DEF. M ps integrabile ed adattato su $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$

$\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$

(i) M è MARTINGALA (w.r.t. $\mathcal{F}$ e $\mathbb{P}$) se

$$M_s = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s], \quad \forall\, 0 \leq s \leq t$$

(ii) M è SUPER-MARTINGALA se

$$M_s \geq \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s], \quad \forall\, 0 \leq s \leq t$$

(iii) M è SUB-MARTINGALA se

$$M_s \leq \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s], \quad \forall\, 0 \leq s \leq t.$$

NB: (i) vuol dire che la legge di dipendenza tra le v.a. che definiscono il proc. M è caratterizzata dal fatto che la previsione di uno stato futuro del proc, nota l'evoluzione del proc. negli istanti precedenti, dipende solo dall'ultima osservazione realizzata

$\Rightarrow$ M è un proc. di Markov

OSS: Un proc. è una martingala se le sue possibili traiettorie non mostrano uno specifico trend

Sia $\{M_t\}_{t\geq 0}$ una MG e consideriamo una variazione Δt del tempo. Allora

$$\mathbb{E}\left[M_{t+\Delta t} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right] \overset{(\text{lin})}{=} \mathbb{E}\left[M_{t+\Delta t} \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= M_t - M_t = 0 \longrightarrow \text{CARATTERIZZAZIONE DELLE MG}$$

$\Rightarrow$ l'incremento della traiettoria su Δt è in media nullo

Analogamente:

$\{M_t\}_{t\geq 0}$ SUPER-MG $\Rightarrow \mathbb{E}\left[M_{t+\Delta t} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right] \geq 0$

$\Rightarrow$ il prox. è in media crescente.

$\{M_t\}_{t\geq 0}$ SUB-MG $\Rightarrow \mathbb{E}\left[M_{t+\Delta t} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right] \leq 0$

$\Rightarrow$ il prox. è in media decrescente

PROBLEMA: I prox. che si incontrano nella realtà in generale non sono martingale

X ES: Prezzi di attività finanziarie (super/sub-martingale)

$\Rightarrow$ che legame c'è tra MG e SUPER/SUB-MG?

$\Rightarrow$ SCOMPOSIZIONE DI DOOB-MEYER

DEF. Sia $\{A_t\}_{t\geq 0}$ un PS su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\{A_t\}_{t\geq 0}$ è PREVEDIBILE se $A_0 \in \mathcal{F}_0$ e $\forall t \geq 0$, $A_{t+\Delta t}$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile.

DEF. Un prox. $\{A_t\}$ è CRESCENTE se è prevedibile e le sue traiettorie sono crescenti q.c.

~~Vale~~ $\forall\, 0 \leq s < t$, $0 = A_0 \leq A_s(\omega) \leq A_t(\omega)$, per q.c. $\omega \in \Omega$

DEF. PRELIMINARI

1) $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ misure sullo stesso spazio di misura $(\Omega, \mathcal{F})$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{P}$-assolutamente continua se,
$\forall A \in \mathcal{F}$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 0$, allora $\mathbb{Q}(A) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Se si ha $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, allora
$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ (Equivalenti).

2) THM (RADON-NIKODYM)
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di misura finito.
Sia $\mathbb{Q}$ una misura finita su $(\Omega, \mathcal{F})$ t.c. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.
$\Rightarrow \exists\, L : \Omega \to \mathbb{R}$, $L \geq 0$, t.c.

(i) L è $\mathcal{F}$-misurabile

(ii) L è $\mathbb{P}$-integrabile

(iii) $\mathbb{Q}(A) = \int_A L \, d\mathbb{P}$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

(iv) $\exists!$ $\mathbb{Q}$ q.c.

NB: $L := \left. \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}}$ $\rightsquigarrow$ derivata di Radon-Nikodym (o densità di $\mathbb{Q}$)

$\Updownarrow$

$d\mathbb{Q} = L \, d\mathbb{P}$

3) Sia $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un MOTO BROWNIANO e sia $Z \in \mathbb{L}^2$ un processo stocastico.

$$\Rightarrow M_t := \exp\left\{+\int_0^t Z_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s^2 \, ds\right\}, \quad t \in [0,T]$$

è detta MARTINGALA ESPONENZIALE.

N.B: M_t è il caso generale dell'esempio visto in precedenza

↳ $X_t = \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ è martingala

NB2: A volte M_t è definito con il segno "−" dappertutto.

↳ in qst caso, cambia il Q-MB: $\tilde{W} = W + \int dt$

THM. Sia $\{M_t\}$ una sub-MG w.r.t. $\{\mathcal{F}_t\}$.

$\Rightarrow \exists!$ decomposizione

$$X_t = M_t + A_t, \quad t \geq 0,$$

dove $\{M_t\}$ è MG e $\{A_t\}$ è crescente.

PROOF: NO.

ESEMPIO (finanza):

$$f_T = \max\{0, S_T - k\} \quad \text{(CALL OPTION)}$$

dove $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ è il prezzo del sottostante.

$\Rightarrow$ Calcoliamo $\mathbb{E}[f_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\max\{0, S_T - k\} \mid \mathcal{F}_t]$

$\Rightarrow$ vogliamo verificare se

$$f_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[f_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} f_T \mid \mathcal{F}_t], \quad t<T$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{-rT} f_T \mid \mathcal{F}_t] = e^{-rt} f_t$$

VERO se il secondo membro è MG!

In realtà, la dinamica del prezzo della call segue quella del sottostante $\{e^{-rt} S_t\}_{t \geq 0}$

SUB-MARTINGALA

$$\mathbb{E}[e^{-r(T-t)} S_T \mid \mathcal{F}_t] > S_t, \quad t<T$$

(D-M) $\Rightarrow \exists!\ \{M_t\}, \{A_t\}$ t.c. $e^{-rt} S_t = M_t + A_t$

Quindi "basta" conoscere il trend di A_t per definire il valore di mercato della call:

$$M_t = e^{-rt} S_t - A_t$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[M_T \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{-rT} S_T - A_T \mid \mathcal{F}_t\right] = \underbrace{e^{-rT} S_t - A_t}_{\text{martingala}}$$

PROBLEMA: Come trovare nella pratica un valore ~~esatto~~ opportuno per A_t?

$\Rightarrow$ SOLUZIONE: si percorre un'altra strada, quella del cambio di misura (ossia cambio della distribuzione di probabilità del sottostante).

IDEA: Trovare una nuova misura di probabilità rispetto alla quale il prox. di prezzo scontato sia una martingala.

NOTAZIONE:

Sia $Z \sim N(0,1)$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \int_{\infty}^{z} f(u)\,du$$

o equivalentemente

$$dF_Z(z) = f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

THM (GIRSANOV)

Sia $\{Z_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathbb{H}^2$ e sia $M = \{M_t\}_{t\in[0,T]}$ la corrispondente martingala esponenziale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Se $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_T] = 1$, $^{(\text{HP})}$ allora

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t Z_s\, ds, \quad t\in[0,T]$$

è un moto browniano rispetto a $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$.

PROOF:

$$\mathbb{Q}\sim\mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \overset{(\text{THM. R-N})}{\Rightarrow} \exists\, L \text{ (v.a.) t.c. } d\mathbb{Q} = L\, d\mathbb{P}$$

$$\Rightarrow \text{sia } L = M_T \overset{\mathbb{E}[M_T]=1}{\Rightarrow} \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A M_T], \ \forall A\in\mathcal{F}. \ (*)$$

TH: $\widetilde{W}$ è Moto Browniano rispetto a $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ dimostriamo che ha incrementi gaussiani indipendenti.

INCREMENTI GAUSSIANI (tramite f.g.m.) $\longrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t)} \mid \mathcal{F}_t\right] \overset{!}{=} e^{\frac{\lambda^2 (T-t)}{2}}, \ \forall t$

Sia $t=0$ (il caso $t\neq 0$ è analogo).

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_0)} \mid \mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda \widetilde{W}_T}\right] \overset{(*)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda \widetilde{W}_T} M_T\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda \widetilde{W}_T} \exp\left\{\int_0^T Z_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Z_s^2\, ds\right\}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\lambda W_T - \lambda\int_0^T Z_s\, ds + \int_0^T Z_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Z_s^2\, ds\right\}\right]$$

RECALL: $W_T = \int_0^T dW_s$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\lambda\int_0^T dW_s - \lambda\int_0^T Z_s\,ds + \int_0^T Z_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Z_s^2\,ds\right\}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\int_0^T(\lambda + Z_s)\,dW_s - \frac{1}{2}\left(\int_0^T(Z_s^2 + 2\lambda Z_s)\,ds\right)\right\}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\int_0^T(\lambda + Z_s)\,dW_s\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T(Z_s^2 + 2\lambda Z_s + \lambda^2 - \lambda^2)\,ds\right\}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\int_0^T(\lambda + Z_s)\,dW_s\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T(\lambda + Z_s)^2\,ds\right\}\exp\left\{+\frac{\lambda^2 T}{2}\right\}\right]$$

$$= e^{+\frac{\lambda^2 T}{2}}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left\{\int_0^T(\lambda + Z_s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T(\lambda + Z_s)^2\,ds\right\}\right]$$

$$\cancel{= e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{M}_T] = e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{M}_T \mid \mathcal{F}_0]}$$

~~↳ martingala (esponenziale)~~

$$\cancel{= e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}\,\tilde{M}_0}$$

$$= e^{+\frac{\lambda^2 T}{2}}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{M}_T] \overset{(HP)}{=} e^{+\frac{\lambda^2 T}{2}}$$

$$\overset{(t=0)}{\Rightarrow}\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda \tilde{W}_T}\right] = e^{+\frac{\lambda^2 T}{2}}$$ ⇝ F.G.M. di una v.a. normale.

INCREMENTI INDIPENDENTI $\longrightarrow \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, a, a' > 0$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda_1(\tilde{W}_{t+a} - \tilde{W}_t)} \cdot e^{\lambda_2(\tilde{W}_{t+a+a'} - \tilde{W}_{t+a})}\right] =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda_1(\tilde{W}_{t+a} - \tilde{W}_t)} \cdot e^{\lambda_2(\tilde{W}_{t+a+a'} - \tilde{W}_{t+a})} \mid \mathcal{F}_{t+a}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda_1(\tilde{W}_{t+a} - \tilde{W}_a)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda_2(\tilde{W}_{t+a+a'} - \tilde{W}_{t+a})} \mid \mathcal{F}_{t+a}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{\lambda_1(\widetilde{W}_{t+a} - \widetilde{W}_t)} \cdot e^{\frac{\lambda^2(\cancel{t}+\cancel{a}+a' - \cancel{t} - \cancel{a})}{2}} \right]$$

$$= e^{\frac{\lambda^2 a'}{2}} \, \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{E}^{Q}\left[e^{\lambda_1(\widetilde{W}_{t+a} - \widetilde{W}_t)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]\right]$$

$$= e^{\frac{\lambda_2^2 a'}{2}} \, \mathbb{E}^{Q}\left[e^{\frac{\lambda_1^2(\cancel{t}+a-\cancel{t})}{2}} \right] = e^{\frac{\lambda_2^2 a'}{2}} \cdot e^{\frac{\lambda_1^2 a}{2}} \qquad \blacksquare$$

ESERCIZI: (Martingale) | EX.1

1) Sia X una v.a. integrabile. Allora, $Z_t := \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ è una martingala.

2) Sia $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ un moto Browniano. Allora, $X_t := W_t^2 - t$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala.

3) Sia $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ un moto Browniano. Allora, $X_t := \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

4) Sia $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson con intensità λt, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(i) Calcolare $\langle N_t \rangle$

(ii) Provare che $X_t := N_t - \lambda t$ è una martingala

(iii) Verificare se $X_t := (N_t - \lambda t)^2$ e $Y_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ sono martingale.