MODELLI DI MERCATO A TEMPO CONTINUO

Consideriamo il vettore

$$\overline{X}_t = \left(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(M)}\right), \quad t > 0$$

delle VARIABILI DI STATO, che descrivono l'economia al tempo t.

⇒ Quale sarà la sua dinamica?

$$d\overline{X}_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{M} \sigma_{i,k}(t, X_t)\, dW_t^{(k)} + \cancel{\mu_i}(t, X_t)\, dt,$$

$$\forall i = 1, \dots, M$$

<u>OSS:</u> $W_t^{(i)}$ sono MB indipendenti, $\forall i = 1, \dots, M$

Introduciamo alcuni processi:

- $P_t := \tilde{P}(t, X_t)$, $\tilde{P} : [0,T] \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$
  funzione deterministica $\in C_b^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^M)$

  ↳ derivate continue di ogni ordine e limitate

  ⇒ proc. che descrive il prezzo di uno strumento finanziario

- $D_t := \tilde{D}(t, X_t)$, $\tilde{D} : [0,T] \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$

  ⇒ proc. che descrive l'evoluzione dei flussi dei dividendi

- $B_t = \exp\left\{\int_0^t r_s\, ds\right\}^{(B)}$, dove $\{r_t\}_{t\in[0,T]}$ è il proc. ~~[illegible]~~ del tasso spot

  ⇒ proc. che descrive l'evoluzione di uno strumento finanziario risk-free

Quali sono le rispettive dinamiche!

RISK-FREE ASSET: $dB_t = r_t B_t \, dt$, con $B_0 = 1$

(Infatti, si dimostra che (B) è l'unica soluzione della precedente eq. differenziale)

$\hookrightarrow$ DINAMICA DETERMINISTICA!

RISKY ASSET:

$$dP_t \overset{(ITO)}{=} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X^{(i)}} dX^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X^{(i)} \partial X^{(j)}} \langle dX_t^{(i)}, dX_t^{(j)} \rangle$$

$$= \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X^{(i)}} \left[\mu_i dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{i,k} dW_t^{(k)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X^{(i)} \partial X^{(j)}} \boxed{} \hookrightarrow ?$$

Calcoliamo

$$\langle dX_t^{(i)}, dX^{(j)} \rangle_t = \langle \mu_i dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{i,k} dW_t^{(k)}, \mu_j dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{j,k} d\ldots$$

$$= \mu_i \cdot \mu_j \langle dt, dt \rangle + \mu_i \sum_{h=1}^{m} \sigma_{j,h} \langle dt, dW_t^{(h)} \rangle +$$

$$+ \mu_j \sum_{k=1}^{m} \sigma_{i,k} \langle dW_t^{(k)}, dt \rangle + \sum_{h,k=1}^{m} \sigma_{i,k} \cdot \sigma_{j,h} \langle dW_t^{(k)}, dW_t^{(h)} \ldots$$

RECALL

REGOLA DI MOLTIPLICAZIONE DI ITO:

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Dunque:

$$\langle dX_t^{(i)}, dX_t^{(j)} \rangle = \sum_{h,k=1}^{m} \sigma_{i,k} \cdot \sigma_{j,h} \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dP_t}{P_t} = \frac{1}{P_t}\Bigg[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)}} \mu_i \, dt + \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)}} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{i,k} \, dW_t^{(k)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)} \partial X_t^{(j)}} \sum_{h,k=1}^{m} \sigma_{i,k} \cdot \sigma_{j,h} \, dt \Bigg]$$

$$= \frac{1}{P_t}\Bigg[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)}} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)} \partial X_t^{(j)}} \sum_{h,k=1}^{m} \sigma_{i,k} \cdot \sigma_{j,h} \Bigg] dt +$$

$$+ \frac{1}{P_t} \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)}} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{i,k} \, dW_t^{(k)}$$

IN FORMA COMPATTA:

$$\Rightarrow \frac{dP_t}{P_t} = \mu_P \, dt + \sum_{k=1}^{M} \sigma_P^{(k)} \cdot dW_t^{(k)},$$

dove

$$\mu_P := \frac{1}{P_t}\left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \nabla \tilde{P} \cdot \mu + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)} \partial X_t^{(j)}} \sum_{h,k=1}^{m} \sigma_{i,k} \cdot \sigma_{j,h} \right]$$

$$\sigma_P^{(k)} := \frac{1}{P_t} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial X_t^{(i)}} \sigma_{i,k}, \quad \forall k = 1, \dots, M$$

Siamo interessati alle cosiddette STRATEGIE DI INVESTIMENTO:

$$\Theta_t = \left(\Theta_t^{(1)}, \Theta_t^{(2)}, \dots, \Theta_t^{(N)}\right), \quad t \in [0,T]$$

dove $\Theta_t^{(k)}$, $k=1,\dots,N$, rappresenta l'ammontare del titolo i-simo detenuto dall'investitore al tempo t.

$\Rightarrow$ vogliamo sapere quanto vale il PORTAFOGLIO dell'investitore:

$$V_t := \sum_{k=1}^{N} \Theta_t^{(k)} P_t^{(k)}, \quad \forall t \in [0,T]$$

E.G.: $V_t = \Theta_t^{(1)} S_t + \Theta_t^{(2)} B_t$ (CASO BOND-STOCK).

$\Rightarrow$ quale sarà la dinamica di questo ptf?
(Siamo sempre interessati a come può cambiare il valore del processo).

<u>DEF.</u> Una strategia Θ_t è AUTO-FINANZIANTE se

$$dV_t = \sum_{k=1}^{N} d\left(\Theta_t^{(k)} P_t^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow dV_t = \sum_{k=1}^{N} \left[d\Theta_t^{(k)} \cdot P_t^{(k)} + \Theta_t^{(k)} \, dP_t^{(k)} \right]$$

$$\boxed{d\Theta_t^{(k)} = \Theta_t^{(k)} \cdot D_t^{(k)} \, dt}$$ (AUTO-finanziamento)

<u>NOTA BENE:</u>
Una strategia è autofinanziante se le variazioni del ptf dipendono <u>solo</u> da variazioni del prezzo degli asset o da variazioni delle quote di asset detenute, attraverso reinvestimento dei dividendi.

$$\Rightarrow dV_t = \sum_{k=1}^{N} \left[\theta_t^{(k)} dP_t^{(k)} + \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} D_t^{(k)} dt \right] \qquad (1)$$

Siamo interessati ai prezzi scontati (rispetto al tasso risk-free):

$$\hat{V}_t := \frac{V_t}{B_t} = \exp\left\{-\int_0^t r_s\,ds\right\} V_t$$

$\Rightarrow$ ne vogliamo determinare la dinamica:

$$d\hat{V}_t = d\left(\frac{V_t}{B_t}\right) = \frac{1}{B_t} dV_t + V_t\, d\left(\frac{1}{B_t}\right)$$

$$= \frac{1}{B_t} \sum_{k=1}^{N} \left[\theta_t^{(k)} dP_t^{(k)} + \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} D_t^{(k)} dt \right] + V_t \frac{1}{B_t} r_t\, dt$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{B_t} \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} dP_t^{(k)} + \frac{1}{B_t} \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} D_t^{(k)} dt + - \frac{1}{B_t} r_t \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} dt$$

NB: $d\left(\frac{1}{B_t}\right) = d\left(\exp\left\{-\int_0^t r_s\,ds\right\}\right) = -\exp\left\{-\int_0^t r_s\,ds\right\} r_t\,dt \quad (*)$ $\quad -\frac{r_t\,dt}{B_t}$

Inoltre: $d\left(\frac{P_t}{B_t}\right) = \frac{1}{B_t} dP_t + P_t\, d\left(\frac{1}{B_t}\right)$

$$\Rightarrow d\left(\frac{P_t}{B_t}\right) = \frac{1}{B_t} dP_t - \frac{1}{B_t} P_t r_t\, dt \quad (**)$$

Siamo interessati a STRATEGIE PRIVE DI ARBITRAGGIO (+)

ARBITRAGGIO $\longrightarrow$ opportunità di compiere operazioni finanziarie a costo zero che, nel contempo, producono un profitto privo di rischio

In termini matematici:

$\theta \in \Theta$ è un arbitraggio se il valore del ptf calcolato in corrispondenza di tale strategia $\{V_t(\theta)\}_{t \in [0,T]}$ è t.c.

1) $\mathbb{P}\left[\left(V_t(\theta) - V_0(\theta)\right) > 0\right] > 0$

2) $\mathbb{P}\left[\left(V_t(\theta) - V_0(\theta)\right) \geq 0\right] = 1$

<u>DOMANDA</u>: Sotto quali condizioni siamo sicuri che non ci siano strategie di arbitraggio?