Primo esempio di modello: MODELLO DI BLACK-SCHOLES-MERTON

IPOTESI:

1) Il prezzo del sottostante evolve secondo un MBG
$\Rightarrow$ dinamica diffusiva lognormale.

2) Sono consentite vendite allo scoperto senza alcuna limitazione
$\Rightarrow$ $\nexists$ limitazioni normative

3) Non vengono pagati dividendi
$\Rightarrow$ il pagamento di dividendi comporterebbe variazioni del prezzo in prossimità di tale evento (contro HP 1).

4) $\nexists$ costi di transazione ed i titoli sono perfettamente divisibili
$\Rightarrow$ vorremmo mercato perfetto

5) I titoli sono scambiati continuamente
$\Rightarrow$ vantaggio matematico (per l'uso di strumenti relativi alle forme differenziali)

6) $\nexists$ opportunità di arbitraggio
$\Rightarrow$ prezzi sono martingale!

7) le operazioni finanziarie (acquisto/vendita) vengono effettuate ad un tasso di interesse r costante, così come il parametro di volatilità è lo stesso per tutte le scadenze
$\Rightarrow$ vantaggio matematico.

OSS: Nella realtà molte delle HP del modello di BSM sono smentite da evidenze empiriche (e.g., vola non costante)
$\Rightarrow$ l'importanza di tale modello è la tecnica presentata per trovare il prezzo di una opzione in modelli a tempo continuo senza far ricorso alle preferenze degli agenti, ma utilizzando SOLO assenza di arbitraggio e replicazione di portafoglio.

4

$$\begin{cases} \dfrac{dB_t}{B_t} = r\,dt \,, \quad B_0 = 1 \\ \\ \dfrac{dS_t}{S_t} = \mu\,dt + \sigma\,dW_t \,, \quad S_0 = s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1) \qquad (\text{MBG})$$

$$(\text{Itô}) \Rightarrow \begin{cases} B_t = e^{-rt} \\ S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \right\} \end{cases} \quad (2)$$

NB: Avremo $\mu \geq r$ quando $S_t$ rappresenta un'azione o un indice azionario.
Ciò dipende dal fatto che, in tal caso, la domanda aggregata dei titoli rischiosi in equilibrio è positiva e gli investitori sono avversi al rischio $\Rightarrow \mu > r$.
L'uguaglianza si ha se gli investitori sono neutrali al rischio.

Da (2) si ricava che $S_t \sim \log N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$

$\Rightarrow$ log-returns hanno distribuzione normale.

$W \sim N(0,t) \Rightarrow \sigma W \sim N(0, \sigma^2 t)$

$\Rightarrow Z = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$

(5)

Consideriamo ora un titolo derivato $\varphi(S_t)$, di cui conosciamo il valore a scadenza $\varphi(S_T) \overset{!!}{=} F(t,S_t)$

$\Rightarrow$ come valutiamo il prezzo del derivato al tempo $t=0$ ?

Assumiamo che $\varphi = F(t, S_t)$.

$$\Rightarrow dF \overset{(ITO)}{=} \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \langle dS_t, dS_t \rangle$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t}\left[S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t\right] + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dt$$

$$\Rightarrow dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} dW_t$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = \underbrace{\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\right)}_{\mu_F} dt + \underbrace{\frac{\sigma S_t}{F}\frac{\partial F}{\partial S_t}}_{\sigma_F} dW_t$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = \mu_F dt + \sigma_F dW_t$$

Inoltre, il primo thm fondamentale di ATP garantisce che, se non ci sono opportunità di arbitraggio, allora $\exists (\lambda_F)_{t\geq 0}$ t.c.

$$\mu_F - r = \sigma_F \lambda_F.$$

La stessa relazione vale per il sottostante: $\exists \lambda_S$ t.c.

$$\mu - r = \sigma \lambda_S$$

$(\lambda_S = \lambda_F)$ $\Rightarrow \lambda = \boxed{\frac{\mu_F - r}{\sigma_F} = \frac{\mu - r}{\sigma}}$ (**) $\rightsquigarrow$ SHARPE RATIO (premio al rischio).

Sostituendo, avremo:

$$(**) \Rightarrow \frac{\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial F}{\partial S^2}\right) - r}{\frac{1}{F}\sigma S \frac{\partial F}{\partial S}} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{F}\mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{1}{F}\sigma^2 S^2 \frac{\partial F}{\partial S^2} - r = \frac{\frac{1}{F}\mu \cancel{\sigma} S \frac{\partial F}{\partial S} - \frac{1}{F} r \cancel{\sigma} S \frac{\partial F}{\partial S}}{\cancel{\sigma}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{F}\mu S \frac{\partial F}{\partial S}} + \frac{1}{2}\frac{1}{F}\sigma^2 S^2 \frac{\partial F}{\partial S^2} - r = -\frac{1}{F} r S \frac{\partial F}{\partial S} + \cancel{\frac{1}{F}\mu S \frac{\partial F}{\partial S}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial F}{\partial S^2} - rF + rS\frac{\partial F}{\partial S} = 0}_{\text{FORMULA DI BLACK-SCHOLES}} \qquad (BS)$$

con condizione finale $F(T, S_T) = \varphi(S_T)$ (q.tà nota).

$\Rightarrow$ PDE, non SDE!

<u>NB</u>: 1) La formula di BS resta valida anche quando i coeff. non sono costanti

2) In (BS) non compare $\mu$ $\Rightarrow$ il termine di drift è ininfluente ai fini della valutazione delle opzioni, mentre $r, \sigma$ giocano un ruolo importante.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{PERCHÉ?}}$ (*)

Ricordiamo che siamo sotto le HP del primo Teorema fondamentale di APT

$\Rightarrow \exists\ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ t.c.

$$F(t, S_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} F(T, S_T) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} \varphi(X_T) \mid \mathcal{F}_t\right], \quad (FK)$$

RAPPRESENTAZIONE DI FEYNMAN-KAC

* Ricordiamo che la dinamica del sottostante sotto la misura fisica $\mathbb{P}$ è

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

D'altra parte, il modello BS assume l'assenza di arbitraggi

$$\overset{(1^\circ \text{ THM APT})}{\Longrightarrow} \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \mu - r = \sigma \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

NOTA: $\lambda$ è il PREMIO AL RISCHIO. Rappresenta il rendimento in eccesso richiesto dagli investitori, per unità di $\sigma$, per detenere il titolo rischioso.

NB: $\sigma$ rappresenta la rischiosità del titolo.

D'altra parte, l'assenza di arbitraggi e la completezza del mercato garantiscono che $\exists!\ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Inoltre, possiamo costruire un'opportuna martingala esponenziale, data da

$$M_t := \exp\left\{ -\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma}\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 ds \right\}$$

$$\overset{(\text{GIRSANOV})}{\Longrightarrow} \tilde{W}_t := W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t \text{ è MB sotto } \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow W_t = \tilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} t \Rightarrow dW_t = d\tilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma \left( d\tilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma}\, dt \right)$$

$$= \mu\, dt + \sigma\, d\tilde{W}_t - \frac{\cancel{\sigma}(\mu - r)}{\cancel{\sigma}}\, dt$$

$$= \mu\, dt + \sigma\, d\tilde{W}_t - \mu\, dt + r\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = r\, dt + \sigma\, d\tilde{W}_t$$ è la dinamica dei sottostante sotto la misura (unica) neutrale al rischio.