# PRELIMINARIES



## SPAZIO DI PROBABILITÀ: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathbb{P}$ → (misura di) probabilità

$\Omega$ → spazio campionario

$\mathcal{F}$ → σ-algebra su $\Omega$

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, $(A \subset \Omega)$
3) $\forall A_i \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$ t.c. $A_i \in \mathcal{F}$
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

## VALORE ATTESO CONDIZIONATO:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (v.a.)} \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$$

→ valore atteso di X

Sia B un evento t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|B] := \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$$

→ valore atteso condizionato rispetto all'evento B (FORMULA DI BAYES)

Consideriamo ora

$\mathcal{G} := \{\phi, \Omega, B, B^c\}$ (σ-algebra generata da B)

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)}_{\text{è una v.a.}} = \begin{cases} \mathbb{E}[X|B], & \omega \in B \\ \mathbb{E}[X|B^c], & \omega \in B^c \end{cases}$$

IN PRATICA: $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ è la miglior approssimazione di $X$, sulla base dell'informazione contenuta in $\mathcal{G}$.

Ciò permette di dare una def. generale di v.a. condizionata

DEF.

Sia $X$ una v.a. integrabile sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\rightarrow$ $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

Sia $\mathcal{G}$ una $\sigma$-algebra $\subseteq \mathcal{F}$ e sia $Y$ una v.a. tale che

(i) $Y$ è integrabile e $\mathcal{G}$-misurabile

(ii) $\int_A X \, d\mathbb{P} = \int_A Y \, d\mathbb{P}, \ \forall A \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

PROPRIETÀ

$\forall X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \ \forall \mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$

(a) se $Y$ è indipendente da $\sigma(X, \mathcal{G}) \Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathbb{E}[$

(b) se $Y$ è $\mathcal{G}$-misurabile e limitata $\Rightarrow Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}$

(c) Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,|\,\mathcal{H}\big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$

PROOF: VERIFICA PER ESERCIZIO.

<u>DEF.</u> Una FILTRAZIONE $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è una famiglia di sotto-$\sigma$-algebre di $\mathcal{F}$.

$\Rightarrow$ Lo spazio di prob. dotato di filtrazione è $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ed è detto SPAZIO FILTRATO.

## PROCESSI STOCASTICI

<u>DEF</u> Un PROCESSO STOCASTICO (PS) su $\mathbb{R}^N$ è una collezione di v.a.

$X = \{X_t\}_{t\in I}$, dove $I = [0,T]$, oppure $I = \mathbb{R}^+$,

tale che $X : \begin{cases} I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t,\omega) \longmapsto X(t,\omega) =: X_t(\omega) = X_t \end{cases}$

è misurabile rispetto a $\underbrace{\mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}}_{\text{SPAZIO PRODOTTO}}$

<u>NOTA!</u>

- fissato $\overline{\omega} \in \Omega \Rightarrow X(t,\overline{\omega})$ è una funzione deterministica
- fissato $\overline{t} \in I \Rightarrow X(\overline{t},\omega)$ è una v.a.
- fissati $\overline{t} \in I$, $\overline{\omega} \in \Omega \Rightarrow X(\overline{t},\overline{\omega}) \in \mathbb{R}$

Dato un PS $X = \{X_t\}_{t\in I}$, l'applicazione

$t \longmapsto X_t(\omega)$ è una TRAIETTORIA del proc. stocastico, ~~$\forall\omega\in\Omega$~~.

Un PS $X = \{X_t\}_{t\in I}$ è

- CONTINUO, se le traiettorie sono continue, $\forall\omega\in\Omega$

- ASSOLUTAMENTE CONTINUO, se le traiettorie sono continue per quasi tutti $\omega\in\Omega$

- CONTINUO A DESTRA se

$$X_t(\omega) = X_{t+}(\omega) := \lim_{s\to t^+} X_s(\omega), \quad \forall t\in I, \ \forall\omega\in\Omega$$

- ADATTATO alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ se la sua filtrazione naturale

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma\left(X_s \mid 0\leq s\leq t\right) = \left\{\right.$$
$$= \sigma\left(\left\{X_s^{-1}(H) \mid 0\leq s\leq t,\ H\in\mathcal{B}\right\}\right), \quad t\in I$$

è t.c. $\tilde{\mathcal{F}}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$, $\forall t$.

**DEF.** Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità filtrato.

Un MOTO BROWNIANO (MB) è un processo stocastico

$$W = \{W_t\}_{t\geq 0} \quad \text{t.c.}$$

1) $W_0 = 0$ q.c.

2) $W$ è $\mathcal{F}_t$-adattato e continuo

3) $\forall\, t > s \geq 0$, la v.a. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_s$.

**OSS:**

1) $\Rightarrow$ Convenzione
q.c. $\rightarrow$ con prob. 1
$\rightarrow \mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$

2) $W$ continuo $\Rightarrow$ le traiettorie sono continue

$W$ adattato $\Rightarrow$ Se $W$ rappresenta il prezzo di un titolo, allora dobbiamo conoscere il suo valore al tempo $t$ sulla base delle info a disposizione fino a quell'istante.

DEF.

Un proc. stocastico $X=\{X_t\}_{t\ge 0}$ è PROGRESSIVAMENTE MISURABILE (rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$) se, $\forall t$,

$$\{(s,\omega)\in[0,T]\times\Omega \mid X_s(\omega)\in H\}\in\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}_t,$$

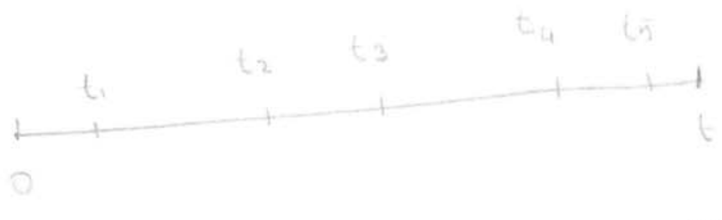
$\forall H\in\mathcal{B}$.

DEF.

Data $g:[0,t]\longrightarrow\mathbb{R}^N$, sia $\xi:=\{t_0,t_1,\dots,t_N\}$ una partizione di $[0,t]$.

La VARIAZIONE QUADRATICA di $g$, relativa a $\xi$, è

$$V_t^{(2)}(g,\xi):=\sum_{k=1}^{N}\left|g(t_k)-g(t_{k-1})\right|^2.$$




NON NECESSARIAMENTE UNIFORME!

NB: $\langle W\rangle_t\neq 0$ significa che le traiettorie (del MB) non sono derivabili!