~~PROOF.~~ THM (Teorema fondamentale della Teoria dei prezzi di arbitraggio (APT))

Sia $P_t^{(k)}$ il prezzo del k-simo asset rischioso, $\forall k=1,\dots,N$.

Assumiamo che

$$\frac{dP_t^{(k)}}{P_t^{(k)}} = \mu_t^{(k)}\,dt + \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)}\,dW_t^{(i)}, \quad \forall k=1,\dots,N, \ (*)$$

dove $W_t^{(1)},\dots,W_t^{(M)}$ sono MB indipendenti.

Sia inoltre $D_t^{(k)}$, $k=1,\dots,N$, il processo che rappresenta il flusso dei dividendi e sia r_t il tasso d'interesse risk-free.

Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $\nexists$ strategie di arbitraggio

2) $\exists\ \lambda_t^{(1)},\dots,\lambda_t^{(M)}$ processi stocastici adattati a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0}$ tali che

$$\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} - r_t = \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)}\lambda_t^{(i)}, \quad \forall k=1,\dots,N \quad (**)$$

3) $\exists\ \mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$ tale che

$$P_t^{(k)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T (r_s - D_s^{(k)})ds} P_T^{(k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right], \ \forall k=1,\dots,N \ (***)$$

4) $\exists\ \mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$ tale che $\hat{V}_t(\theta)$ è una martingala

NOTA: Il teorema ci dice che condizione necessaria e sufficiente perché non ci siano arbitraggi è che il prezzo dell'asset al tempo t sia una martingala rispetto alla misura $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ si chiama MISURA MARTINGALA EQUIVALENTE (EMM)

PROOF.

(85)

Dimostreremo che 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 1

STEP 1: 1) ⇒ 2)

Supponiamo che

$$dV_t = \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} dP_t^{(k)} + \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} D_t^{(k)} dt$$

$$\overset{(?)}{=} \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} \left[P_t^{(k)} \left(\sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)} dW_t^{(i)} + \mu_t^{(k)} dt \right) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} D_t^{(k)} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} \left(\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} \right) dt + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} \sigma_t^{(i,k)} dW_t^{(i)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} \left(\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} \right) dt + \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} P_t^{(k)} \theta_t^{(k)} \cdot \sigma_t^{(i,k)} \right) dW_t^{(i)}$$

In assenza di arbitraggi:

~~Assumiamo~~ Assumiamo che non ci siano fonti di incertezza

⇒ supponiamo che dV_t abbia varianza nulla su Δt

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} P_t^{(k)} \theta_t^{(k)} \sigma_t^{(i,k)} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (A)$$

NOTA: la richiesta precedente equivale ad assumere che ~~...~~ il ptf V_t è REPLICANTE, i.e. $dV_t = r_t V_t dt$

$$\sum_{k=1}^{N} P_t^{(k)} \theta_t^{(k)} \left(\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} \right) dt = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \ (\text{?})$$

$$\Rightarrow dV_t = \sum_{k=1}^{N} P_t^{(k)} \theta_t^{(k)} \left(\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} \right)$$ e contemporaneamente $dV_t = \sum_{k=1}^{N} r_t \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} dt$

~~$dV_t = r_t \sum_{k=1}^{N} \theta_t$~~

$\Rightarrow$ uguagliando membro a membro:

$$\sum_{k=1}^{N} \theta_t^{(k)} P_t^{(k)} \left(\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} - r_t \right) = 0 , \ \forall\, i = 1, \dots, M \quad (B)$$

$\Rightarrow$ Cosa vogliamo dire qst relazioni?

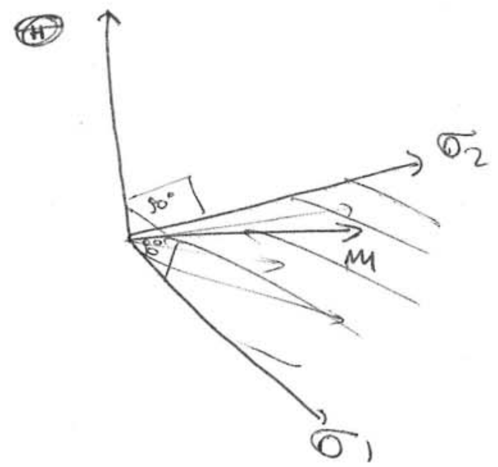
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

$$\Theta := \left(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N)} \right)$$

$$\sigma_i := \left(\sigma^{i,1}, \dots, \sigma^{i,N} \right) \quad , \forall\, i = 1, \dots, M$$

$$m := \left(\mu^{(1)} + D^{(1)} - r, \dots, \mu^{(N)} + D^{(N)} - r \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} (A) \Rightarrow \Theta \perp \sigma \\ (B) \Rightarrow \Theta \perp m \end{array}\right\} \Rightarrow m \in \Sigma \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M \}$$



$\Rightarrow$ m è combinazione lineare dei σ_i, $\forall\, i = 1, \dots, M$,

i.e., $\exists\, \lambda_t^{(1)}, \dots, \lambda_t^{(M)}$ t.c.

$$\mu_t^{(k)} + D_t^{(k)} - r_t = \sum_{i=1}^{M} \lambda_t^{(i)} \sigma_t^{(i,k)} , \quad \forall\, k = 1, \dots, N.$$

STEP 2: 2) $\Rightarrow$ 3)

Assumiamo sia vera 2) e sostituiamo nella dinamica del prezzo dell'asset:

$$\frac{dP_t^{(k)}}{P_t^{(k)}} = \left(-D_t^{(k)} + r_t + \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)} \lambda_t^{(i)}\right) dt + \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)} dW_t^{(i)}, \forall k$$

$$\Rightarrow dP_t^{(k)} = P_t^{(k)} \left(r_t - D_t^{(k)}\right) dt + P_t^{(k)} \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)} \left(\lambda_t^{(i)} dt + dW_t^{(i)}\right), \forall k \quad (\bullet)$$

Poniamo $d\widetilde{W}_t^{(i)} := \lambda_t^{(i)} dt + dW_t^{(i)}, \quad \forall i = 1, \dots, M$

$$\Leftrightarrow \widetilde{W}_t^{(i)} = W_t^{(i)} + \int_0^t \lambda_s^{(i)} ds, \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$= W_t^{(i)} - \left(-\int_0^t \lambda_s^{(i)} ds\right), \forall i = 1, \dots, M$$

~~(GIRSANOV) $\Rightarrow \exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$: $\widetilde{W}_t^{(i)}$ è MB sotto $\mathbb{Q}$~~

Se inoltre consideriamo

$$M_t^{(i)} := \exp\left\{-\int_0^t \lambda_s^{(i)} ds - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\lambda_s^{(i)}\right)^2 dW_s^{(i)}\right\}, \quad \forall i = 1, \dots, M$$

$$\Rightarrow M_t := \prod_{i=1}^{M} M_t^{(i)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{M}\left(-\int_0^t \lambda_s^{(i)} ds - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\lambda_s^{(i)}\right)^2 dW_s^{(i)}\right)\right\}$$

e poiché $M_t^{(i)}$ è MG EXP, $\forall i$, allora M_t è MG EXP.

(GIRSANOV) $\Rightarrow \exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ t.c. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) := \int_A M_T(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$

e $\widetilde{W}_t^{(i)}$ è MB sotto $\mathbb{Q}$!

D'altro canto, la $(\bullet)$ ci dice che $P_t^{(k)}$ è MBG sotto $\mathbb{Q}$, $\forall k$

$$dP_t^{(k)} = P_t^{(k)} \left(r_t - D_t^{(k)}\right) dt + P_t^{(k)} \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)} d\widetilde{W}_t \quad (\star\star)$$

$\Rightarrow$ sappiamo scrivere la soluzione:

$$\text{DRIFT} = r_t - D_t^{(k)}$$

$$\text{VOLA} = \sum_{i=1}^{M} \sigma_t^{(i,k)}$$

$\forall k = 1, \dots$

$$\Rightarrow P_t^{(k)} = P_0^{(k)} \exp\left\{ \int_0^t (r_s - D_s^{(k)}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1} \int_0 (\sigma_s^{(i,k)}) ds + \sum_{i=1} \int_0 \sigma_s^{(i,k)} dW_s \right\}$$

(8-c)

$$= P_0^{(k)} \exp\left\{ \int_0^t (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} \exp\left\{ \sum_{i=1}^{M} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_s^{i,k}) ds + \int_0^t \sigma_s^{(i,k)} d\tilde{W}_s^{(i)} \right) \right\}$$

$$= P_0^{(k)} \exp\left\{ \int_0^t (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} \cdot \prod_{i=1}^{M} \underbrace{\exp\left\{ \int_0^t \sigma_s^{(i,k)} d\tilde{W}_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^{(i,k)} ds \right\}}_{\text{M G. EXP. SOTTO } \mathbb{Q}}$$

(segue dall'indipendenza dei MB)

$$\Rightarrow \exp\left\{ -\int_0^t (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} P_t^{(k)} = \underbrace{P_0^{(k)} \prod_{i=1}^{M} \exp\left\{ \int_0^t \sigma_s^{(i,k)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^{(i,k)} d\tilde{W}_s \right\}}_{\text{MARTINGALA SOTTO } \mathbb{Q}} \quad (***)$$

se il 2° membro è martingala, allora anche il primo membro lo è (sotto $\mathbb{Q}$)

$$\Rightarrow \exp\left\{ -\int_0^t (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} P_t^{(k)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left\{ -\int_0^T (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} \cdot P_T^{(k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{\exp\left\{ -\int_0^t (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\}}_{\text{NOTO, dato } \mathcal{F}_t} \exp\left\{ -\int_t^T (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} P_T^{(k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]$$

$$\Rightarrow P_t^{(k)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left\{ -\int_t^T (r_s - D_s^{(k)}) ds \right\} P_T^{(k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right], \quad \forall k = 1, \dots, N$$

NOTA: $P_t^{(k)}$ è il prezzo FAIR (equo) dell k-simo asset, $\forall k$

STEP 3: 3) $\Rightarrow$ 4)

(8f)

$$\hat{V}_t(\theta) = \frac{V_t(\theta)}{B_t} = \exp\left\{-\int_0^t r_s\,ds\right\} V_t(\theta)$$

D'altra parte,

$$\cancel{d\hat{V}_t \overset{(2)\,\text{PROP.}(2)}{=} \sum_{k=1}^N \theta_t^{(k)}\, d\hat{P}_t^{(k)} + \sum_{k=1}^N \theta_t^{(k)} D_t^{(k)} \hat{P}_t^{(k)}\,dt}$$

$$d\hat{V}_t \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^N \theta_t^{(k)}\, d\hat{P}_t^{(k)} + \sum_{k=1}^N \theta_t^{(k)} D_t^{(k)} \hat{P}_t^{(k)}\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^N \theta_t^{(k)} \left[d\hat{P}_t^{(k)} + D_t^{(k)} \hat{P}_t^{(k)} \right] dt$$

(moltiplichiamo e dividiamo per $e^{\int_0^t D_s^{(k)} ds}$)

$$= \sum_{k=1}^N \exp\left\{-\int_0^t D_s^{(k)} ds\right\} \theta_t^{(k)} \left[\exp\left\{\int_0^t D_s^{(k)} ds\right\} d\hat{P}_t^{(k)} + \hat{P}_t^{(k)} \exp\left\{\int_0^t D_s^{(k)} ds\right\} D_t^{(k)}\, dt\right]$$

(derivata del prodotto di funzioni composte)

$$= \sum_{k=1}^N \theta_t^{(k)} \exp\left\{-\int_0^t D_s^{(k)} ds\right\} d\Big(\underbrace{\exp\left\{\int_0^t D_s^{(k)} ds\right\} \hat{P}_t^{(k)}}_{A}\Big)$$

Per ipotesi, A è martingala sotto Q della forma (***)

→ Se passiamo alla forma integrale, avremo una somma di integrali stocastici rispetto ai $dW_t^{(k)}$

→ data l'indipendenza dei MB

→ $\hat{V}_t(\theta)$ è martingala (perché l'integrale stocastico di MG è esso stesso MG).

STEP 4: 4) $\Rightarrow$ 1)

Ragioniamo per assurdo $\Rightarrow \exists\, \Theta_t$ strategia di arbitraggio

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}\left(\hat{V}_t(\Theta) - \hat{V}_0(\Theta) > 0\right) > 0 \\ \mathbb{P}\left(\hat{V}_t(\Theta) - \hat{V}_0(\Theta) \geq 0\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[\omega : \left(\hat{V}_t(\Theta)(\omega) - \hat{V}_0(\Theta)(\omega)\right) < 0\right] = \phi$$

ma $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ per hp $\Rightarrow \mathbb{Q}\left[\omega : \left(\hat{V}_t(\Theta)(\omega) - \hat{V}_0(\Theta)(\omega)\right) < 0\right] = \phi$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}\left[\left(\hat{V}_t(\Theta) - \hat{V}_0(\Theta)\right) \geq 0\right] = 1$$

D'altra parte, $\hat{V}$ è martingala sotto $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\hat{V}_t(\Theta) - \hat{V}_0(\Theta)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}\left[\left(\hat{V}_t(\Theta) - \hat{V}_0(\Theta)\right) = 0\right] = 1$$

$$\overset{\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}}{\Rightarrow} \mathbb{P}\left[\left(\hat{V}_t(\Theta) - \hat{V}_0(\Theta)\right) = 0\right] = 1$$

ASSURDO per la seconda condizione nella def. di arbitraggio

$\Rightarrow \nexists$ strategie di arbitraggio $\blacksquare$