1 Stima parametri modali per modelli MDOF

1.1 Effetto residui

FRF misurata in un RANGE IN FREQUENZA ben definito in cui sono presenti M modi

Se ricostruissimo (sintesi) la FRF con i modi sperimentali stimati (ad esempio da un SDOF FITTING) si ha:

grafico presentato in classe

In quanto si è usato:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{rA_{ij}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_{nr}^2} \tag{1}$$

invece di

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{m_1-1} \frac{rA_{ij}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_{nr}^2} + \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{rA_{ij}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_{nr}^2} + \sum_{r=m_2}^{\infty} \frac{rA_{ij}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_{nr}^2} \tag{2}$$

in cui si sono aggiunti:

Low Frequency Modes

$$\sum_{r=1}^{m_1-1} \frac{rA_{ij}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_{nr}^2} \sim -\frac{1}{\omega^2 M_{ij}^R} \tag{3}$$

indicativi del comportamento inerziale, (LR)

High Frequency Modes

$$\sum_{r=m_2+1}^{\infty} \frac{rA_{ij}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_{nr}^2} \sim -\frac{1}{k_{ij}^R} \tag{4}$$

indicativi del comportamento di rigidezza locale (UR).

grafico presentato in classe

LR e UR sono determinati in modo iterativo: si valuta H_{ij} alle basse frequenze per trovare LR, dopo si valuta H_{ij} alle alte frequenze per trovare UR e quindi si itera.

2 Approccio MDOF generale

2.1 "Curve Fitting" nel dominio della frequenza

Esistono diverse procedure e varianti rispetto filosofia base. Definendo con FRF "misurata":

$$H_{ij}^m(\omega_l) = H_l^m \tag{5}$$

e con FRF "teorica":

$$H_{ij}(\omega_l) = H_l = -\frac{1}{\omega_l^2 M_{ij}^R} + \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{rA_{ij}}{\omega_{n_r}^2 - \omega_l^2 + j\eta_r\omega_{n_r}^2} + \frac{1}{k_{ij}^R} \tag{6}$$

Bisogna stimare:

$$\begin{aligned}
rA_{ij} \quad &, \qquad r = m_1, ..., m_2 && (7)\\
\omega_{n_r} \quad &, \qquad r = m_1, ..., m_2 && (8)\\
\eta_r \quad &, \qquad r = m_1, ..., m_2 && (9)\\
k_{ij}^R & && (10)\\
M_{ij}^R & && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

Si definisce *l'errore pertinente* per ogni frequenza aquisita ω_l:

$$\boldsymbol{\epsilon}_l = \mathbf{H}_l^m - \mathbf{H}_l \tag{13}$$

con $\mathbf{H}_l^m$ e $\mathbf{H}_l$ vettori le cui componenti si riferiscono a punti di misura. In forma scalare si ha:

$$E_l = |\epsilon|_2 \tag{14}$$

da cui

$$E = \sum_{l=1}^{N_f} E_l \tag{15}$$

dove si è indicato con $| \cdot |_2$ la norma 2 o una a scelta e con N_f il numero di righe spettrali acquisite. Se si volesse dare pi enfasi ad alcune frequenze rispetto ad altre, si ha:

$$E = \sum_{l=1}^{N_f} w_l E_l \tag{16}$$

dove w_l rappresentano le funzioni peso. Allora le incognite presenti in (7) sono determinabili minimizzando l'errore E:

$$\frac{\partial E}{dq_i} = 0 \tag{17}$$

Si ottiene un sistema di equazioni NON lineari nelle incognite

q_i:

$$q_1 = 1A_{ij} \tag{18}$$
$$q_2 = 2A_{ij} \tag{19}$$
$$q_3 = 3A_{ij} \tag{20}$$

I diversi algoritmi si differenziano proprio per il metodo di risoluzione. La maggior parte dei metodi usano *algoritmi iterativi.* Tutti dipendono dalla stima iniziale.

2.2 "Curve Fitting" nel dominio del tempo

Metodo Esponenziali Complessi

Esistono diverse varianti. Vantaggio principale: non richiede stima iniziale. Il metodo usa la risposta nel tempo del sistema intesa come risposta all'impulso. Si considera solo lo smorzamento viscoso.

$$
\begin{aligned}
H_{ij}(\omega) &= \sum_{r=1}^{N} \frac{rA_{ij}}{\omega_{n_r}\zeta_r + j(\omega - \omega_{n_r}\sqrt{1-\zeta_r^2})} + \frac{r\tilde{A_{ij}}}{\omega_{n_r}\zeta_r + j(\omega - \omega_{n_r}\sqrt{1-\zeta_r^2})} \\
&= \sum_{r=1}^{N} \frac{rA_{ij}}{n-p} + \frac{r\tilde{A_{ij}}}{n-\tilde{p}} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

con

$$n = j\omega \qquad (22)$$

$$p = -\sigma + j\omega_d = -\omega_n\zeta_n + j\omega_d \qquad (23)$$

Oppure

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{rA_{ij}}{\omega_{n_r}\zeta_r + j(\omega - \omega_{d_k})} \qquad (24)$$

in cui

$$\omega_{d_r} = \omega_{n_r}\sqrt{i-\zeta_r^2} \qquad (25)$$

$$\omega_{d_{r+N}} = -\omega_{d_r} \qquad (26)$$

$$(r+N)A_{ij} = r\tilde{A_{ij}} \qquad (27)$$

La risposta impulsiva (IRF) è ricavabile dalla trasformata inversa di Fourier e si ha:

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^{2N} rA_{ij}e^{s_r t} \qquad (28)$$

dove

$$s_r = -\omega_{n_r}\zeta_r + j\omega_{d_r} \qquad (29)$$

Se la FRF nota (misurata e digitalizzata) in un numero di frequenze equispaziate, allora la IRF (ottenuta tramite IFFT di FRF) sarà disponibile in un numero di intervalli equispaziati ΔT $(= \frac{1}{\Delta f})$, ossia dalla (28), con q numero di punti nel tempo presenti nella IFR:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} h_0 & \rightarrow & h(0) \\ h_1 & \rightarrow & h(\Delta t) \\ h_2 & \rightarrow & (2\Delta t) \\ \vdots & & \\ h_q & \rightarrow & h(q\Delta t) \end{array} \right\} \tag{30}$$

valutate per ogni punto di misura ed eccitazione n_{ij}, non presenti per semplicit notazionale. Si pu ulteriormente semplifacare:

$$rA_{ij} \rightarrow Ar \tag{31}$$

$$e^{s_r \Delta t} \rightarrow Vr \tag{32}$$

e quindi la risposta impulsiva scritta in (30) diventa:

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r t} \tag{33}$$

mentre l-esimo campione temporale h_l si ha:

$$h_l = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^l \tag{34}$$

dove l è un esponente, NON un solo indice. Se si valutano l'insieme dei q campioni nel tempo, si ha:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
h_0 & = & A_1 + A_2 + \cdots + A_{2N} \\
h_1 & = & V_1 A_1 + V_2 A_2 + \cdots + V_{2N} A_{2N} \\
h_2 & = & V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 + \cdots + V_{2N}^2 A_{2N} \\
\vdots & & \\
h_q & = & V_1^q A_1 + V_2^q A_2 + \cdots + V_{2N}^q A_{2N}
\end{array}
\right\} \tag{35}
$$

OSSERVAZIONE: se $q > 4N$ allora dal problema agli autovalori si ricavano le V e quindi i poli: metodo di “Prony”.

Se moltiplichiamo tutto per dei coefficienti β_i:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\beta_0 h_0 & = & \beta_0 A_1 + \beta_0 A_2 + \cdots + \beta_0 A_{2N} \\
\beta_1 h_1 & = & \beta_1 V_1 A_1 + \beta_1 V_2 A_2 + \cdots + \beta_1 V_{2N} A_{2N} \\
\beta_2 h_2 & = & \beta_1 V_1^2 A_1 + \beta_1 V_2^2 A_2 + \cdots + \beta_1 V_{2N}^2 A_{2N} \\
\vdots & & \\
\beta_q h_q & = & \beta_q V_1^q A_1 + \beta_q V_2^q A_2 + \cdots + \beta_q V_{2N}^q A_{2N}
\end{array}
\right\} \tag{36}
$$

sommando le equazioni si ha:

$$
\sum_{l=0}^{q} \beta_l h_l = \sum_{r=1}^{2N} \left(A_r \sum_{l=0}^{q} \beta_l V_r^l \right) \tag{37}
$$

Chi sono i coefficienti β_l. Possono essere scelti in modo da essere i coefficienti dell’equazione:

$$
\sum_{l=0}^{q} \beta_l V^l = 0 \tag{38}
$$

la quale si pu scrivere:

$$
\beta_0 + \beta_1 V + \beta_2 V^2 + \cdots + \beta_q V^q = 0 \tag{39}
$$

è un’equazione algebrica di grado q, che ammette q solizioni V_l. Se cos fosse, allora, dalle V_l si ricavono i poli del sistema.

è utile, a tale scopo, fissare $q = 2N$, con q numero di punti nel tempo disponibili dalla IRF (in genere $>> 2N$) e con N numero DOF sistema (esiste complesso e coniugato).

Dalla (38), se V_l sono radici, si ha:

$$\sum_{l=0}^{q(=2N)} \beta_l V_r^l = 0 \qquad \forall r = 1, 2, ..., 2N \tag{40}$$

e quindi dalla (37) segue:

$$\sum_{l=0}^{q(=2N)} \beta_l h_l = 0 \tag{41}$$

che si pu riscrivere:

$$\sum_{l=0}^{2N-1} \beta_l h_l = -h_{2N} \tag{42}$$

in cui si posto $\beta_{2N} = 1$. E quindi:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} h_0 & h_1 & \cdots & h_{2N-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{array} \right\} = -h_{2N} \tag{43}$$

Si può ripetere l'intero processo che va da (28) a (43) utilizzando diversi punti nel tempo dalla risposta all'impulso. Inoltre si possono considerare intervalli temporali sovraposti (NON completamente!). Si arriverebbe a (1 time shift)

$$\left\{ \begin{matrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{matrix} \right\} = -h_{2N+1} \tag{44}$$

Ripetendo ulteriormente la procedura si ha:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{2N-1} \\ h_1 & & & & h_{2N} \\ h_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \cdots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ h_{2N+2} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{matrix} \right\} \tag{45}$$

ossia:

$$[h]_{2N\times 2N}\underline{\beta}_{2N\times 1} = -\tilde{h}_{2N\times 1} \tag{46}$$

Tale sistema pu essere risolto

$$\underline{\beta} = -[h]^{-1}\underline{\tilde{h}} \tag{47}$$

Noti i coefficienti $\underline{\beta}$ si possono usare per determinare da V_l le caratteristiche del sistema. Infatti. usando $\underline{\beta}$ dalla

$$\beta_0 + \beta_1 V + \beta_2 V^2 + \cdots + \beta_{2N} V^{2N} = 0 \tag{48}$$

ricavo le V_r radici da cui poich $V_r = e^{s_r \Delta t}$ ottengo s_r. I residui e le costanti modali li ottengo da:

$$h_l = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^l \Rightarrow \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ V_1 & V_2 & V_3 & \cdots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & V_3^2 & \cdots & V_{2N}^2 \\ \vdots & & & & \\ V_1^{2N-1} & V_2^{2N-1} & V_3^{2N-1} & \cdots & V_{2N-1}^{2N-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{2N} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{array} \right\} \quad (50)$$

ossia

$$[V]\underline{A} = \underline{h} \Rightarrow \underline{A} = [V]^{-1}\underline{h} \quad (51)$$

3 Uso metodo esponenziali complessi

Si ipotizza inizialmente una stima del grado del polonomio ossia ordine del sistema (in genere 30). Trovati i parametri modali la FRF viene sintetizzata tramite la Eq. 21. Si confrontano le FRF (sintetizzate e misurate) per valutare l'accuratezza del modello stimato (si valuta l'errore). Si ripete la procedura usando un numero differente del grado del polinomio (2N) per valutare l'errore.

grafico presentato in classe

Si verifica di non considerare "modi numerici" (ottenuti dall'algoritmo) non rappresentativi della realt fisica (l'errore cresce al crescere ordine del modello).

Essi sono caratterizzati da: alto smorzamento e/o bassi residui dovuti a: sovrastima ordine modello, imperfezioni dati temporali.

$$x_i(t_j + \Delta t) = \tilde{x}_{ij} = \sum_{r=1}^{2N} \phi_i^{(r)} e^{s_r(t_j+\Delta t)} =$$

$$\sum_{r=1}^{2N} (\phi_i^{(r)} e^{\Delta t}) e^{s_r t_j} = sum_{r=1}^{2N} \tilde{\phi}_i^{(r) s_r t_j} \qquad \forall j = 1, \cdots, Ns$$