Esame Finanza Quantitativa – 20.10.2022

1. Si consideri un'opzione put di tipo europeo con scadenza 8 mesi, strike 32, valutata al tasso risk-free del 4% su base annua e scritta su un titolo che non paga dividendi con prezzo 32.
   a. Sapendo che la call europea con le medesime caratteristiche contrattuali ha prezzo pari a 1,3, si calcoli il prezzo dell'opzione put;
   b. Assumendo che il sottostante possa apprezzarsi o deprezzarsi del 5% in ogni quadrimestre, si valuti la corrispondente put americana attraverso un albero binomiale a due periodi, e si indichino i nodi in cui è conveniente l'esercizio anticipato.

2. Sia $C = C(S, K, \sigma, \rho, T, t)$ il prezzo di una opzione call europea nel modello di Black-Scholes.
   a. Ricavare, mostrando tutti i passaggi, la forma esplicita di Γ.
   b. Spiegare qual è il significato finanziario di tale quantità.
   c. Spiegare come può essere determinata questa greca se la dinamica del sottostante fosse diversa da quella sopra indicata.

3. Sia $S = \{S_t\}_{t \in [0,T]}$, $T < \infty$ un moto browniano geometrico.
   a. Scrivere la discretizzazione di Eulero per il processo S, considerando M traiettorie e p osservazioni su un orizzonte temporale $[0, T]$.
   b. Costruire un codice Matlab per determinare il prezzo al tempo $t = 0$ di un derivato con payoff

$$H_T = \left(K - \bar{S}\right)^+ ,$$

   dove $\bar{S} := \sqrt[3]{\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} S_{t_k}}$ (si assumano osservazioni mensili su un orizzonte temporale di un anno).