andamento negativo del ramo/rischio.

Riserva per Rischi in Corso (1/3)

- ✓ **Riserva per rischi in corso:** deve essere accantonata per far fronte ai maggiori costi dei futuri sinistri che potrebbero colpire contratti che hanno dato luogo alla formazione della riserva per frazioni di premi.
- ✓ **La riserva per rischi in corso**:
  - ✓ è a copertura dei rischi incombenti **dopo la fine dell'esercizio**,
  - ✓ serve per far fronte a tutti gli indennizzi e spese derivanti da contratti di assicurazione stipulati prima della fine dell'esercizio, nella misura in cui il **costo atteso** di tali rischi **superi** quello della stessa **riserva per frazioni di premi**, valutata al netto delle integrazioni grandine, terremoto e rischi atomici, e **maggiorata dei premi che saranno esigibili** in virtù di tali contratti.
  - ✓ deve essere valutata **per singolo ramo** (eventualmente suddiviso a sua volta nei cosiddetti "rami di garanzia")

Riserva per Rischi in Corso (2/3)

- Si ipotizzi di essere al 31/12/t e si indichi con:
  - RFP(t): riserva per frazioni di premio al 31/12/t, considerando come integrativa solo quella del ramo cauzione
  - RS(t+1): rate a scadere in t+1, ovvero frazioni di premio relativi a contratti in essere al 31/12/t che saranno incassate in t+1
  - α: percentuale di spese di acquisizione
  - C(t+1): presunto costo stimato per sinistri relativi a polizze in essere al 31/12/t che devono ancora avvenire alla data di valutazione.
- Condizione necessaria e sufficiente affinchè si debba accantonare la riserva per rischi in corso è:
  - $C(t+1) > RFP(t) + RS(t+1)*(1-\alpha)$

Riserva per Rischi in Corso (3/3)

- La Riserva per Rischi in Corso al 31/12/t sarà allora pari a:
  - $RIC(t) = C(t+1) - (RFP(t) + RS(t+1)*(1-\alpha))$
- Le imprese di assicurazione possono stimare il costo atteso C(t+1) per gruppi omogenei di contratti mediante:
  - Modello attuariale previsionale (basato su prudenti parametri evolutivi)
  - Metodo empirico (Regolamento 16, art 11)

In entrambi i casi non devono essere considerati i rendimenti prodotti dal patrimonio della compagnia o dagli attivi a copertura delle riserve tecniche

Riserva per Rischi in Corso : Metodo Empirico (1/3)

- La riserva per rischi in corso calcolata con il metodo empirico è stimata sulla base di un valore prospettico del **rapporto sinistri a premi di competenza** della generazione corrente.
- Il valore prospettico del rapporto sinistri a premi è determinato, in modo prudente, a partire dal rapporto sinistri a premi netti di competenza registrato **nell'esercizio di valutazione** e tiene anche conto dei valori assunti dal rapporto stesso in un **orizzonte temporale retrospettivo** di osservazione e di **ulteriori elementi obiettivi** di valutazione inerenti all'andamento del costo atteso dei rischi incombenti dopo la fine dell'esercizio.
- L'ampiezza dell'orizzonte temporale retrospettivo di osservazione è definito in relazione alla peculiarità dei singoli rami o delle singole tipologie di rischio per i quali vengono effettuate le valutazioni

Riserva per Rischi in Corso : Metodo Empirico (2/3)

Costo Atteso:

$$\boxed{C_i(t+1)=\left(RFP_i+RS_i\cdot(1-\alpha_i)\right)\cdot\left(\frac{SC_i}{PC_i}\right)}$$

Sinistri di competenza

Premi di competenza netti

Riserva per frazioni di premio

Rate a scadere nette

- <u>Sinistri di competenza:</u> è l'onere per sinistri dell'esercizio, comprensivo delle spese dirette e di liquidazione. Dato dalla somma di:
  - Sinistri avvenuti nell'esercizio e pagati nell'esercizio (comprese le spese dirette e di liquidazione)
  - Sinistri avvenuti nell'esercizio e a riserva alla fine dell'esercizio (compresa la riserva spese e gli eventuali pagamenti parziali avvenuti nell'esercizio)
- <u>Premi di competenza:</u> sono determinati sulla base dei premi lordi contabilizzati, dedotte le provvigioni di acquisizione e le altre spese di acquisizione, limitatamente ai costi direttamente imputabili.

$$\boxed{PC_i^t=RFP_i^{t-1}+PLC_i^t-SAcq_i^t-RFP_i^t}$$

Riserva per Rischi in Corso : Metodo Empirico (3/3)

Riserva per Rischi in Corso:

$$\boxed{RIC_i = \max\left(0; C_i(t+1) - RFP_i + RS_i \cdot (1-\alpha_i)\right)}$$

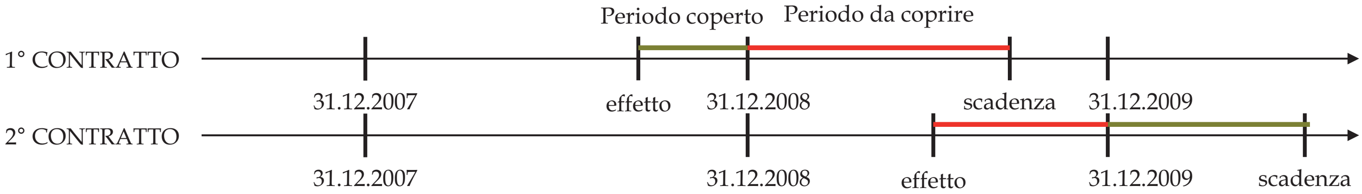
$$\boxed{RIC_i = \max\left(0; \left(RFP_i + RS_i \cdot (1-\alpha_i) \cdot \frac{SC_i}{PC_i}\right) - RFP_i + RS_i \cdot (1-\alpha_i)\right)}$$

$$\boxed{RIC_i = \max\left(0; \left(RFP_i + RS_i \cdot (1-\alpha_i)\right) \cdot \left(\frac{SC_i}{PC_i} - 1\right)\right)}$$

Premi di competenza – ESEMPIO

1° CONTRATTO
Premio di Tariffa Unico: € 1000 (al netto delle imposte)
Data di effetto della polizza: 1/10/2008
Durata copertura: annuale
Provvigioni e spese di acquisizione: 20% del premio

2° CONTRATTO
Premio di Tariffa Unico: € 2000 (al netto delle imposte)
Data di effetto della polizza: 1/7/2009
Durata copertura: annuale
Provvigioni e spese di acquisizione: 20% del premio



Premi di competenza 2009:

- 1° contratto: i premi di competenza 2009 coincidono con la riserva pro rata al 31/12/2008 relativa al contratto: € 600
- 2° contratto: i premi di competenza 2009 coincidono con i PLC (€ 2000) dedotti i costi i costi di acquisizione (€ 400) a cui viene sottratta la riserva pro rata al 31/12/2009 (€800) relativa al contratto che rappresenta la parte di premio di competenza del 2010. Quindi € 2000 – € 400 – € 800=€ 800.
- Totale : € 600 + € 800= € 1400

Premi di competenza 2009 formula generale:

- Riserva pro rata iniziale (€ 600) + PLC (€ 2000) – Spese acquisizione (€ 400) – Riserva pro rata finale (€800)=€1400

Riserva Rischi in Corso : Metodo Empirico ESEMPIO 1

Ramo R.C.Auto (importi in € migliaia):

	Premi lordi Contabilizzati 2008	1.823.819
-	Spese di acquisizione	171.084
+	Ris. per fraz premi entrante (31.12.2007)	626.150
-	Ris. per fraz premi uscente (31/12/2008)	643.363
=	**Premi di competenza 2008**	**1.635.523**

% spese di acquisizione = 9,4%

Sinistri avvenuti nel 2008 e pagati	605.234
Spese	36.314
Sinistri avvenuti nel 2008 e riservati	854.343
Riserva Spese	27.939
Sinistri di competenza 2008	**1.523.830**

S/P = 93,2%

NON E' NECESSARIO ACCANTONARE LA RISERVA PER RISCHI IN CORSO

Riserva Rischi in Corso : Metodo Empirico ESEMPIO 2

Ramo R.C.G. (importi in € migliaia):

	Premi lordi Contabilizzati 2008	291.864
-	Spese di acquisizione	64.985
+	Ris. per fraz premi entrante (31.12.2007)	102.633
-	Ris. per fraz premi uscente (31/12/2008)	110.016
=	**Premi di competenza 2008**	**219.497**

Sinistri avvenuti nel 2008 e pagati	80.432
Spese	4.826
Sinistri avvenuti nel 2008 e riservati	145.423
Riserva Spese	8.923
Sinistri di competenza 2008	**239.604**

S/P = 109,2%

E' NECESSARIO ACCANTONARE LA RISERVA PER RISCHI IN CORSO

Riserva per frazioni di premio uscente (integr solo Cauzioni)	106.716
Rate a scadere Lorde	12.409
% Spese Acquisizione	20%
Rate a scadere Nette	9.927
Totale somme esposte A	116.643

Somme esposte al rischio per l'esercizio 2009

RISERVA PER RISCHI IN CORSO= A* (S/P-1) = € 10'731

Analisi della tenuta della riserva pro rata

- Le imprese verificano, per ciascun ramo, che **la riserva premi accantonata alla fine dell'esercizio precedente, maggiorata delle rate di premio contabilizzate nell'esercizio e relative a contratti per i quali era stata costituita la riserva premi stessa, sia risultata sufficiente, nel corso dell'esercizio**, a far fronte al costo complessivo dei sinistri accaduti che, secondo specifiche analisi aziendali, hanno interessato i contratti che avevano dato luogo all'accantonamento.
- Si utilizza il Modulo 31

Modulo 31: Riserva premi dell'esercizio

		Importo		Incidenza % sui premi contabilizzati
1. Determinazione della riserva premi alla fine dell'esercizio (N)				
1.1 Calcolo della riserva per frazioni di premi				
1.1.1 Metodo pro-rata temporis				
Elementi componenti la riserva premi:				
a) Premi lordi contabilizzati di competenza dell'esercizio successivo	1	40.367		
b) Provvigioni e altre spese di acquisizione, limitatamente ai costi direttamente imputabili, di competenza dell'esercizio successivo	2	4.471		
c) Quota di ammortamento provvigioni e altre spese di acquisizione di competenza dell'esercizio successivo per contratti poliennali, limitatamente ai costi direttamente imputabili	3	0		
Riserva calcolata con il metodo pro-rata temporis (a - b - c) (2)	4	35.896	16	33,31%
1.1.2 **Riserva calcolata con il metodo forfettario (2)**	5	42.485	17	39,42%
1.1.3 **Integrazione della riserva per frazioni di premi (3)**	6	0		
1.1.4 **Totale riserva per frazioni di premi**	7	35.896		
1.2 Calcolo della riserva per rischi in corso				
d) Stima del costo dei sinistri derivanti da contratti in essere al 31.12.(N)	8	41.717		
e) Riserva per frazioni di premi	9	35.896		
f) Rate di premi (nette di oneri di acquisizione) esigibili nell'esercizio N + 1 in virtù di contratti di cui al punto d)	10	12.730		
g) Saldo (- d + e + f)	11	6.909		
Riserva per rischi in corso	12	0		
1.3 Riepilogo della riserva premi dell'esercizio				
h) per frazioni di premi	13	35.896	18	33,31%
i) per rischi in corso	14	0	19	0,00%
l) Riserva premi dell'esercizio (h + i)	15	35.896	20	33,31%

Modulo 31: Distribuzione mensile dei premi

		Importo		Distribuzione %
2 Premi lordi contabilizzati nell'esercizio (N)				
Gennaio	21	8.129	41	7,54%
Febbraio	22	7.408	42	6,87%
Marzo	23	8.764	43	8,13%
Aprile	24	8.935	44	8,29%
Maggio	25	10.609	45	9,84%
Giugno	26	12.339	46	11,45%
Luglio	27	8.667	47	8,04%
Agosto	28	4.514	48	4,19%
Settembre	29	8.722	49	8,09%
Ottobre	30	9.283	50	8,61%
Novembre	31	7.973	51	7,40%
Dicembre	32	12.431	52	11,53%
Totale	33	107.774		100,00

Modulo 31: Analisi della tenuta della riserva premi

3 Riserva premi alla fine dell'esercizio (N-1)		
Riserva per frazioni di premi	60	34.837
Riserva per rischi in corso	61	0
Totale	62	34.837
4 Rate di premio (nette di oneri di acquisizione) contabilizzate nell'esercizio (N) (4)	63	11.774
5 Sinistri dell'esercizio (N) (incluse le spese di liquidazione ed i sinistri tardivi) (4):		
Pagati	64	17.133
Riservati	65	19.225
Totale	66	36.358

(4) Relativamente ai contratti per i quali era stata costituita la riserva premi alla fine dell'esercizio (N-1)

- ✓ Somma dei premi a disposizione = Riserva Premi (34’837) + Rate a scadere nette (11’774) = 46’611
- ✓ Somma dei sinistri = Sinistri pagati + Sinistri riservati= 36’358

⇩

- ✓ Saldo (Premi – Sinistri) = 10’253 (S/P osservato 78%)
- ✓ La riserva premi ha tenuto, sufficienza di € 10’253

MATEMATICA ATTUARIALE

3) La riserva sinistri

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Agenda

1. La Riserva sinistri e il ciclo dei sinistri
2. Il quadro normativo
3. I moduli di vigilanza e l'avanzo/disavanzo
4. I triangoli run off
5. Il metodo attuariale Chain Ladder Paid

La Riserva Sinistri

- ✓ La **riserva sinistri** costituisce un **accantonamento** nel **passivo** dello Stato Patrimoniale, finalizzato a **fronteggiare i costi** che l'impresa **dovrà** sostenere in relazione **a sinistri avvenuti** nell'esercizio o in esercizi precedenti ed **in corso di liquidazione** alla data di chiusura del bilancio.
- ✓ Essa si genera:
  - ✓ Perché alla chiusura dell'esercizio, sinistri denunciati nell'esercizio o in esercizi precedenti non sono stati completamente liquidati
  - ✓ Perché alla chiusura dell'esercizio sinistri avvenuti nell'esercizio o in esercizi precedenti non sono stati denunciati (Incurred But Not Reported - IBNR)

Il ciclo dei sinistri

- ✓ Il ciclo è descritto da istanti temporali che caratterizzano il sinistro; ipotizziamo il più ampio dettaglio di tali istanti:
  - Data di avvenimento
  - Data di denuncia
  - Data di chiusura senza seguito
  - Data di riapertura
  - Data di pagamento parziale
  - Data di chiusura definitiva

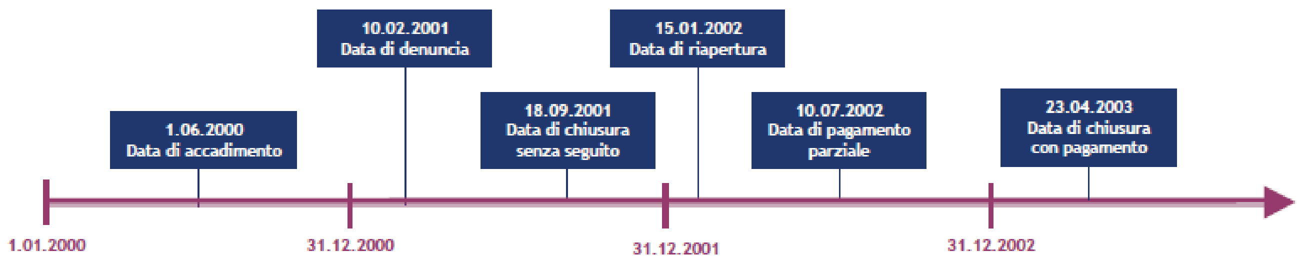
Il ciclo dei sinistri

✓ Da tale scadenzario si ricavano i possibili stati del sinistro:

- Sinistro aperto
- Sinistro IBNR
- Sinistro chiuso senza seguito
- Sinistro riaperto
- Sinistro pagato parzialmente
- Sinistro chiuso

Il ciclo dei sinistri

✓ Esempio A (classificazione per anno di avvenimento)



	Esercizio contabile			
Classificazione sinistro	2000	2001	2002	2003
Sinistri IBNR	no	si	no	no
Sinistri senza seguito	no	si	no	no
Sinistri riaperti	no	no	si	no
Sinistri pagati parziali	no	no	si	no
Sinistri aperti	no	no	si	no
Sinistri chiusi	no	no	no	si

Il ciclo dei sinistri

✓ Esempio B (classificazione per anno di avvenimento)

	Esercizio contabile			
Classificazione sinistro	2000	2001	2002	2003
Sinsitri IBNR	no	no	no	no
Sinistri senza seguito	no	no	no	no
Sinistri riaperti	no	no	si	no
Sinistri pagati parziali	no	si	no	no
Sinistri aperti	si	no	si	si
Sinistri chiusi	no	si	no	no

La classificazione dei sinistri

✓ Le modalità di classificazione dei sinistri concorrono all'individuazione delle generazioni che sono osservate in chiave storica per la proiezione dei comportamenti futuri:

- Generazioni per anno di denuncia: concorrono ad una generazione tutti i sinistri denunciati nel medesimo intervallo annuale, prescindendo dal momento dell'avvenimento.
- Generazioni per anno di avvenimento: concorrono ad una generazione tutti i sinistri avvenuti nel medesimo intervallo annuale, prescindendo dal momento della denuncia.

La classificazione dei sinistri

- ✓ Generazioni per anno di denuncia caratteristiche:
  - Disponibilità immediata del numero finale dei sinistri
  - Identificazione contabile (fino al 1999) con base dati di bilancio
  - Disomogeneità del periodo di esposizione dei sinistri: aggiustamenti non automatici dell'effetto inflattivo o dei mutamenti normativi e aziendali
  - Stima di riserva non comprensiva di IBNR
- ✓ Generazioni per anno di avvenimento caratteristiche:
  - Incognito fino all'ultimo accadimento il numero finale dei sinistri
  - Identificazione contabile (dal 2000) con base dati di bilancio
  - Omogeneità del periodo di esposizione dei sinistri: aggiustamenti automatici dell'effetto inflattivo o dei mutamenti normativi e aziendali
  - Stima di riserva comprensiva di IBNR

Agenda

1. La Riserva sinistri e il ciclo dei sinistri
2. Il quadro normativo
3. I moduli di vigilanza e l'avanzo/disavanzo
4. I triangoli run off
5. Il metodo attuariale Chain Ladder Paid

Riserva Sinistri – Definizioni (Regolamento n. 16)

- ✓ DEFINIZIONE: "La riserva sinistri comprende l'ammontare complessivo delle somme che, da una **prudente valutazione** effettuata in base ad elementi obiettivi, risultino necessarie per far fronte al pagamento dei sinistri, avvenuti nell'esercizio stesso o in quelli precedenti qualunque sia la data di denuncia, e non ancora pagati, nonché alle relative spese di liquidazione, indipendentemente dalla loro origine".
- ✓ La Riserva Sinistri si suddivide in:
  - ✓ Riserva per sinistri avvenuti e denunciati
  - ✓ Riserva per sinistri avvenuti ma non ancora denunciati (IBNR)
- ✓ La Riserva sinistri deve essere valutata al **costo ultimo** tenendo conto di tutti i futuri oneri prevedibili.
- ✓ Non è consentito effettuare **sconti impliciti** o espliciti o **attualizzazioni**.

Riserva Sinistri Denunciati – Metodi (Regolamento n. 16)

METODO DELL'INVENTARIO:

La riserva deve essere accantonata separatamente in maniera **analitica** per **ciascun sinistro** avvenuto e denunciato, il cui processo di liquidazione non si è ancora concluso alla fine dell'esercizio o per il quale non siano stati interamente pagati il risarcimento del danno, le spese dirette (**ALAE**) e le spese di liquidazione indirette (**ULAE**).

METODI STATISTICI-ATTUARIALI (da utilizzare per i rami caratterizzati da processi liquidativi lenti)

- andamento evolutivo del costo dei sinistri (evoluzione del processo inflattivo sia endogeno che esogeno)
- eliminazioni dei sinistri senza seguito
- riaperture dei sinistri
- intervallo temporale di differimento dei pagamenti

METODO COSTO MEDIO

Solo per la generazione corrente ad eccezione dei rami Credito e Cauzione

Riserva Sinistri IBNR– Definizioni (Regolamento n. 16)

DEFINIZIONE: "La riserva per sinistri avvenuti ma non ancora denunciati comprende l'ammontare complessivo delle somme che, da una stima prudente, risultino necessarie per far fronte al pagamento dei sinistri avvenuti nell'esercizio stesso o in quelli precedenti, ma non ancora denunciati alla data delle valutazioni nonché alle relative spese di liquidazione".

La valutazione deve essere effettuata:

- per **ramo** o in relazione alle differenti tipologie di rischio incluse nei singoli rami
- con metodi statistico-attuariali che tengano conto della **frequenza** e del **costo** dei sinistri tardivi, stimati sulla base di quanto osservato nell'esercizio corrente e negli esercizi precedenti

Agenda

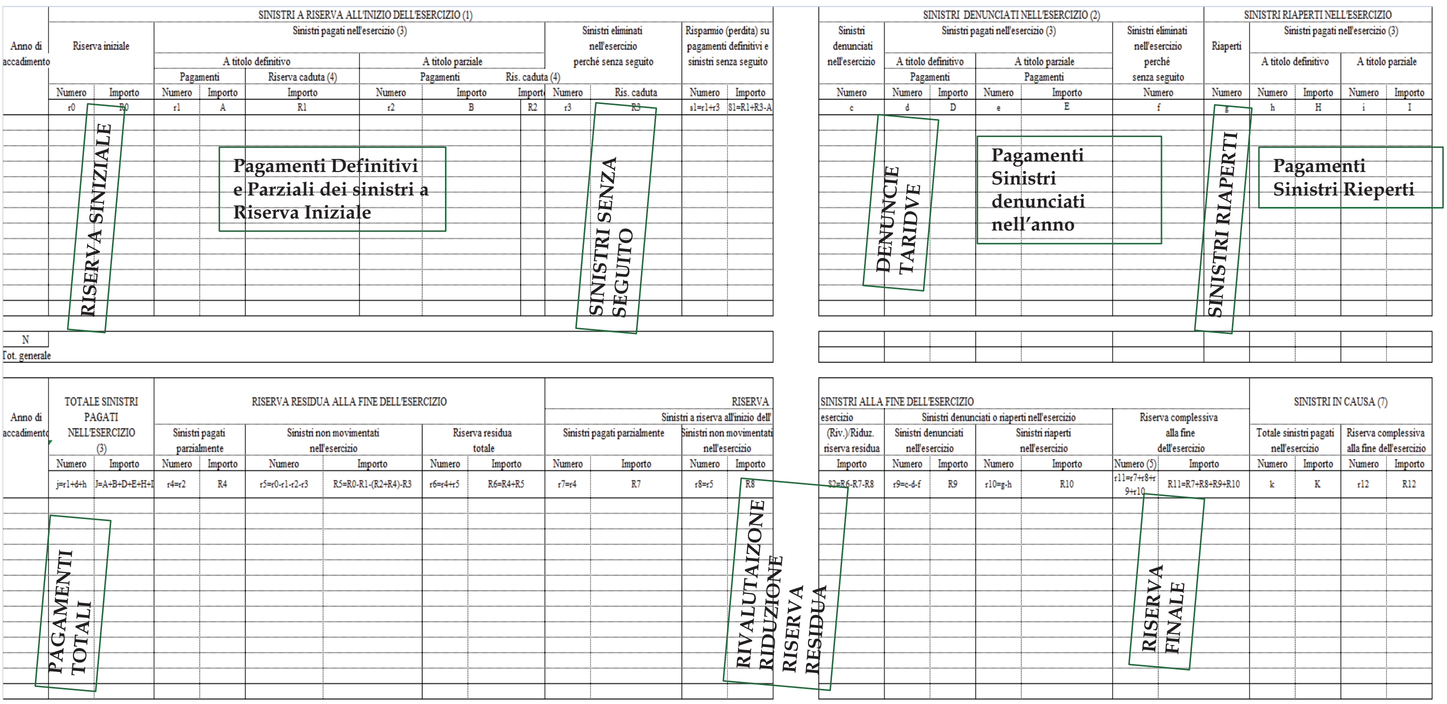
1. La Riserva sinistri e il ciclo dei sinistri
2. Il quadro normativo
3. I moduli di vigilanza e l'avanzo/disavanzo
4. I triangoli run off
5. Il metodo attuariale Chain Ladder Paid

I moduli di vigilanza

- ✓ Il Provvedimento ISVAP del 4 Dicembre 1998 ha introdotto i nuovi **moduli di vigilanza** a partire dal bilancio dell'esercizio 1998 (successivamente parzialmente modificati per il ramo RCA dal Regolamento 22 del 2008) dove sono riportati i dati necessari per:
  - ✓ Valutare la tenuta della riserva sinistri
  - ✓ Determinare i principali indicatori tecnici (costi medi, velocità di liquidazione…)
  - ✓ Costruire i triangoli di run - off

Il modulo 29

Modulo 29 Sviluppo Sinistri



L’avanzo/disavanzo della riserva sinistri

- ✓ Le imprese verificano, per ciascun ramo, che la riserva sinistri accantonata alla fine dell’esercizio precedente sia risultata sufficiente a far fronte, nel corso dell’esercizio, al pagamento dei sinistri degli esercizi precedenti e delle relative spese di liquidazione.

- ✓ Avanzo / Disavanzo della riserva sinistri: differenza tra la riserva sinistri iniziale e la somma dei pagamenti incrementali P effettuati nel corso dell’anno (per sinistri avvenuti negli esercizi precedenti) e della riserva sinistri finale (per sinistri avvenuti negli esercizi precedenti).

$$\boxed{ARS_{t+1} = RS_{31.12.t} - Pag_{t+1}^{\sin\leq t} - RS_{31.12.t+1}^{\sin\leq t}}$$

L’avanzo/disavanzo della riserva sinistri (Es. Modulo 17)

Modulo 17

SINISTRI DI ESERCIZI PRECEDENTI					
Riserva sinistri alla chiusura dell'esercizio precedente: risarcimenti e spese dirette	+	19	65,941,935		
spese di liquidazione	+	20	9,042,799	21	74,984,733
Saldo delle variazioni per differenza cambi (+ o -)				22	
Importi pagati: risarcimenti	-	23	12,352,459		
spese dirette	-	24	620,709		
spese di liquidazione	-	25	2,324,130	26	15,297,297
Riserva sinistri alla chiusura dell'esercizio: risarcimenti e spese dirette	-	27	50,639,502		
spese di liquidazione	-	28	7,354,375	29	57,993,877
Saldo dei movimenti di portafoglio (+ o -)				30	
Somme da recuperare da assicurati e da terzi alla chiusura dell'esercizio precedente	-	31			
Somme recuperate nell'esercizio da assicurati e da terzi	+	32			
Somme da recuperare da assicurati e da terzi alla chiusura dell'esercizio	+	33		34	-
TOTALE C				35	1,693,559

AVANZO: 74,98 – 15,30 - 58,00 = € 1,70 milioni (2,3% della riserva iniziale)

Agenda

1. La Riserva sinistri e il ciclo dei sinistri
2. Il quadro normativo
3. I moduli di vigilanza e l'avanzo/disavanzo
4. I triangoli run off
5. Il metodo attuariale Chain Ladder Paid

Triangoli Run off

✓ Il flusso informativo viene generalmente organizzato per:
- Generazione (di avvenimento)
- Anno di sviluppo

In modo da creare il tipico schema triangolare, run off, idoneo a contenere qualunque tipo di informazione sui sinistri

Anni di sviluppo

Generazioni	0	...	j	...	...	...	t
0	$x_{0,0}$		$x_{0,j}$				$x_{0,t}$
...							
i	$x_{i,0}$	...	$x_{i,j}$	...	$x_{i,t-i}$		
...							
...							
...							
t	$x_{t,0}$						

Epoca di valutazione t

Triangoli Run off

- ✓ L'elemento generico del run off X(i,j), che può incorporare informazioni differenti relative al sinistro, si riferisce:
  - Alla generazione i-esima
  - Dopo j anni di differimento
  - Nell'anno di bilancio i+j
  - Con i=0,…t e j=0,…,t-i
- ✓ Il valore t rappresenta la lunghezza massima del run off coincidente con l'estensione massima dello sviluppo della generazione meno recente e con l'epoca di valutazione.

Triangoli Run off – Lettura dei triangoli

- ✓ Riga:
  - Lettura del comportamento dell'impresa relativamente alla generica generazione i-esima nei vari anni di sviluppo
- ✓ Colonna:
  - Lettura del comportamento dell'impresa relativamente al generico anno di sviluppo j-esimo per le diverse generazioni
- ✓ Diagonale:
  - Lettura del comportamento dell'impresa relativamente al generico anno di bilancio i+j-esimo, con i+j=t coincidente con l'epoca di valutazione

Triangoli Run off – Lettura dei triangoli

✓ L'elemento generico del run off X(i,j) può rappresentare:

- Importo dei sinistri pagati
- Importo dei sinistri riservati
- Numero dei sinistri denunciati
- Numero dei sinistri pagati
- Numero dei sinistri riservati
- Numero dei sinistri senza seguito
- Numero dei sinistri riaperti

Agenda

Il metodo Chain Ladder Paid

- ✓ Il metodo appartenente alla famiglia dei c.d. Loss Development Methods utilizza il triangolo run off degli importi pagati cumulati (Z(i,j)) ottenuti a partire dagli importi pagati incrementali (Y(i,j))

- ✓ L'ipotesi di base è la progressione dei pagamenti si mantenga sostanzialmente la medesima per ogni generazione; perciò i rapporti Z(i, j+1)/Z(i,j) non dipendono dalla generazione i ma solo dall'anno di sviluppo j.

- ✓ Possono verificarsi delle distorsioni che possono indebolire le ipotesi del metodo:
  - ✓ Cambiamenti nella politica di gestione dei sinistri tra le diverse generazioni
  - ✓ Inflazione esogena/endogena

Triangolo run off dei pagamenti incrementali

	Anno di sviluppo (j)							
Anno di generazione (i)		0	1	2	.	n-1	n	
	1	$Y_{1,0}$	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	.	$Y_{1,n-1}$	$Y_{1,n}$	
	2	$Y_{2,0}$	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	.	$Y_{1,n-1}$		
	3	$Y_{3,0}$	$Y_{3,1}$	.	.			
	.	.	.	$Y_{n-2,2}$				
	n-1	$Y_{n-1,0}$	$Y_{n-1,1}$					
	n	$Y_{n,0}$						

Yij = pagato nell'anno (j) per sinistri avvenuti nell'anno (i) i = 0, 1, ..., n; j = 0, ..., n-i

Triangolo run off dei pagamenti cumulati

	Anno di sviluppo (j)							
Anno di generazione (i)		0	1	2	.	n-1	n	
	1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$Z_{1,2}$	.	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$	
	2	$Z_{2,0}$	$Z_{2,1}$	$Z_{2,2}$	.	$Z_{1,n-1}$		
	3	$Z_{3,0}$	$Z_{3,1}$	.	.			
	.	.	.	$Z_{n-2,2}$				
	n-1	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$					
	n	$Z_{n,0}$						

$$Z_{i,j} = \sum_{h=0}^{j} Y_{i,h} \qquad i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, n - i$$

Ipotesi del Chain Ladder Paid

Si ipotizza che:
"le colonne del triangolo di run-off del pagato cumulato siano proporzionali, a meno di disturbi di natura casuale."
$\Rightarrow$ ad esempio che se

$$\frac{Z_{1,4}}{Z_{1,3}} = 1.3$$

valgono anche

$$\frac{Z_{1,4}}{Z_{1,3}} = \frac{Z_{2,4}}{Z_{2,3}} = \frac{Z_{3,4}}{Z_{3,3}} = \ldots = 1.3$$

L'ipotesi implica che il modello di run-off è stabile rispetto agli anni di sviluppo. Pertanto il metodo è inadeguato se fattori interni o esterni causano un cambiamento nel modello di run-off.

Chain Ladder Paid: stima dei fattori di sviluppo

Stimiamo i fattori di proporzionalità detti anche di sviluppo tra le colonne successive.

Innanzi tutto si determinano i fattori di sviluppo (link ratio) m_{ij} che rappresenta il rapporti tra Z_{ij+1} e Zij

		Anno di sviluppo (j)						
Anno di generazione (i)		0	1	2	.	n-1	n	
	1	$m_{1,0}$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	.	$m_{1,n-1}$		
	2	$m_{2,0}$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	.			
	3	$m_{3,0}$	$m_{3,1}$	.				
	.	.	.					
	n-1	$m_{n-1,0}$						
	n							

Chain Ladder Paid: selezione dei fattori di sviluppo

Una volta costruito il triangolo dei fattori di sviluppo occorre definire i fattori di sviluppo selezionati (uno per ogni anno di sviluppo j) da utilizzare per la proiezione dei pagamenti cumulati e di conseguenza stimare i pagamenti futuri e la riserva sinistri

Generalmente la regola più seguita per selezionare il fattore di sviluppo per ogni antidurata è quella di effettuare una opportuna media ponderata tra i diversi fattori di sviluppo (eventualmente scartando i valori anomali) relativi alla medesima antidurata, in cui i pesi sono rappresentati dai pagamenti cumulati:

Fattori di sviluppo selezionati

$$\widehat{m}_h = \frac{\sum_{i=0}^{n-h-1} Z_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{n-h-1} Z_{i,h}} \qquad h = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$$

Chain Ladder Paid: stima pagamenti futuri

Il triangolo di run-off degli importi stimati dei pagamenti cumulati è dato da

	Anno di sviluppo (j)							
Anno di generazione (i)		0	1	2	.	n-1	n	
	1					.	$Z_{1,n}$	
	2					$Z_{2,n-1}$	$Z_{2,n-1}\prod_{k=n-1}^{n-1}\hat{m}_k$	
	.				.	.	.	
	.			.	.	.	.	
	n-1		$Z_{n-1,1}$	$Z_{n-1,1}\,\hat{m}_1$	.	$Z_{n-1,1}\prod_{k=1}^{n-2}\hat{m}_k$	$Z_{n-1,1}\prod_{k=1}^{n-1}\hat{m}_k$	
	n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,0}\,\hat{m}_0$	$Z_{n,0}\,\hat{m}_0\,\hat{m}_1$	.	$Z_{n,0}\prod_{k=0}^{n-2}\hat{m}_k$	$Z_{n,0}\prod_{k=0}^{n-1}\hat{m}_k$	
Fattori			$\hat{m}_0$	$\hat{m}_1$	.	$\hat{m}_{n-2}$	$\hat{m}_{n-1}$	

Quindi per stimare Z_{ij} $(k-i<j\le k)$: $Z_{i,j} = Z_{i,n-i}\prod_{k=n-i}^{j-1}\hat{m}_k$

Chain Ladder Paid: stima riserva sinistri

La riserva sinistri relativa alla generica i-esima generazione è data da:

$R_i = Z_{i,n} - Z_{i,n-i}$

Mentre la riserva sinistri totale è dalla somma delle riserve relative alle singole generazioni:

$R_{tot} = R_2 + R_3 + \ldots + R_n$

Chain Ladder Paid: ESEMPIO - Step 1

✓ Step 1: Dati input triangolo run off importi pagati incrementali

Tabella dei pagamenti incrementali

Anno di avvenimento	Anno di sviluppo 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	coda
1990	95,381	77,738	32,071	16,510	12,521	10,807	6,489	5,342	2,841	1,212	989
1991	112,016	96,182	36,802	18,286	16,032	11,858	7,799	5,805	2,898		
1992	129,740	103,471	39,658	24,188	17,955	12,058	8,854	5,979			
1993	143,453	128,929	52,166	29,516	16,831	13,608	11,068				
1994	164,625	135,006	63,818	31,536	20,738	14,152					
1995	178,451	143,778	70,145	40,071	22,397						
1996	191,673	151,741	79,453	46,082							
1997	201,797	159,669	83,426								
1998	213,138	191,603									
1999	234,452										

Chain Ladder Paid: ESEMPIO - Step 2

✓ Step 2: Determinazione del triangolo run off importi pagati cumulati

Tabella dei pagamenti cumulati

Anno di avvenimento	Anno di sviluppo 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	coda
1990	95,381	173,119	205,190	221,700	234,221	245,028	251,517	256,859	259,700	260,912	261,901
1991	112,016	208,198	245,000	263,286	279,318	291,176	298,975	304,780	307,678		
1992	129,740	233,211	272,869	297,057	315,012	327,070	335,924	341,903			
1993	143,453	272,382	324,548	354,064	370,895	384,503	395,571				
1994	164,625	299,631	363,449	394,985	415,723	429,875					
1995	178,451	322,229	392,374	432,445	454,842						
1996	191,673	343,414	422,867	468,949							
1997	201,797	361,466	444,892								
1998	213,138	404,741									
1999	234,452										

Chain Ladder Paid: ESEMPIO - Step 3 e 4

✓ Step 3: determinazione del triangolo run off dei fattori di sviluppo

Tabella dei fattori di sviluppo

Anno di avvenimento	Anno di sviluppo 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1990	1.8150	1.1853	1.0805	1.0565	1.0461	1.0265	1.0212	1.0111	1.0047	1.0038
1991	1.8586	1.1768	1.0746	1.0609	1.0425	1.0268	1.0194	1.0095		
1992	1.7975	1.1701	1.0886	1.0604	1.0383	1.0271	1.0178			
1993	1.8988	1.1915	1.0909	1.0475	1.0367	1.0288				
1994	1.8201	1.2130	1.0868	1.0525	1.0340					
1995	1.8057	1.2177	1.1021	1.0518						
1996	1.7917	1.2314	1.1090							
1997	1.7912	1.2308								
1998	1.8990									
1999										

✓ Step 4: selezione dei fattori di sviluppo da usare per la proiezione

Vettore selezionato	**M*0**	**M*1**	**M*2**	**M*3**	**M*4**	**M*5**	**M*6**	**M*7**	**M*8**	**M*9**
	1.8307	1.2067	1.0926	1.0542	1.0387	1.0274	1.0193	1.0102	1.0047	1.0038

Chain Ladder Paid: ESEMPIO – Step 5

✓ Step 5: proiezione dei pagamenti futuri cumulati

Tabella dei pagamenti cumulati proiettati

Anno di avvenimento	Anno di sviluppo 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	coda
1990	95,381	173,119	205,190	221,700	234,221	245,028	251,517	256,859	259,700	260,912	261,901
1991	112,016	208,198	245,000	263,286	279,318	291,176	298,975	304,780	307,678	309,114	310,286
1992	129,740	233,211	272,869	297,057	315,012	327,070	335,924	341,903	345,397	347,009	348,324
1993	143,453	272,382	324,548	354,064	370,895	384,503	395,571	403,214	407,334	409,235	410,786
1994	164,625	299,631	363,449	394,985	415,723	429,875	441,661	450,194	454,794	456,917	458,649
1995	178,451	322,229	392,374	432,445	454,842	472,438	485,390	494,768	499,824	502,157	504,060
1996	191,673	343,414	422,867	468,949	494,378	513,503	527,582	537,775	543,270	545,805	547,874
1997	201,797	361,466	444,892	486,096	512,455	532,279	546,872	557,438	563,134	565,762	567,907
1998	213,138	404,741	488,397	533,630	562,566	584,329	600,350	611,949	618,202	621,087	623,441
1999	234,452	429,209	517,923	565,890	596,576	619,654	636,643	648,944	655,575	658,634	661,131

Chain Ladder Paid: ESEMPIO - Step 6

✓ Step 6: determinazione dei pagamenti futuri incrementali

Tabella dei pagamenti incrementali proiettati

Anno di avvenimento	Anno di sviluppo 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	coda
1990	95,381	77,738	32,071	16,510	12,521	10,807	6,489	5,342	2,841	1,212	989
1991	112,016	96,182	36,802	18,286	16,032	11,858	7,799	5,805	2,898	1,436	1,172
1992	129,740	103,471	39,658	24,188	17,955	12,058	8,854	5,979	3,494	1,612	1,315
1993	143,453	128,929	52,166	29,516	16,831	13,608	11,068	7,643	4,120	1,901	1,551
1994	164,625	135,006	63,818	31,536	20,738	14,152	11,786	8,533	4,600	2,122	1,732
1995	178,451	143,778	70,145	40,071	22,397	17,596	12,953	9,378	5,056	2,333	1,903
1996	191,673	151,741	79,453	46,082	25,429	19,125	14,079	10,193	5,495	2,535	2,069
1997	201,797	159,669	83,426	41,204	26,359	19,824	14,593	10,566	5,696	2,628	2,145
1998	213,138	191,603	83,656	45,233	28,936	21,763	16,020	11,599	6,253	2,885	2,354
1999	234,452	194,757	88,713	47,968	30,686	23,079	16,989	12,300	6,631	3,060	2,497

Chain Ladder Paid: ESEMPIO - Step 7

✓ Step 7: determinazione della riserva sinistri

Anno di avvenimento	Sinistri pagati	Sinistri a riserva	Costo Generazione
1990	260,912	989	261,901
1991	307,678	2,608	310,286
1992	341,903	6,421	348,324
1993	395,571	15,215	410,786
1994	429,875	28,774	458,649
1995	454,842	49,218	504,060
1996	468,949	78,925	547,874
1997	444,892	123,015	567,907
1998	404,741	218,700	623,441
1999	234,452	426,679	661,131
Totale	3,743,815	950,543	

MATEMATICA ATTUARIALE

4) Calcolo del premio puro

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Agenda

1. **Assicurazioni Caso Vita**
2. **Assicurazioni Caso Morte**
3. **Assicurazioni Miste**

Assicurazioni Caso Vita

- Nelle assicurazioni caso vita l'assicuratore si impegna a pagare somme prefissate (o determinabili in modo prefissato) nel caso in cui l'assicurato raggiunga in vita una prefissata età (o più età in caso di rendita).
- Tali forme assicurative hanno lo scopo di costituire una disponibilità finanziaria in caso di vita ad una certa epoca.
- Vedremo le seguenti principali forme assicurative caso vita su una testa:
  - Capitale Differito
  - Rendita:
    - Vitalizia o Temporanea
    - Anticipata o Postiipata
    - Immediata o differita

Capitale Differito

- Nell'assicurazione di capitale differito su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di un capitale unitario alla fine dell'anno n se la testa è in vita, altrimenti 0.

$$\boxed{{}_nE_x = {}_np_x \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = {}_nE_x}$$

$$\boxed{PA = \frac{{}_nE_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}}$$

Rendita Vitalizia Immediata Anticipata

✓ Nell'assicurazione di rendita vitalizia immediata anticipata su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di una rata unitaria all'inizio di ciascun anno fintantochè la testa è in vita.

$$\boxed{\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=0}^{\omega-x-2} {}_{t/1}p_x \cdot v^{t+1} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t = \frac{N_x}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = \ddot{a}_x}$$

$$\boxed{PA = n.a.}$$

Rendita Vitalizia Immediata Posticipata

✓ Nell'assicurazione di rendita vitalizia immediata posticipata su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di una rata unitaria alla fine di ciascun anno fintantochè la testa è in vita.

$$\boxed{a_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-2} {}_{t/1}p_x \cdot v^{t+1} = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = a_x}$$

$$\boxed{PA = n.a.}$$

Rendita Temporanea Immediata Anticipata

- ✓ Nell'assicurazione di rendita temporanea immediata anticipata su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di una rata unitaria all'inizio di ciascun anno se l'assicurato è in vita fino all'epoca n.

$$\boxed{{}_{/n}\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t-1/1}p_x \cdot v^t = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = {}_{/n}\ddot{a}_x}$$

$$\boxed{PA = n.a.}$$

Rendita Temporanea Immediata Posticipata

- ✓ Nell'assicurazione di rendita temporanea immediata posticipata su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di una rata unitaria alla fine di ciascun anno se l'assicurato è in vita fino all'epoca n.

$$\boxed{{}_{/n}a_x = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1/1}p_x \cdot v^t = \sum_{t=1}^{n} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = {}_{/n}a_x}$$

$$\boxed{PA = n.a.}$$

Rendita Vitalizia Differita Posticipata

✓ Nell'assicurazione di rendita vitalizia differita posticipata su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di una rata unitaria alla fine di ciascun anno a partire dall'epoca m fintantochè la testa è in vita.

$$\boxed{{}_{m/}a_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m} = {}_mp_x \cdot v^m \cdot \sum_{t=0}^{\omega-x-m-1} {}_{t/1}p_{x+m} \cdot v^{t+1} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot v^m \sum_{t=1}^{\omega-x-m-1} \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}} \cdot v^t = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = {}_{/m}a_x}$$

$$\boxed{PA = \frac{{}_{m/}a_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}}$$

Capitale Differito PU – Esempio numerico (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 34 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 15*
  - *Capitale assicurato: € 10'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 3%*

Capitale Differito PU – Esempio numerico (2/3)

Esempio

- *Premio Unico*

$$PU = C \cdot {}_nE_x = C \cdot {}_np_x \cdot v^n = C \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Caratteristiche del contratto

$$PU = C \cdot {}_{15}E_{34} = C \cdot {}_{15}p_{34} \cdot v^{15} = C \cdot \frac{l_{49}}{l_{34}} \cdot v^{15} = C \cdot \frac{D_{49}}{D_{34}}$$

Capitale Differito PU – Esempio numerico (3/3)

Esempio

- *Premio Unico*

x	l(x)
34	97,765
35	97,664
36	97,561
37	97,453
38	97,341
39	97,222
40	97,095
41	96,958
42	96,813
43	96,656
44	96,487
45	96,300
46	96,096
47	95,876
48	95,629
49	95,362

$$PU = 10'000 \cdot \frac{95362}{97765} \cdot (1+3\%)^{-15} =$$

$$= 10'000 \cdot 0{,}9754 \cdot 0{,}6419 = €6'261$$

Rendita temporanea immediata anticipata – Esempio (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 34 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Rata annua: € 1'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 3%*

Rendita temporanea immediata anticipata – Esempio (2/3)

Esempio

- *Premio Unico*

$$\boxed{PU = R \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x = R \cdot \left(1 + \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t-1/1}p_x \cdot v^t\right) = R \cdot \left(\sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t\right) = R \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Caratteristiche del contratto

$$\boxed{PU = R \cdot {}_{/10}\ddot{a}_{34} = R \cdot \left(1 + \sum_{t=1}^{9} {}_{t-1/1}p_{34} \cdot v^t\right) = R \cdot \left(\sum_{t=0}^{9} \frac{l_{34+t}}{l_{34}} \cdot v^t\right) = 1000 \cdot \frac{N_{34} - N_{44}}{D_{34}}}$$

Rendita temporanea immediata anticipata – Esempio (3/3)

Esempio

- *Premio Unico*

x	l(x)	p(x,t)	v^(t)	p(x,t)*(v^t)
34	97,765	1.0000	1.000	1.0000
35	97,664	0.9990	0.971	0.9699
36	97,561	0.9979	0.943	0.9406
37	97,453	0.9968	0.915	0.9122
38	97,341	0.9957	0.888	0.8846
39	97,222	0.9945	0.863	0.8578
40	97,095	0.9931	0.837	0.8317
41	96,958	0.9918	0.813	0.8064
42	96,813	0.9903	0.789	0.7817
43	96,656	0.9887	0.766	0.7577
				8.7428

$$\boxed{PU = R \cdot {}_{/10}\ddot{a}_{34} = €1000 \cdot 8{,}7428}$$

$$\boxed{PU = €8'742{,}8}$$

Capitale Differito PA – Esempio numerico (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 50 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 20*
  - *Durata pagamento premi 20*
  - *Capitale assicurato: € 50'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*

Capitale Differito PA – Esempio numerico (2/3)

Esempio

- *Premio Annuo*

$$PA = C \cdot \frac{{}_{n}E_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x} = C \cdot \frac{{}_{n}p_x \cdot v^n}{\left(1 + \sum_{t=1}^{m-1} {}_{t-1/1}p_x \cdot v^t\right)} = C \cdot \frac{\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n}{\sum_{t=0}^{m-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^t} = C \cdot \frac{\frac{D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}}$$

$\Downarrow$ Caratteristiche del contratto

$$PA = C \cdot \frac{{}_{20}E_{50}}{{}_{/20}\ddot{a}_{50}} = C \cdot \frac{{}_{20}p_{50} \cdot v^{20}}{\left(1 + \sum_{t=1}^{19} {}_{t-1/1}p_{50} \cdot v^t\right)} = C \cdot \frac{\frac{l_{70}}{l_{50}} \cdot v^{20}}{\sum_{t=0}^{19} \frac{l_{50+t}}{l_{50}} \cdot v^t} = C \cdot \frac{\frac{D_{70}}{D_{50}}}{\frac{N_{50} - N_{70}}{D_{50}}}$$

Capitale Differito PA – Esempio numerico (3/3)

Esempio

- *Premio Annuo*

x	l(x)	p(x,t)	v^(t)	p(x,t)*(v^t)
50	95,071	1.0000	1.000	1.0000
51	94,752	0.9966	0.980	0.9771
52	94,398	0.9929	0.961	0.9544
53	94,009	0.9888	0.942	0.9318
54	93,563	0.9841	0.924	0.9092
55	93,091	0.9792	0.906	0.8869
56	92,578	0.9738	0.888	0.8647
57	92,011	0.9678	0.871	0.8425
58	91,369	0.9611	0.853	0.8203
59	90,665	0.9537	0.837	0.7980
60	89,869	0.9453	0.820	0.7755
61	89,013	0.9363	0.804	0.7530
62	88,089	0.9266	0.788	0.7306
63	87,093	0.9161	0.773	0.7082
64	86,031	0.9049	0.758	0.6858
65	84,873	0.8927	0.743	0.6633
66	83,602	0.8794	0.728	0.6406
67	82,203	0.8646	0.714	0.6175
68	80,670	0.8485	0.700	0.5941
69	79,014	0.8311	0.686	0.5705
70	77,204	**0.8121**	**0.673**	[redacted]
				15.7238

$$\boxed{{}_{20}E_{50} = 0{,}5465}$$

$$\boxed{{}_{/20}\ddot{a}_{50} = 15{,}7238}$$

$$\boxed{PU = 50'000 \cdot {}_{20}E_{50} = €27'324{,}81}$$

$$\boxed{PA = 50'000 \cdot \frac{{}_{20}E_{50}}{{}_{/20}\ddot{a}_{50}} = €1'737{,}80}$$

Agenda

Assicurazioni Caso Morte

- ✓ Nelle assicurazioni caso morte l'assicuratore si impegna a pagare somme prefissate (o determinabili in modo prefissato) ai beneficiari nel caso in cui l'assicurato deceda in un prefissato periodo di tempo.

- ✓ Tali forme assicurative hanno lo scopo di coprire il rischio di morte e le relative conseguenze finanziarie

- ✓ Vedremo le seguenti principali forme assicurative caso morte su una testa:

  - ✓ Temporanea Caso Morte (TCM)

  - ✓ Vita Intera

Temporanea Caso Morte (TCM)

✓ Nell'assicurazione di temporanea caso morte su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di un capitale unitario alla fine dell'anno in cui l'assicurato muore, se il decesso avviene entro n anni, altrimenti 0.

$$\boxed{{}_nA_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/1}q_x \cdot v^{t+1} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = {}_nA_x}$$

$$\boxed{PA = \frac{{}_nA_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}}$$

Vita Intera

✓ Nell'assicurazione di vita intera su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di un capitale unitario alla fine dell'anno in cui l'assicurato muore.

$$\boxed{A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_{t/1}q_x \cdot v^{t+1} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} = \frac{M_x}{D_x}}$$

$$\boxed{PU = {}_nA_x}$$

$$\boxed{PA = \frac{{}_nA_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}}$$

TCM PU – Esempio (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*

TCM PU – Esempio (2/3)

Esempio

- *Premio Unico*

$$\boxed{PU = C \cdot {}_nA_x = C \cdot \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/1}q_x \cdot v^{t+1} = C \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} = C \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

$\Downarrow$ Caratteristiche del contratto

$$\boxed{PU = C \cdot {}_{10}A_{30} = C \cdot \sum_{t=0}^{9} {}_{t/1}q_{30} \cdot v^{t+1} = C \cdot \sum_{t=0}^{9} \frac{l_{30+t} - l_{30+t+1}}{l_{30}} \cdot v^{t+1} = C \cdot \frac{M_{30} - M_{40}}{D_{30}}}$$

TCM PU – Esempio (3/3)

Esempio

- *Premio Unico*

x	l(x)	q(x,t-1,t)	v^(t+1)	q(x,t-1,t)*(v^t)
30	98,123	0.0009	0.962	0.0009
31	98,036	0.0009	0.925	0.0008
32	97,949	0.0009	0.889	0.0008
33	97,859	0.0010	0.855	0.0008
34	97,765	0.0010	0.822	0.0008
35	97,664	0.0011	0.790	0.0008
36	97,561	0.0011	0.760	0.0008
37	97,453	0.0011	0.731	0.0008
38	97,341	0.0012	0.703	0.0008
39	97,222	0.0013	0.676	0.0009
40	97,095			
				0.0084

$$\boxed{PU = C \cdot {}_{10}A_{30} = €100'000 \cdot 0{,}0084}$$

$$\boxed{PU = €837{,}99}$$

Agenda

1. Assicurazioni Caso Vita
2. Assicurazioni Caso Morte
3. Assicurazioni Miste

Assicurazioni Miste

- ✓ Le assicurazioni miste sono combinazioni di assicurazioni caso vita e di assicurazioni caso morte, tramite le quali si copre il rischio di morte e contemporaneamente ci si garantisce un capitale o una rendita in caso di vita
- ✓ Vedremo le seguenti principali forme assicurative miste:
  - ✓ Mista Ordinaria (o semplice)

Mista Ordinaria (Semplice)

- ✓ Nell'assicurazione mista ordinaria o semplice su una testa di età x, la prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di un capitale unitario alla fine dell'anno n se la testa è in vita, oppure il pagamento di un capitale unitario alla fine dell'anno in cui l'assicurato decede (se avviene entro l'anno n).

$$\boxed{\begin{aligned} A_{x\overline{n}|} &= {}_nE_x + {}_nA_x = {}_np_x \cdot v^n + \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/1}q_x \cdot v^{t+1} = \\ &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n + \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \end{aligned}}$$

$$\boxed{PU = A_{x\overline{n}|}}$$

$$\boxed{PA = \frac{A_{x\overline{n}|}}{{}_{/m}\ddot{a}_x}}$$

Mista Semplice PU – Esempio (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 10'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*

Mista Semplice PU – Esempio (2/3)

Esempio

- *Premio Unico*

$$\boxed{\begin{aligned} PU &= C \cdot A_{x\overline{n}|} = C \cdot {}_nE_x + C \cdot {}_nA_x = C \cdot {}_np_x \cdot v^n + C \cdot \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/1}q_x \cdot v^{t+1} = \\ &= C \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n + C \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} + C \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \end{aligned}}$$

Mista Semplice PU – Esempio (3/3)

Esempio

- *Premio Unico*

x	l(x)	p(x,t)	q(x,t-1,t)	v^(t)	q(x,t-1,t)*(v^t)
30	98,123	1.0000			
31	98,036	0.9991	0.0009	0.962	0.0009
32	97,949	0.9982	0.0009	0.925	0.0008
33	97,859	0.9973	0.0009	0.889	0.0008
34	97,765	0.9963	0.0010	0.855	0.0008
35	97,664	0.9953	0.0010	0.822	0.0008
36	97,561	0.9943	0.0011	0.790	0.0008
37	97,453	0.9932	0.0011	0.760	0.0008
38	97,341	0.9920	0.0011	0.731	0.0008
39	97,222	0.9908	0.0012	0.703	0.0008
40	97,095	**0.9895**	0.0013	**0.676**	0.0009
					0.0084

$$\boxed{PU = C \cdot {}_{10}A_{30} + C \cdot {}_{10}E_{30}}$$

$$\boxed{C \cdot {}_{10}A_{30} = €83{,}80}$$

$$\boxed{C \cdot {}_{10}E_{30} = €6'684{,}86}$$

$$\boxed{PU = €6'768{,}66}$$

Simboli di Commutazione

i = tasso tecnico

v = 1/(1+i)

l_x = sopravviventi all'età x

$$D_x = v^x \cdot l_x$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{\omega-1}$$

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_{\omega-1}$$

$$C_x = v^x \cdot \left(l_x - l_{x+1}\right)$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{\omega-1}$$

$$R_x = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_{\omega-1}$$

MATEMATICA ATTUARIALE

5) La riserva matematica

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Agenda

1. Riserva Matematica prospettiva
2. Riserva Matematica ricorrente
3. Premio di rischio e premio di risparmio

Riserva Matematica Prospettiva

- In generale il principio di equità richiede che il premio unico o i premi annui siano tali che:

  Prest[0,n] = Premi[0,n]

- Tale principio non implica però che analoghe uguaglianze sussistano su sottointervalli dell'intervallo [0,n]. Si ha pertanto che:

  Prest[t,n] <=> Premi[t,n]

  Prest[0,t] <=> Premi[0,t]

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Prest}[t,n] = \mathrm{Premi}[t,n] + V_t^{(p)} \\ &V_t^{(p)} = \mathrm{Prest}[t,n] - \mathrm{Premi}[t,n] \end{aligned}}$$

Riserva Matematica Prospettiva = Valore attuale medio delle prestazioni future della C.A. meno Valore Attuale medio dei premi futuri pagati dall'assicurato

Capitale Differito

- Premio unico:

$$\boxed{V_t = {}_{n-t}E_{x+t} = {}_{n-t}p_{x+t} \cdot v^{n-t} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} \cdot v^{n-t} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}}$$

- Premio annuo durata n

$$\boxed{V_t = {}_{n-t}E_{x+t} - P \cdot {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = {}_{n-t}p_{x+t} \cdot v^{n-t} - P \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot v^s = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}}$$

Rendita Vitalizia Differita Posticipata

✓ Premio unico, durante il periodo di differimento

$$V_t = {}_{m-t/}a_{x+t} = {}_{m-t}E_{x+t} \cdot a_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_{x+t}} \cdot v^{m-t} \sum_{s=1}^{\omega-x-m-1} \frac{l_{x+m+s}}{l_{x+m}} \cdot v^s = \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+t}}$$

✓ Premio annuo, durante il periodo di differimento

$$V_t = {}_{m-t/}a_{x+t} - P \cdot {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = \frac{l_{x+m}}{l_{x+t}} \cdot v^{m-t} \sum_{s=1}^{\omega-x-m-1} \frac{l_{x+m+s}}{l_{x+m}} \cdot v^s - P \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot v^s =$$

$$= \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+t}} - P \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

✓ Al termine del periodo di differimento (sia premio annuo che unico):

$$V_t = a_{x+t} = \sum_{s=1}^{\omega-x-t-1} \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot v^s = \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t}}$$

Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 50 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 20*
  - *Durata pagamento premi 20*
  - *Capitale assicurato: € 50'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*
- *Epoca valutazione Riserva Matematica: t=10*

Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (2/3)

Esempio

- *Premio Unico*

$$\boxed{V_t = C\cdot_{n-t}E_{x+t} = C\cdot_{n-t}p_{x+t}\cdot v^{n-t} = C\cdot_{10}p_{60}\cdot v^{10}}$$

- *Premio Annuo*

$$\boxed{V_t = C\cdot_{n-t}E_{x+t} - P\cdot_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = C\cdot_{n-t}p_{x+t}\cdot v^{n-t} - P\cdot\sum_{s=0}^{n-t-1}\frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}}\cdot v^s}$$

$\Downarrow$ Caratteristiche del contratto (PA= 1737,80)

$$\boxed{V_{10} = C\cdot_{10}E_{60} - P_{(50,20)}\cdot_{/10}\ddot{a}_{60} = C\cdot_{10}p_{60}\cdot v^{10} - P_{(50,20)}\cdot\sum_{s=0}^{9}\frac{l_{60+s}}{l_{60}}\cdot v^s}$$

Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (3/3)

Esempio

x	l(x)	p(x+t,s-t)	v^(s-t)	p(x+t,s-t)*(v^(s-t))
60	89,869	1.0000	1.000	1.0000
61	89,013	0.9905	0.980	0.9711
62	88,089	0.9802	0.961	0.9421
63	87,093	0.9691	0.942	0.9132
64	86,031	0.9573	0.924	0.8844
65	84,873	0.9444	0.906	0.8554
66	83,602	0.9303	0.888	0.8260
67	82,203	0.9147	0.871	0.7963
68	80,670	0.8976	0.853	0.7661
69	79,014	0.8792	0.837	0.7357
70	77,204	**0.8591**	**0.820**	[redacted]
				8.6904

$$\boxed{PU = €27'324{,}81}$$

$$\boxed{PA = €1'737{,}80}$$

$$\boxed{{}_{10}E_{60} = 0{,}8591\cdot 0{,}82 = 0{,}7047}$$

$$\boxed{{}_{/10}\ddot{a}_{60} = 8{,}6904}$$

Premio unico

$$\boxed{V_{10} = C\cdot_{10}E_{60} = €35'236{,}99}$$

Premio annuo

$$\boxed{\begin{gathered} V_{10} = C\cdot_{10}E_{60} - PA\cdot_{/10}\ddot{a}_{60} = 35'236{,}99 - 1'737{,}80\cdot 8{,}6904 = \\ V_{10} = €20'134{,}87 \end{gathered}}$$

Temporanea Caso Morte (TCM)

- ✓ Premio unico:

$$V_t = {}_{n-t}A_{x+t} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+t+s} - l_{x+t+s+1}}{l_{x+t}} \cdot v^{s+1} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}}$$

- ✓ Premio annuo

$$V_t = {}_{n-t}A_{x+t} - P \cdot {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+t+s} - l_{x+t+s+1}}{l_{x+t}} \cdot v^{s+1} - P \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot v^{s} =$$
$$= \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - P \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

Vita Intera

- ✓ Premio unico

$$V_t = A_{x+t} = \sum_{s=0}^{\omega-x-t-1} \frac{l_{x+t+s} - l_{x+t+s+1}}{l_{x+t}} \cdot v^{s+1} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

- ✓ Premio annuo

$$V_t = A_{x+t} - P \cdot {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = \sum_{s=0}^{\omega-x-t-1} \frac{l_{x+t+s} - l_{x+t+s+1}}{l_{x+t}} \cdot v^{s+1} - P \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot v^{s} =$$
$$= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

Mista Ordinaria (Semplice)

- ✓ Premio unico:

$$\boxed{V_t = A_{x+t,\overline{n-t|}} = {}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t}A_{x+t}}$$

- ✓ Premio annuo

$$\boxed{V_t = A_{x+t,\overline{n-t|}} - P\cdot{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = {}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t}A_{x+t} - P\cdot{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}}$$

TCM PU e PA – Esempio numerico (1/5)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*
- *Epoca valutazione Riserva Matematica: t=5*

TCM PU e PA – Esempio numerico (2/5)

Esempio

- *Calcolo del Premio Unico*

$$\boxed{PU = C \cdot {}_{n}A_{x} = C \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1} = C \cdot \sum_{t=0}^{9} \frac{l_{30+t} - l_{30+t+1}}{l_{30}} \cdot v^{t+1}}$$

- *Calcolo del Premio annuo*

$$\boxed{PU = \frac{C \cdot {}_{n}A_{x}}{{}_{/n}\ddot{a}_{x}} = \frac{C \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{t+1}}{\sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot v^{t}} = \frac{C \cdot \sum_{t=0}^{9} \frac{l_{30+t} - l_{30+t+1}}{l_{30}} \cdot v^{t+1}}{\sum_{t=0}^{9} \frac{l_{30+t}}{l_{30}} \cdot v^{t}}}$$

TCM PU e PA – Esempio numerico (3/5)

Esempio

x	l(x)	q(x,t-1,t)	v^(t+1)	q(x,t-1,t)*(v^t)	p(x,t)	p(x,t)*v^(t)
30	98,123		1.000		1.0000	1.0000
31	98,036	0.0009	0.962	0.0009	0.9991	0.9607
32	97,949	0.0009	0.925	0.0008	0.9982	0.9229
33	97,859	0.0009	0.889	0.0008	0.9973	0.8866
34	97,765	0.0010	0.855	0.0008	0.9963	0.8517
35	97,664	0.0010	0.822	0.0008	0.9953	0.8181
36	97,561	0.0011	0.790	0.0008	0.9943	0.7858
37	97,453	0.0011	0.760	0.0008	0.9932	0.7547
38	97,341	0.0011	0.731	0.0008	0.9920	0.7249
39	97,222	0.0012	0.703	0.0008	0.9908	0.6961
40	97,095	0.0013	0.676	0.0009		
				0.0084		**8.4015**

$$\boxed{PU = C \cdot {}_{10}A_{30} = €100'000 \cdot 0{,}0084}$$

$$\boxed{PU = €837{,}99}$$

$$\boxed{PA = \frac{C \cdot {}_{10}A_{30}}{{}_{/10}\ddot{a}_{30}} = \frac{€100'000 \cdot 0{,}0084}{8{,}4015}}$$

$$\boxed{PA = €99{,}74}$$

TCM PU e PA – Esempio numerico (4/5)

Esempio

- *Riserva Matematica Premio Unico – tempo t=5*

$$V_t = C \cdot {}_{n-t}A_{x+t} = C \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+t+s} - l_{x+t+s+1}}{l_{x+t}} \cdot v^{s+1} = C \cdot {}_5A_{35} = C \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{35+s} - l_{35+s+1}}{l_{35}} \cdot v^{s+1}$$

- *Riserva Matematica Premio annuo – tempo t=5*

$$V_t = C \cdot {}_{n-t}A_{x+t} - P \cdot {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = C \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+t+s} - l_{x+t+s+1}}{l_{x+t}} \cdot v^{s+1} - P \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{l_{x+t+s}}{l_{x+t}} \cdot v^s =$$

$$= C \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{35+s} - l_{35+s+1}}{l_{35}} \cdot v^{s+1} - P \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{l_{35+s}}{l_{35}} \cdot v^s$$

TCM PU e PA – Esempio numerico (5/5)

Esempio

x	l(x)	q(x+t,s+t-1,s+t)	v^(s+1)	q(x+t,s+t-1,s+t)*(v^s)	p(x+t,s-t)	p(x+t,s-t)*v^(s-t)
35	97,664		1.000		1.0000	1.0000
36	97,561	0.0011	0.962	0.0010	0.9989	0.9605
37	97,453	0.0011	0.925	0.0010	0.9978	0.9226
38	97,341	0.0011	0.889	0.0010	0.9967	0.8861
39	97,222	0.0012	0.855	0.0010	0.9955	0.8509
40	97,095	0.0013	0.822	0.0011		
				0.0052		**4.6201**

$${}_5A_{35} = 0{,}0052$$

$${}_{/5}\ddot{a}_{35} = 4{,}6201$$

Premio unico

$$V_5 = C \cdot {}_5A_{35} = €100k \cdot 0{,}0052$$
$$V_5 = €517{,}13$$

Premio annuo

$$V_5 = C \cdot {}_5A_{35} - P \cdot {}_{/5}\ddot{a}_{35} = €100'000 \cdot 0{,}0052 - 99{,}74 \cdot 4{,}6201 =$$
$$V_5 = €56{,}31$$

Agenda

1. **Riserva Matematica prospettiva**
2. **Riserva Matematica ricorrente**
3. **Premio di rischio e premio di risparmio**

Equazione di Fouret e Riserva Matematica Ricorrente

✓ **Equazione di Fouret** (equilibrio attuariale all'epoca t):

$$\underbrace{V_t + P_{t+1}}_{\text{Somme a disposizione della C.A.}} = \underbrace{C \cdot v \cdot q_{x+t}}_{\text{Prestazione caso morte}} + \underbrace{V_{t+1} \cdot v \cdot p_{x+t}}_{\text{Prestazione caso vita}}$$

✓ **Formula Ricorrente per la Riserva Matematica**

$$\boxed{V_{t+1} = \frac{(V_t + P_{t+1}) \cdot (1+i) - C \cdot q_{x+t}}{p_{x+t}}}$$

Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (1/3)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 50 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 20*
  - *Durata pagamento premi 20*
  - *Capitale assicurato: € 50'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*

Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (2/3)

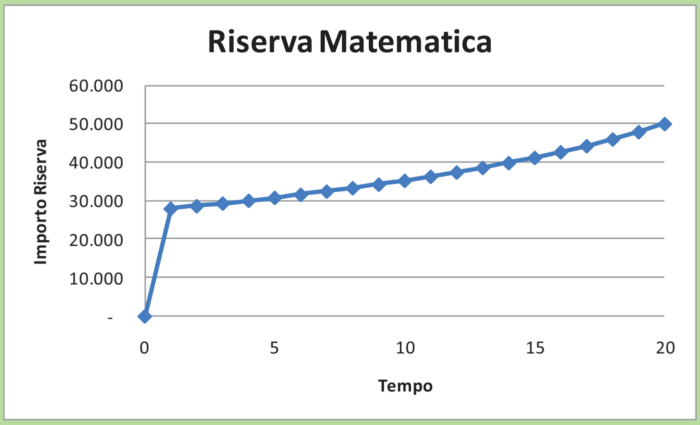
Esempio

Premio unico

$$\boxed{V_{t+1} = \frac{(V_t + P_{t+1}) \cdot (1+i)}{p_{x+t}}; \quad P_{t+1} = 0 \quad per \quad t > 1}$$

$$\boxed{PU = €27'324{,}81}$$

x	l(x)	p(x+t,1)	(1+i)	P	V(t)
50	95,071			27,325	-
51	94,752	0.9966	1.020	-	27,965
52	94,398	0.9963	1.020	-	28,631
53	94,009	0.9959	1.020	-	29,325
54	93,563	0.9953	1.020	-	30,054
55	93,091	0.9950	1.020	-	30,811
56	92,578	0.9945	1.020	-	31,601
57	92,011	0.9939	1.020	-	32,431
58	91,369	0.9930	1.020	-	33,312
59	90,665	0.9923	1.020	-	34,243
60	89,869	0.9912	1.020	-	35,237
61	89,013	0.9905	1.020	-	36,287
62	88,089	0.9896	1.020	-	37,401
63	87,093	0.9887	1.020	-	38,585
64	86,031	0.9878	1.020	-	39,843
65	84,873	0.9865	1.020	-	41,194
66	83,602	0.9850	1.020	-	42,657
67	82,203	0.9833	1.020	-	44,251
68	80,670	0.9813	1.020	-	45,994
69	79,014	0.9795	1.020	-	47,897
70	77,204	0.9771	1.020	-	50,000



Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (3/3)

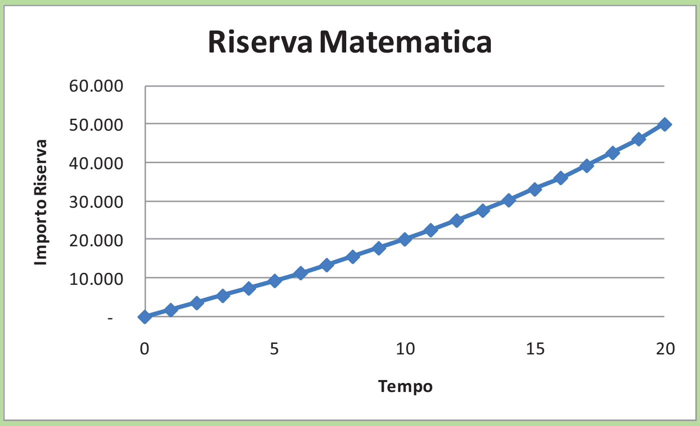
Esempio

Premio annuo

$$\boxed{V_{t+1} = \frac{(V_t + P_{t+1}) \cdot (1+i)}{p_{x+t}}}$$

$$\boxed{PA = €1'737,80}$$

x	l(x)	p(x+t,1)	(1+i)	P	V(t)
50	95,071			1,738	-
51	94,752	0.9966	1.020	1,738	1,779
52	94,398	0.9963	1.020	1,738	3,600
53	94,009	0.9959	1.020	1,738	5,467
54	93,563	0.9953	1.020	1,738	7,384
55	93,091	0.9950	1.020	1,738	9,352
56	92,578	0.9945	1.020	1,738	11,374
57	92,011	0.9939	1.020	1,738	13,456
58	91,369	0.9930	1.020	1,738	15,607
59	90,665	0.9923	1.020	1,738	17,829
60	89,869	0.9912	1.020	1,738	20,135
61	89,013	0.9905	1.020	1,738	22,525
62	88,089	0.9896	1.020	1,738	25,007
63	87,093	0.9887	1.020	1,738	27,592
64	86,031	0.9878	1.020	1,738	30,286
65	84,873	0.9865	1.020	1,738	33,110
66	83,602	0.9850	1.020	1,738	36,085
67	82,203	0.9833	1.020	1,738	39,235
68	80,670	0.9813	1.020	1,738	42,587
69	79,014	0.9795	1.020	1,738	46,159
70	77,204	0.9771	1.020	-	50,000



TCM PU e PA – Esempio numerico (1/3)

Esempio

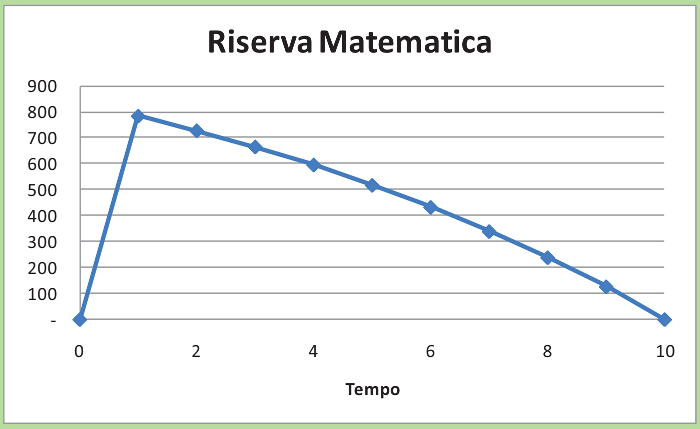
- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*

TCM PU e PA – Esempio numerico (2/3)

Premio unico

$$V_{t+1}=\frac{(V_t+P_{t+1})\cdot(1+i)-C\cdot q_{x+t}}{p_{x+t}};\quad P_{t+1}=0\quad per\quad t>1$$

x	l(x)	q(x+t,1)	p(x+t,1)	(1+i)	C	P	V(t)
30	98,123		1.000			838	-
31	98,036	0.0009	0.99911	1.04	100,000	-	783.45
32	97,949	0.0009	0.99912	1.04	100,000	-	727.18
33	97,859	0.0009	0.99908	1.04	100,000	-	664.88
34	97,765	0.0010	0.99903	1.04	100,000	-	595.39
35	97,664	0.0010	0.99897	1.04	100,000	-	517.13
36	97,561	0.0011	0.99894	1.04	100,000	-	432.23
37	97,453	0.0011	0.99889	1.04	100,000	-	339.05
38	97,341	0.0011	0.99885	1.04	100,000	-	238.28
39	97,222	0.0012	0.99878	1.04	100,000	-	126.21
40	97,095	0.0013	0.99869	1.04	100,000		-



$$PU=€837,99$$

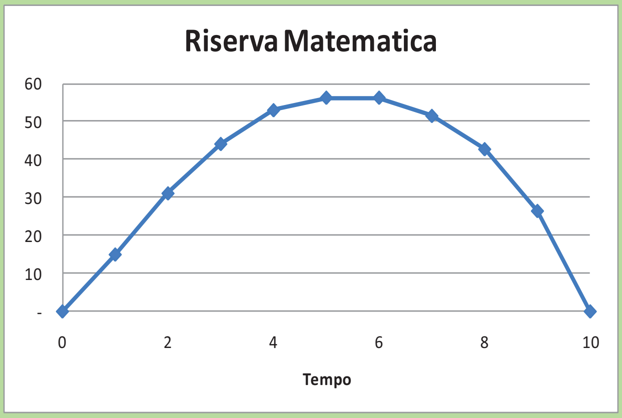
TCM PU e PA – Esempio numerico (3/3)

Premio annuo

$$V_{t+1}=\frac{(V_t+P_{t+1})\cdot(1+i)-C\cdot q_{x+t}}{p_{x+t}};$$

$$PA=€99,74$$

x	l(x)	q(x+t,1)	p(x+t,1)	(1+i)	C	P	V(t)
30	98,123		1.000			99.74	-
31	98,036	0.0009	0.99911	1.04	100,000	99.74	14.99
32	97,949	0.0009	0.99912	1.04	100,000	99.74	31.10
33	97,859	0.0009	0.99908	1.04	100,000	99.74	44.12
34	97,765	0.0010	0.99903	1.04	100,000	99.74	53.01
35	97,664	0.0010	0.99897	1.04	100,000	99.74	56.31
36	97,561	0.0011	0.99894	1.04	100,000	99.74	56.31
37	97,453	0.0011	0.99889	1.04	100,000	99.74	51.51
38	97,341	0.0011	0.99885	1.04	100,000	99.74	42.74
39	97,222	0.0012	0.99878	1.04	100,000	99.74	26.47
40	97,095	0.0013	0.99869	1.04	100,000		-



Agenda

1. **Riserva Matematica prospettiva**
2. **Riserva Matematica ricorrente**
3. **Premio di rischio e premio di risparmio**

Equazione di Fouret e Scomposizione del premio puro

✓ **Equazione di Fouret** (equilibrio attuariale all'epoca t):

$$\boxed{\underbrace{V_t + P_{t+1}}_{\text{Somme a disposizione della C.A.}} = \underbrace{C \cdot v \cdot q_{x+t}}_{\text{Prestazione caso morte}} + \underbrace{V_{t+1} \cdot v \cdot p_{x+t}}_{\text{Prestazione caso vita}}}$$

✓ **Scomposizione del Premio Puro**

$$\boxed{P = \underbrace{\left(v \cdot V_{t+1} - V_t\right)}_{\text{Premio di risparmio}} + \underbrace{\left[\left(C - V_{t+1}\right) \cdot v \cdot q_{x+t}\right]}_{\text{Premio di rischio}}}$$

Premio di Risparmio

- **Premio di Risparmio:**

$$\boxed{P^S = \left(v \cdot V_{t+1} - V_t\right)}$$

rappresenta all'istante t la differenza tra il valore attuale (puramente finanziario) della riserva matematica al tempo t+1 e la riserva matematica al tempo t.

E' quella somma che aggiunta alla riserva matematica e capitalizzata finanziariamente per un anno fornisce la riserva matematica dell'anno successivo.

$$\boxed{V_{t+1} = \left(P^S + V_t\right) \cdot (1+i)}$$

Premio di Rischio

- **Capitale sotto rischio:** è il capitale che la compagnia non ha disposizione all'epoca t+1 in caso di decesso dell'assicurato.
- $$\boxed{\left(C - V_{t+1}\right)}$$

- **Premio di Rischio:**

$$\boxed{P^R = \left(C - V_{t+1}\right) \cdot v \cdot q_{x+t}}$$

rappresenta il premio naturale (di rischio) relativo ad un capitale che è pari al capitale assicurato meno la riserva matematica al tempo t+1. Esso non apporta alcun contributo alla formazione della riserva in quanto è interamente "consumato" nell'anno per assicurare il capitale sotto rischio.

Pertanto serve a garantire il rischio che corre la compagnia per quella parte di capitale assicurato che non ha a disposizione (capitale sotto rischio)

TCM PU e PA – Esempio numerico (1/3)

Esempio

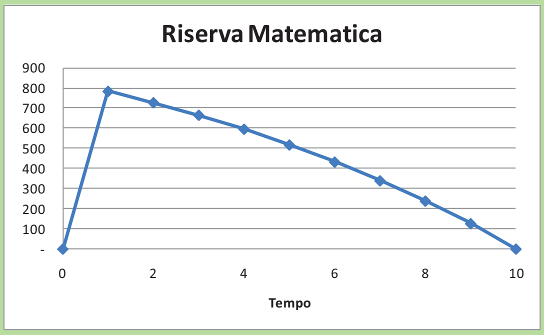
- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 100’000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*

TCM PU e PA – Esempio numerico (2/3)

Premio unico

$$\boxed{P^S = \left(v \cdot V_{t+1} - V_t\right)} \qquad \boxed{P^R = \left(C - V_{t+1}\right) \cdot v \cdot q_{x+t}}$$

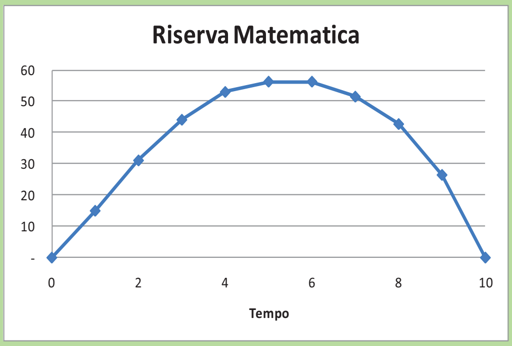
x	l(x)	q(x+t,1)	p(x+t,1)	(1+i)	C	P	P^S	P^R	V(t)
30	98,123		1.000			837.99	753.32	84.67	-
31	98,036	0.0009	0.99911	1.04	100,000	-	- 84.24	84.24	783.45
32	97,949	0.0009	0.99912	1.04	100,000	-	- 87.88	87.88	727.18
33	97,859	0.0009	0.99908	1.04	100,000	-	- 92.38	92.38	664.88
34	97,765	0.0010	0.99903	1.04	100,000	-	- 98.15	98.15	595.39
35	97,664	0.0010	0.99897	1.04	100,000	-	- 101.52	101.52	517.13
36	97,561	0.0011	0.99894	1.04	100,000	-	- 106.22	106.22	432.23
37	97,453	0.0011	0.99889	1.04	100,000	-	- 109.94	109.94	339.05
38	97,341	0.0011	0.99885	1.04	100,000	-	- 116.92	116.92	238.28
39	97,222	0.0012	0.99878	1.04	100,000	-	- 126.21	126.21	126.21
40	97,095	0.0013	0.99869	1.04	100,000				-



TCM PU e PA – Esempio numerico (3/3)

Premio annuo $\boxed{P^S = \left(v \cdot V_{t+1} - V_t\right)}$ $\boxed{P^R = \left(C - V_{t+1}\right) \cdot v \cdot q_{x+t}}$

x	l(x)	q(x+t,1)	p(x+t,1)	(1+i)	C	P	P^S	P^R	V(t)
30	98,123		1.0000			99.74	14.41	85.33	-
31	98,036	0.0009	0.9991	1.04	100,000	99.74	14.92	84.83	14.99
32	97,949	0.0009	0.9991	1.04	100,000	99.74	11.32	88.43	31.10
33	97,859	0.0009	0.9991	1.04	100,000	99.74	6.85	92.89	44.12
34	97,765	0.0010	0.9990	1.04	100,000	99.74	1.14	98.61	53.01
35	97,664	0.0010	0.9990	1.04	100,000	99.74	-2.16	101.91	56.31
36	97,561	0.0011	0.9989	1.04	100,000	99.74	-6.78	106.53	56.31
37	97,453	0.0011	0.9989	1.04	100,000	99.74	-10.41	110.15	51.51
38	97,341	0.0011	0.9989	1.04	100,000	99.74	-17.29	117.04	42.74
39	97,222	0.0012	0.9988	1.04	100,000	99.74	-26.47	126.21	26.47
40	97,095	0.0013	0.9987	1.04	100,000				-



Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (1/3)

Esempio

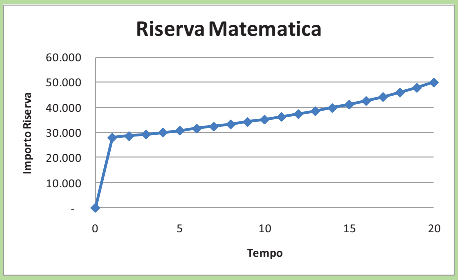
- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 50 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 20*
  - *Durata pagamento premi 20*
  - *Capitale assicurato: € 50'000*
- *Basi tecniche:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*

Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (2/3)

Premio unico

$$P^S = \left(v \cdot V_{t+1} - V_t\right) \qquad P^R = \left(C - V_{t+1}\right) \cdot v \cdot q_{x+t}$$

x	l(x)	q(x+t,1)	p(x+t,1)	(1+i)	C	P	P^S	P^R	V(t)
50	95,071				50,000	27,325	27,417	- 92	-
51	94,752	0.0034	0.9966	1.02	50,000	-	105	- 105	27,965
52	94,398	0.0037	0.9963	1.02	50,000	-	119	- 119	28,631
53	94,009	0.0041	0.9959	1.02	50,000	-	140	- 140	29,325
54	93,563	0.0047	0.9953	1.02	50,000	-	152	- 152	30,054
55	93,091	0.0050	0.9950	1.02	50,000	-	171	- 171	30,811
56	92,578	0.0055	0.9945	1.02	50,000	-	195	- 195	31,601
57	92,011	0.0061	0.9939	1.02	50,000	-	228	- 228	32,431
58	91,369	0.0070	0.9930	1.02	50,000	-	259	- 259	33,312
59	90,665	0.0077	0.9923	1.02	50,000	-	303	- 303	34,243
60	89,869	0.0088	0.9912	1.02	50,000	-	339	- 339	35,237
61	89,013	0.0095	0.9905	1.02	50,000	-	381	- 381	36,287
62	88,089	0.0104	0.9896	1.02	50,000	-	428	- 428	37,401
63	87,093	0.0113	0.9887	1.02	50,000	-	476	- 476	38,585
64	86,031	0.0122	0.9878	1.02	50,000	-	544	- 544	39,843
65	84,873	0.0135	0.9865	1.02	50,000	-	626	- 626	41,194
66	83,602	0.0150	0.9850	1.02	50,000	-	726	- 726	42,657
67	82,203	0.0167	0.9833	1.02	50,000	-	841	- 841	44,251
68	80,670	0.0187	0.9813	1.02	50,000	-	964	- 964	45,994
69	79,014	0.0205	0.9795	1.02	50,000	-	1,123	-1,123	47,897
70	77,204	0.0229	0.9771	1.02	50,000				50,000

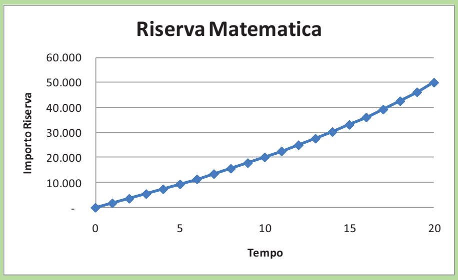


Capitale Differito PU e PA – Esempio numerico (3/3)

Premio annuo

$$P^S = \left(v \cdot V_{t+1} - V_t\right) \qquad P^R = \left(C - V_{t+1}\right) \cdot v \cdot q_{x+t}$$

x	l(x)	q(x+t,1)	p(x+t,1)	(1+i)	C	P	P^S	P^R	V(t)
50	95,071				50,000	1,738	1,744	- 6	-
51	94,752	0.0034	0.9966	1.02	50,000	1,738	1,751	- 13	1,779
52	94,398	0.0037	0.9963	1.02	50,000	1,738	1,760	- 22	3,600
53	94,009	0.0041	0.9959	1.02	50,000	1,738	1,772	- 34	5,467
54	93,563	0.0047	0.9953	1.02	50,000	1,738	1,784	- 46	7,384
55	93,091	0.0050	0.9950	1.02	50,000	1,738	1,799	- 61	9,352
56	92,578	0.0055	0.9945	1.02	50,000	1,738	1,819	- 81	11,374
57	92,011	0.0061	0.9939	1.02	50,000	1,738	1,845	- 107	13,456
58	91,369	0.0070	0.9930	1.02	50,000	1,738	1,873	- 135	15,607
59	90,665	0.0077	0.9923	1.02	50,000	1,738	1,911	- 173	17,829
60	89,869	0.0088	0.9912	1.02	50,000	1,738	1,948	- 210	20,135
61	89,013	0.0095	0.9905	1.02	50,000	1,738	1,992	- 254	22,525
62	88,089	0.0104	0.9896	1.02	50,000	1,738	2,044	- 306	25,007
63	87,093	0.0113	0.9887	1.02	50,000	1,738	2,100	- 362	27,592
64	86,031	0.0122	0.9878	1.02	50,000	1,738	2,175	- 437	30,286
65	84,873	0.0135	0.9865	1.02	50,000	1,738	2,268	- 530	33,110
66	83,602	0.0150	0.9850	1.02	50,000	1,738	2,381	- 643	36,085
67	82,203	0.0167	0.9833	1.02	50,000	1,738	2,517	- 779	39,235
68	80,670	0.0187	0.9813	1.02	50,000	1,738	2,667	- 929	42,587
69	79,014	0.0205	0.9795	1.02	50,000	1,738	2,860	-1,123	46,159
70	77,204	0.0229	0.9771	1.02	50,000				50,000



MATEMATICA ATTUARIALE

6) L'utile

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it
Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Equazione di Fouret ed Equilibrio attuariale (1/2)

- **Equazione di Fouret** (equilibrio attuariale all'epoca t):

$$\boxed{\underbrace{V_t + P_{t+1}}_{\text{Somme a disposizione della C.A.}} = \underbrace{C \cdot v \cdot q_{x+t}}_{\text{Prestazione caso morte}} + \underbrace{V_{t+1} \cdot v \cdot p_{x+t}}_{\text{Prestazione caso vita}}}$$

- **Equilibrio attuariale all'epoca t+1 (Equazione di Kanner)**

$$\boxed{(V_t + P_{t+1}) \cdot (1+i) = C \cdot q_{x+t} + V_{t+1} \cdot p_{x+t}}$$

Equazione di Fouret ed Equilibrio attuariale (2/2)

- **L'equilibrio attuariale** rappresentato nell'equazione di Fouret è dovuto fondamentalmente al fatto che il premio puro P è stato determinato al tempo 0 in base al principio di equità, cioè garantisce l'uguaglianza in media tra gli impegni dell'assicuratore (V.A.M. della C.A.) e gli impegni dell'assicurato (V.A.M. dell'assicurato).

- Se le basi tecniche utilizzate nel calcolo del premio e della riserva si realizzano la polizza assicurativa non produce alcun utile (perdita) in media.

- Le imprese di assicurazione però non possono operare con un utile atteso nullo perché:
  - La probabilità del loro fallimento sarebbe non sostenibile
  - Sono degli operatori finanziari privati che hanno come obiettivo quello di produrre un utile per gli azionisti

La formazione dell'utile (1/2)

- Nella realtà la base tecnica (i,q) impiegata nel calcolo del premio e della riserva sarà diversa da quella attesa realisticamente dall'impresa di assicurazione. Infatti ai della formazione dell'utile atteso (e del caricamento di sicurezza), il calcolo del premio e delle riserve avviene su base "prudenziale", cioè "favorevole" all'assicuratore.

- Si definiscono pertanto:
  - **Basi tecniche del 1° ordine (i,q)**: basi tecniche utilizzate per il calcolo del premio puro e della riserva matematica
  - **Basi tecniche del 2° ordine (i',q')**: basi tecniche che l'impresa di assicurazione si aspetta si realizzino

La formazione dell'utile (2/2)

- **Base finanziaria**: l'impresa di assicurazione considera nel calcolo del premio puro un tasso di interesse i generalmente minore di quello che si aspetta i':
  - i<i'
- **Base demografica:**
  - Nelle <u>coperture caso morte</u> l'impresa applica nel calcolo del premio puro dei tassi di mortalità q più elevati di quelli realisticamente attesi
    - q>q'
  - Nelle <u>coperture caso vita</u> l'impresa applica nel calcolo del premio puro dei tassi di mortalità q più bassi di quelli realisticamente attesi
    - q<q'

La formula di Homans (1/2)

- Se usiamo le basi tecniche del 2° ordine nell'equazione di Kanner si ottiene:

$$\boxed{\left(V_t + P_{t+1}\right)\cdot\left(1+i'\right) = C\cdot q'_{x+t} + V_{t+1}\cdot p'_{x+t} + u_{t+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(V_t + P_{t+1}\right)\cdot\left(1+i'\right) - V_{t+1} - \left(C - V_{t+1}\right)\cdot q'_{x+t} = u_{t+1}}$$

- N.B. <u>le riserve matematiche ed il premio puro sono calcolati con le basi tecniche del 1° ordine (i,q)</u>.

La formula di Homans (2/2)

✓ Sottraendo la precedente espressione all'equazione di Kanner si ottiene la formula di **Homans**:

$$\boxed{u_{t+1} = \underbrace{(V_t + P_{t+1})\cdot(i' - i)}_{\text{Utile da interesse}} + \underbrace{(C - V_{t+1})\cdot(q_{x+t} - q'_{x+t})}_{\text{Utile da mortalità}}}$$

✓ **Utile da interesse**: rappresenta il margine finanziario, positivo se i'>i. Rappresenta il sovrainteressa che la C.A. ha sulle risorse disponibili (riserva matematica + premio puro)

✓ **Utile da mortalità:** rappresenta il margine demografico. Se il capitale sotto rischio è positivo (come per le coperture caso morte), tale quantità è positiva se q>q'. Se il capitale sotto rischio è negativo (come per le coperture caso vita, ad esempio il capitale differito), tale quantità è positiva se q<q'. Vi sarà dunque utile di "sottomortalità o di "sovramortalità" a se conda del segno del capitale sotto rischio.

Utile totale atteso

✓ Supponiamo che premio puro e riserva matematica siano calcolati con la base tecnica del 1° ordine (i,q). Fissata la base tecnica realistica del 2° ordine (i', q') si valutino gli utili annui attesi $u_1, u_2, \ldots, u_n$

✓ All'epoca della stipulazione del contratto è possibile calcolare il **valore attuale atteso dell'utile** (o **utile totale atteso) U,** relativo all'intera operazione assicurativa.

✓ Ricordando che il generico utile u_{t+1} è riferito finanziariamente all'epoca t+1 e probabilisticamente all'epoca t (in quanto relativo ad un contratto supposto in vita all'epoca t), si ha:

$$\boxed{U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1} \cdot (1+i')^{-(t+1)} \cdot {}_t p'_x}$$

Utile atteso residuo

- ✓ Nel caso in cui la polizza sia arrivata all'antidurata τ e si voglia determinare l'utile generato dalla polizza dall'epoca τ fino alla scadenza, si ottiene l'utile atteso residuo all'epoca τ:

$$\boxed{U(\tau)=\sum_{t=\tau}^{n-1} u_{t+1}\cdot\left(1+i'\right)^{-(t+1-\tau)}\cdot{}_{t-\tau}p'_{x+\tau}}$$

TCM PA – Esempio numerico (1/2)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10 = durata pagamento premi*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*

- *Basi tecniche 1° ordine:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*
- *Basi tecniche 2° ordine:*
  - *Tavola demografica: 80% SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 6%*

TCM PA – Esempio numerico (2/2)

$$\boxed{u_{t+1} = \left(V_t + P_{t+1}\right)\cdot\left(i' - i\right) + \left(C - V_{t+1}\right)\cdot\left(q_{x+t} - q'_{x+t}\right)}$$

$$\boxed{U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1}\cdot\left(1+i'\right)^{-(t+1)}\cdot {}_tp'_x}$$

x	l(x)	q(x+t,1)	q'(x+t,1)	C	V(t)	C-V(t)	P	i'-i	UM(t)	UI(t)	U(t)	p'(x,t)	U(t)*p'(x,t)*v'^(t+1)
30	98,123				-		99.74					1.0000	
31	98,036	0.0009	0.0007	100,000	14.99	99,985	99.74	2.00%	17.75	1.99	19.74	0.9993	18.63
32	97,949	0.0009	0.0007	100,000	31.10	99,969	99.74	2.00%	17.64	2.29	19.94	0.9986	17.73
33	97,859	0.0009	0.0007	100,000	44.12	99,956	99.74	2.00%	18.39	2.62	21.01	0.9978	17.62
34	97,765	0.0010	0.0008	100,000	53.01	99,947	99.74	2.00%	19.32	2.88	22.20	0.9971	17.55
35	97,664	0.0010	0.0008	100,000	56.31	99,944	99.74	2.00%	20.51	3.06	23.57	0.9963	17.56
36	97,561	0.0011	0.0008	100,000	56.31	99,944	99.74	2.00%	21.20	3.12	24.32	0.9954	17.08
37	97,453	0.0011	0.0009	100,000	51.51	99,948	99.74	2.00%	22.16	3.12	25.28	0.9945	16.73
38	97,341	0.0011	0.0009	100,000	42.74	99,957	99.74	2.00%	22.91	3.03	25.94	0.9936	16.18
39	97,222	0.0012	0.0010	100,000	26.47	99,974	99.74	2.00%	24.34	2.85	27.19	0.9927	15.99
40	97,095	0.0013	0.0011	100,000	-	100,000		2.00%	26.25	2.52	28.78		15.95
													171.02

$$\boxed{U = € \quad 171{,}02}$$

TCM PU – Esempio numerico (1/2)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*
- *Basi tecniche 1° ordine:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*
- *Basi tecniche 2° ordine:*
  - *Tavola demografica: 80% SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 6%*

TCM PU – Esempio numerico (2/2)

$$u_{t+1} = \left(V_t + P_{t+1}\right)\cdot\left(i' - i\right) + \left(C - V_{t+1}\right)\cdot\left(q_{x+t} - q'_{x+t}\right)$$

$$U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1}\cdot\left(1+i'\right)^{-(t+1)}\cdot {}_t p'_x$$

x	l(x)	q(x+t,1)	q'(x+t,1)	C	V(t)	C-V(t)	P	i'-i	UM(t)	UI(t)	U(t)	p'(x,t)	U(t)*p'(x,t)*v'^(t+1)
30	98,123				-		838					1.0000	
31	98,036	0.0009	0.0007	100,000	783.45	99,217	-	2.00%	17.61	16.76	34.37	0.9993	32.43
32	97,949	0.0009	0.0007	100,000	727.18	99,273	-	2.00%	17.52	15.67	33.19	0.9986	29.52
33	97,859	0.0009	0.0007	100,000	664.88	99,335	-	2.00%	18.28	14.54	32.82	0.9978	27.52
34	97,765	0.0010	0.0008	100,000	595.39	99,405	-	2.00%	19.22	13.30	32.51	0.9971	25.70
35	97,664	0.0010	0.0008	100,000	517.13	99,483	-	2.00%	20.42	11.91	32.32	0.9963	24.08
36	97,561	0.0011	0.0008	100,000	432.23	99,568	-	2.00%	21.12	10.34	31.46	0.9954	22.09
37	97,453	0.0011	0.0009	100,000	339.05	99,661	-	2.00%	22.09	8.64	30.74	0.9945	20.35
38	97,341	0.0011	0.0009	100,000	238.28	99,762	-	2.00%	22.87	6.78	29.65	0.9936	18.50
39	97,222	0.0012	0.0010	100,000	126.21	99,874	-	2.00%	24.32	4.77	29.08	0.9927	17.11
40	97,095	0.0013	0.0011	100,000	-	100,000		2.00%	26.25	2.52	28.78		15.95
													233.24

$$U = € \quad 233{,}24$$

Capitale Differito PA – Esempio numerico (1/2)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 50 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 20*
  - *Durata pagamento premi 20*
  - *Capitale assicurato: € 50'000*

- *Basi tecniche 1° ordine:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*
- *Basi tecniche 2° ordine:*
  - *Tavola demografica: 80% SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*

Capitale Differito PA – Esempio numerico (2/2)

$$u_{t+1} = \left(V_t + P_{t+1}\right)\cdot\left(i' - i\right) + \left(C - V_{t+1}\right)\cdot\left(q_{x+t} - q'_{x+t}\right)$$

$$U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1}\cdot\left(1+i'\right)^{-(t+1)}\cdot {}_tp'_x$$

x	l(x)	q(x+t,1)	q'(x+t,1)	C	V(t)	C-V(t)	P	i'-i	UM(t)	UI(t)	U(t)	p'(x,t)	U(t)*p'(x,t)*v'^(t+1)
50	95,071				-		1,738					1.0000	
51	94,752	0.0034	0.0027	-	1,779	- 1,779	1,738	2.00%	- 1.20	34.76	33.56	0.9973	32.27
52	94,398	0.0037	0.0030	-	3,600	- 3,600	1,738	2.00%	- 2.69	70.33	67.64	0.9943	62.37
53	94,009	0.0041	0.0033	-	5,467	- 5,467	1,738	2.00%	- 4.51	106.76	102.24	0.9911	90.38
54	93,563	0.0047	0.0038	-	7,384	- 7,384	1,738	2.00%	- 7.00	144.10	137.10	0.9873	116.14
55	93,091	0.0050	0.0040	-	9,352	- 9,352	1,738	2.00%	- 9.44	182.44	173.00	0.9833	140.39
56	92,578	0.0055	0.0044	-	11,374	- 11,374	1,738	2.00%	- 12.53	221.79	209.26	0.9790	162.62
57	92,011	0.0061	0.0049	-	13,456	- 13,456	1,738	2.00%	- 16.47	262.23	245.76	0.9742	182.83
58	91,369	0.0070	0.0056	-	15,607	- 15,607	1,738	2.00%	- 21.78	303.88	282.10	0.9687	200.81
59	90,665	0.0077	0.0062	-	17,829	- 17,829	1,738	2.00%	- 27.49	346.89	319.40	0.9628	217.39
60	89,869	0.0088	0.0070	-	20,135	- 20,135	1,738	2.00%	- 35.37	391.33	355.97	0.9560	231.53
61	89,013	0.0095	0.0076	-	22,525	- 22,525	1,738	2.00%	- 42.89	437.45	394.56	0.9487	245.03
62	88,089	0.0104	0.0083	-	25,007	- 25,007	1,738	2.00%	- 51.91	485.25	433.34	0.9408	256.78
63	87,093	0.0113	0.0090	-	27,592	- 27,592	1,738	2.00%	- 62.40	534.90	472.50	0.9323	266.99
64	86,031	0.0122	0.0098	-	30,286	- 30,286	1,738	2.00%	- 73.87	586.59	512.72	0.9232	276.05
65	84,873	0.0135	0.0108	-	33,110	- 33,110	1,738	2.00%	- 89.13	640.47	551.33	0.9133	282.64
66	83,602	0.0150	0.0120	-	36,085	- 36,085	1,738	2.00%	- 108.11	696.95	588.83	0.9024	287.13
67	82,203	0.0167	0.0134	-	39,235	- 39,235	1,738	2.00%	- 131.27	756.45	625.18	0.8903	289.61
68	80,670	0.0187	0.0149	-	42,587	- 42,587	1,738	2.00%	- 158.86	819.47	660.61	0.8770	290.31
69	79,014	0.0205	0.0164	-	46,159	- 46,159	1,738	2.00%	- 189.57	886.50	696.93	0.8626	290.10
70	77,204	0.0229	0.0183	-	50,000	- 50,000	-	2.00%	- 229.02	957.94	728.92	0.8468	286.96
													4208.32

Capitale Differito PU – Esempio numerico (1/2)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 50 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 20*
  - *Premio unico*
  - *Capitale assicurato: € 50'000*

- *Basi tecniche 1° ordine:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 2%*
- *Basi tecniche 2° ordine:*
  - *Tavola demografica: 80% SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*

Capitale Differito PU – Esempio numerico (2/2)

$$\boxed{u_{t+1} = (V_t + P_{t+1})\cdot(i' - i) + (C - V_{t+1})\cdot(q_{x+t} - q'_{x+t})}$$

$$\boxed{U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1}\cdot(1+i')^{-(t+1)}\cdot {}_tp'_x}$$

x	l(x)	q(x+t,1)	q'(x+t,1)	C	V(t)	C-V(t)	P	i'-i	UM(t)	UI(t)	U(t)	p'(x,t)	U(t)*p'(x,t)*v'^(t+1)
50	95,071				-		27,325					1.0000	
51	94,752	0.0034	0.0027	-	27,965	- 27,965	-	2.00%	- 18.79	546.50	527.70	0.9973	507.41
52	94,398	0.0037	0.0030	-	28,631	- 28,631	-	2.00%	- 21.36	559.31	537.95	0.9943	496.03
53	94,009	0.0041	0.0033	-	29,325	- 29,325	-	2.00%	- 24.21	572.63	548.42	0.9911	484.78
54	93,563	0.0047	0.0038	-	30,054	- 30,054	-	2.00%	- 28.51	586.50	558.00	0.9873	472.71
55	93,091	0.0050	0.0040	-	30,811	- 30,811	-	2.00%	- 31.10	601.08	569.98	0.9833	462.53
56	92,578	0.0055	0.0044	-	31,601	- 31,601	-	2.00%	- 34.81	616.21	581.40	0.9790	451.82
57	92,011	0.0061	0.0049	-	32,431	- 32,431	-	2.00%	- 39.69	632.02	592.33	0.9742	440.66
58	91,369	0.0070	0.0056	-	33,312	- 33,312	-	2.00%	- 46.48	648.63	602.15	0.9687	428.62
59	90,665	0.0077	0.0062	-	34,243	- 34,243	-	2.00%	- 52.79	666.25	613.45	0.9628	417.53
60	89,869	0.0088	0.0070	-	35,237	- 35,237	-	2.00%	- 61.89	684.85	622.96	0.9560	405.18
61	89,013	0.0095	0.0076	-	36,287	- 36,287	-	2.00%	- 69.09	704.74	635.64	0.9487	394.74
62	88,089	0.0104	0.0083	-	37,401	- 37,401	-	2.00%	- 77.63	725.74	648.11	0.9408	384.05
63	87,093	0.0113	0.0090	-	38,585	- 38,585	-	2.00%	- 87.26	748.02	660.77	0.9323	373.36
64	86,031	0.0122	0.0098	-	39,843	- 39,843	-	2.00%	- 97.19	771.71	674.52	0.9232	363.16
65	84,873	0.0135	0.0108	-	41,194	- 41,194	-	2.00%	- 110.90	796.86	685.96	0.9133	351.65
66	83,602	0.0150	0.0120	-	42,657	- 42,657	-	2.00%	- 127.80	823.89	696.08	0.9024	339.42
67	82,203	0.0167	0.0134	-	44,251	- 44,251	-	2.00%	- 148.05	853.15	705.10	0.8903	326.63
68	80,670	0.0187	0.0149	-	45,994	- 45,994	-	2.00%	- 171.57	885.01	713.45	0.8770	313.54
69	79,014	0.0205	0.0164	-	47,897	- 47,897	-	2.00%	- 196.71	919.87	723.17	0.8626	301.02
70	77,204	0.0229	0.0183	-	50,000	- 50,000	-	2.00%	- 229.02	957.94	728.92	0.8468	286.96
													8001.80

MISTA PA – Esempio numerico (1/2)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10 = durata pagamento premi*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*

- *Basi tecniche 1° ordine:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*
- *Basi tecniche 2° ordine:*
  - *Tavola demografica: 80% SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 6%*

MISTA PA – Esempio numerico (2/2)

$$u_{t+1} = (V_t + P_{t+1})\cdot(i' - i) + (C - V_{t+1})\cdot(q_{x+t} - q'_{x+t})$$

$$U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1}\cdot(1+i')^{-(t+1)}\cdot {}_tp'_x$$

x	l(x)	q(x+t,1)	q'(x+t,1)	C	V(t)	C-V(t)	P	i'-i	UM(t)	UI(t)	U(t)	p'(x,t)	U(t)*p'(x,t)*v'^(t+1)
30	98,123				-		8,056					1.0000	
31	98,036	0.0009	0.0007	100,000	8,297	91,703	8,056	2.00%	16.28	161.13	177.41	0.9993	167.37
32	97,949	0.0009	0.0007	100,000	16,935	83,065	8,056	2.00%	14.66	327.08	341.74	0.9986	303.93
33	97,859	0.0009	0.0007	100,000	25,923	74,077	8,056	2.00%	13.63	499.82	513.45	0.9978	430.50
34	97,765	0.0010	0.0008	100,000	35,276	64,724	8,056	2.00%	12.51	679.58	692.09	0.9971	547.02
35	97,664	0.0010	0.0008	100,000	45,009	54,991	8,056	2.00%	11.29	866.64	877.93	0.9963	654.12
36	97,561	0.0011	0.0008	100,000	55,141	44,859	8,056	2.00%	9.51	1,061.31	1,070.83	0.9954	752.07
37	97,453	0.0011	0.0009	100,000	65,687	34,313	8,056	2.00%	7.61	1,263.94	1,271.55	0.9945	841.77
38	97,341	0.0011	0.0009	100,000	76,666	23,334	8,056	2.00%	5.35	1,474.87	1,480.22	0.9936	923.63
39	97,222	0.0012	0.0010	100,000	88,097	11,903	8,056	2.00%	2.90	1,694.46	1,697.36	0.9927	998.25
40	97,095	0.0013	0.0011	100,000	100,000	-		2.00%	-	1,923.08	1,923.08		1065.95
													6,684.61

$$U = € \quad 6684{,}61$$

MISTA PU – Esempio numerico (1/2)

Esempio

- *Consideriamo la seguente polizza:*
  - *Età: 30 anni*
  - *Sesso: Maschio*
  - *Durata polizza: 10*
  - *Capitale Assicurato: € 100'000*

- *Basi tecniche 1° ordine:*
  - *Tavola demografica: SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 4%*
- *Basi tecniche 2° ordine:*
  - *Tavola demografica: 80% SI 2002*
  - *Tasso tecnico: 6%*

MISTA PU – Esempio numerico (2/2)

$$\boxed{u_{t+1} = \left(V_t + P_{t+1}\right)\cdot\left(i' - i\right) + \left(C - V_{t+1}\right)\cdot\left(q_{x+t} - q'_{x+t}\right)}$$

$$\boxed{U = \sum_{t=0}^{n-1} u_{t+1} \cdot \left(1 + i'\right)^{-(t+1)} \cdot {}_t p'_x}$$

x	l(x)	q(x+t,1)	q'(x+t,1)	C	V(t)	C-V(t)	P	i'-i	UM(t)	UI(t)	U(t)	p'(x,t)	U(t)*p'(x,t)*v'^(t+1)
30	98,123				-		67,687					1.0000	
31	98,036	0.0009	0.0007	100,000	70,368	29,632	-	2.00%	5.26	1,353.73	1,358.99	0.9993	1282.07
32	97,949	0.0009	0.0007	100,000	73,159	26,841	-	2.00%	4.74	1,407.35	1,412.09	0.9986	1255.86
33	97,859	0.0009	0.0007	100,000	76,063	23,937	-	2.00%	4.40	1,463.17	1,467.58	0.9978	1230.46
34	97,765	0.0010	0.0008	100,000	79,085	20,915	-	2.00%	4.04	1,521.26	1,525.30	0.9971	1205.59
35	97,664	0.0010	0.0008	100,000	82,231	17,769	-	2.00%	3.65	1,581.71	1,585.35	0.9963	1181.21
36	97,561	0.0011	0.0008	100,000	85,504	14,496	-	2.00%	3.07	1,644.61	1,647.69	0.9954	1157.21
37	97,453	0.0011	0.0009	100,000	88,912	11,088	-	2.00%	2.46	1,710.09	1,712.55	0.9945	1133.72
38	97,341	0.0011	0.0009	100,000	92,460	7,540	-	2.00%	1.73	1,778.25	1,779.97	0.9936	1110.67
39	97,222	0.0012	0.0010	100,000	96,154	3,846	-	2.00%	0.94	1,849.20	1,850.14	0.9927	1088.11
40	97,095	0.0013	0.0011	100,000	100,000	-		2.00%	-	1,923.08	1,923.08		1065.95
													11,710.84

$$\boxed{U = € \quad 11710{,}84}$$