$$\Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma \left(d\tilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right)$$

$$= \mu dt + \sigma d\tilde{W}_t - \cancel{\sigma}\frac{(\mu - r)}{\cancel{\sigma}} dt$$

$$= \mu dt + \sigma d\tilde{W}_t - \mu dt + r dt$$

$$\Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{W}_t$$ è la dinamica del sottostante sotto la misura (unica) neutrale al rischio.

ESEMPIO: Valutazione Call Europea

$\varphi(x) = \max\{x - k, 0\}$, k = STRIKE PRICE

$$F(t, S_t) \overset{(1° \text{ THM APT})}{=} \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r(T-t)} \varphi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{Q}\left[\varphi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} (S_T - k)^+ \, dQ(s)$$

$S_T \sim \ln(N(\text{media}, \text{varianza}))$ ha supporto su $\mathbb{R}^+$

(8)

Ma $S_T = S_t e^Y$, con $Y \sim \log N\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma^2(T-t)\right)$

$= S_t \exp\{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma W_{T-t}\}$ $\quad \sigma W,\ W \sim N(0, T-t) = \sqrt{T-t}\, Z$,

$$\Rightarrow S_T = S_t \exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, Z\right\},\quad Z \sim N(0,1) \text{ con densità } \varphi(z)$$

$$\Rightarrow F(t,S_t) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}^+} \left(S_t \exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, Z\right\} - K\right)^+ \underbrace{\varphi(z)\,dz}_{dQ(z)}$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{z_0}^{+\infty} \left(S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, z} - K\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz,$$

$\Rightarrow$ per togliere la parte positiva $(\cdot)^+$

NOTA:
Quanto vale z_0?

$(x-K)^+ = 0 \Leftrightarrow x-K \leq 0 \Leftrightarrow x \leq K$

$\Rightarrow$ l'integranda in $(\circ)$ si annulla quando

$$S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, z} - K \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_t}{S_t} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\, z} \leq \frac{K}{S_t}$$

$$\Leftrightarrow e^{\sigma\sqrt{T-t}\, z} \leq \frac{K}{S_t} e^{-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}$$

$$\Leftrightarrow z\sigma\sqrt{T-t} \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$\Leftrightarrow z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} =: z_0$$

Proseguendo con il calcolo di $F(t,S_t)$, si ha

$$F(t,S_t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{+\infty} \left(S_t\, e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,z-\frac{z^2}{2}} - K e^{-z^2/2} \right) dz$$

distribuiamo il prodotto

$$= \underbrace{\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{+\infty} S_t\, e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,z-\frac{z^2}{2}}\, dz}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{e^{-r(T-t)} K}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{+\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz}_{\mathrm{II}}$$

RECALL

$\Phi_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(s)\, ds$ ← CDF (funzione di ripartizione)

$\int_x^{+\infty} \varphi_X(s)\, ds = \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = \Phi_X(-x)$

$$\mathrm{I}: \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{+\infty} S_t\, e^{-\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}z^2}{\cancel{2}} - \cancel{2}\sigma\sqrt{T-t}\,z + \frac{\cancel{2}\sigma^2(T-t)}{\cancel{2}}\right) + r(T-t)}\, dz$$

$$= \frac{e^{-\cancel{r(T-t)}+\cancel{r(T-t)}}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \int_{z_0}^{+\infty} S_t\, \frac{e^{-\frac{\left(z-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz = S_t\, \Phi\left(-z_0 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

(NB: $\Phi(+\infty) = 0$)

$$\mathrm{II}: e^{-r(T-t)} K \int_{z_0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz = e^{-r(T-t)} K\, \Phi(-z_0)$$

$$\Rightarrow F(t,S_t) = S_t\, \Phi\left(-z_0 + \sigma\sqrt{T-t}\right) - K e^{-r(T-t)}\, \Phi(-z_0)$$

Se poniamo $d_1 := \sigma\sqrt{T-t} - z_0$ e $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -z_0$ → vedi pag. 9b

avremo la nota formula

$$F^c(t,S_t) = S_t\, \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\, \Phi(d_2).$$

In maniera analoga si ricava l'espressione per la PUT:

$$F^p(t,S_t) = K e^{-r(T-t)}\, \Phi(-d_2) - S_t\, \Phi(-d_1).$$

→ VERIFICA PER ESERCIZIO.

NB:

$$d_1 = \sigma\sqrt{T-t} - z_0 = \sigma\sqrt{T-t} - \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= \frac{\sigma^2(T-t) - \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= \frac{\sigma^2(T-t) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Di conseguenza:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

OSS:

Nel modello di Black-Scholes-Merton, si ha che ~~[illegible]~~

CALL: $$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} F^{c}(T, S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = S_t\,\Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)$$

PUT: $$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} F^{p}(T, S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = K e^{-r(T-t)}\,\Phi(-d_2) - S_t\,\Phi(-d_1)$$

Pb: Assumendo BS come modello per il sottostante, (10)
è possibile determinare una strategia di investimento auto-finanziante?

⇒ <u>IMPORTANTE</u>: infatti questo ci dice che ogni derivato in BS può essere replicato usando i soli titoli a disposizione (i.e., bond e stock)

⇒ mercato completo!

⇒ questa procedura va sotto il nome di HEDGING STRATEGY (o COPERTURA)

⇒ consiste nella eliminazione del rischio legato all'acquisto di una opzione.

Sia F un titolo derivato t.c. $F = F(t, S_t)$ e supponiamo di disporre di una certa quantità di ricchezza (un'unità) che vogliamo investire in bond e stock:

$$\begin{cases} u_S = \text{quota da investire in stock} \\ u_B = \text{" " " " bond} \end{cases}, \text{ con } u_S + u_B = 1 \Rightarrow u_B = 1 - u_S$$

$$\Rightarrow \frac{dV_t}{V_t} = u_S \frac{dS_t}{S_t} + (1 - u_S)\frac{dB_t}{B_t} \qquad (\mathbb{P})$$

↳ variazione percentuale del ptf

$$= u_S\left[\mu\, dt + \sigma\, dW_t\right] + (1 - u_S)\, r\, dt$$

$$= u_S(\mu - r)\, dt + r\, dt + u_S \sigma\, dW_t$$

$$= \underbrace{\left[u_S(\mu - r) + r\right]}_{\text{drift}} dt + \underbrace{u_S \sigma}_{\text{vola}}\, dW_t$$

Imponiamo la condizione di replica:
ricordiamo la dinamica di F

$$\frac{dF_t}{F_t} = \underbrace{\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\right)}_{\mu_F} dt + \underbrace{\frac{1}{F}\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial S_t}}_{\sigma_F} dW$$

(REPLICA)

$$\Rightarrow \frac{dF}{F} = \frac{dV}{V} \iff \begin{cases} \mu_F = u_S(\mu - r) + r & (1) \\ \sigma_F = \sigma u_S & (2) \end{cases}$$

La (1) deve valere per l'assenza di arbitraggi. (è da imporre alle forze ... EDM ...)

La (2) implica

$$\frac{1}{F}\cancel{\sigma} S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} = \cancel{\sigma} u_S \Rightarrow u_S = \frac{S_t}{F}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial S_t}}_{=\Delta}$$

$\Delta \rightarrow$ # di quote di sottostante da acquistare per unità di derivato

$\Downarrow$

Δ esprime la variazione infinitesima di prezzo del derivato per unità di variazione del prezzo del sottostante.

$\Rightarrow$ La procedura è nota come Δ-HEDGING.

OSS: Δ varia nel tempo $\Rightarrow$ continuo ribilanciamento del portafoglio $\Rightarrow$ copertura dinamica

$\Rightarrow$ Δ-hedging funziona meglio al diminuire della velocità di variazione del Δ

$\Rightarrow \Gamma := \dfrac{\partial \Delta}{\partial S} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial S^2}$ ⇝ velocità di variazione.

Altri parametri utili:

$\rho = \dfrac{\partial F}{\partial r}$ → rischio di tasso di interesse

$Vega = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}$ → rischio di volatilità

$\Theta = \dfrac{\partial F}{\partial t}$ → rischio temporale

NOTA: Δ, Γ, ρ, Vega, Θ sono le GRECHE.

ESEMPIO: Se $\varphi(x) = \max\{S_T - K, 0\}$ (opzione call)

$\Rightarrow \Delta = \Phi(d_1)$.

PROOF: esercizio ∎