Esame Finanza Quantitativa – 18.04.2023

1. Si consideri il titolo A che non paga dividendi con prezzo attuale pari a 18, e si assuma che il titolo in ciascun quadrimestre possa apprezzarsi o deprezzarsi dell'8%. Si assuma inoltre che il tasso annuo di interesse privo di rischio sia pari all'1%

   a. Determinare il premio dell'opzione put europea scritta sul titolo A con scadenza 4 mesi e prezzo di esercizio 19, attraverso la costruzione del portafoglio replicante costituito da un numero Δ di azioni del titolo A e da un importo B investito al tasso privo di rischio e si verifichi inoltre che tale valore soddisfi i limiti per il premio di tale contratto di opzione;

   b. Si determinino i nodi dell'albero nei quali è conveniente l'esercizio della put americana scritta sul titolo A, con scadenza 8 mesi e strike 19.

2. Sia
$$\alpha(x_1, x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \beta(x_1, x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma(x_1, x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = g\left(x_1, x_2, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \tag{1}$$
   una equazione differenziale alle derivate parziali.

   a. Classificare l'equazione (1) sulla base dei coefficienti $\alpha(x_1, x_2)$, $\beta(x_1, x_2)$ e $\gamma(x_1, x_2)$.

   b. Mostrare come si ottiene la discretizzazione, in termini di differenze finite in avanti, della derivata parziale $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$.

   c. Quante altre tipologie di differenze finite possono essere usate? Motivare la risposta.

3. Sia $S = \{S_t\}_{t\in[0,T]}$ il processo che descrive l'andamento di un titolo rischioso.

   a. Assumendo un moto browniano geometrico per S, scrivere la discretizzazione di Eulero per le traiettorie del sottostante.

   b. Assumendo un modello jump-diffusion per S, con parametri assegnati $\sigma = 15\%$, $r = 1\%$, $S_0 = 100$, $\lambda = 30$ ed ampiezza di salto distribuita secondo una v.a. normale di media $\mu_J = 2\%$ e varianza $\sigma_J^2 = 22\%$, creare uno script Matlab per determinare, tramite metodo Monte Carlo, il prezzo V_0 di un titolo derivato avente il seguente payoff
$$H_T = \max\{K - \bar{S}, 0\}\ ,$$
   dove $K = 100$, $T = 1$ anno e $\bar{S} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} S_{t_j}}$, essendo $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$ uno scadenzario prefissato, costituito da osservazioni giornaliere.