CAMBIO DI NUMERAIRE:

I prezzi devono essere espressi tutti nella stessa U.d.M.

$\Rightarrow$ li dobbiamo standardizzare rispetto ad un dato PS detto NUMERAIRE

$\Rightarrow$ cambia la EMM $\mathbb{Q}$!

Ricordiamo che il 1° THM FONDAMENTALE DI APT garantisce che se $\exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ allora $\underbrace{\frac{S_t}{B_t}}_{\text{prezzo scontato del ptf.}}$ è martingala sotto $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ in questo caso, B_t è il nostro numeraire.

Sia Π_t il prezzo di un derivato t.c. $\frac{\Pi_t}{B_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t\right]$,

con H_T = PAYOFF del derivato

$$\Rightarrow \Pi_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} H_T \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Sostituiamo B_t con un nuovo processo S_t^0:

$$\frac{\Pi_t}{S_t^0} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left[\frac{H_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t\right] \Rightarrow \Pi_t = S_t^0\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left[\frac{H_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$\Rightarrow$ possiamo sempre operare questa sostituzione?

<u>TEOR</u> (fondamentale del cambio di numeraire)
Sia $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ una EMM su $(\Omega, \mathcal{F}$ ~~[illegible]~~$)$. Dato un processo $\{S_t^0\}_{t\geq 0}$ con $S_t^0 > 0$ e t.c. S_t^0 è martingala sotto $\mathbb{Q}$, $\exists\, \mathbb{Q}^0 \sim \mathbb{Q}$ tale che $\frac{S_t}{S_t^0}$ è martingala sotto $\mathbb{Q}^0$, qualunque sia il processo S_t. Inoltre, $L := \frac{d\mathbb{Q}^0}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_T^0}{B_T S_0^0}$.

PROOF:

i) L_t è $\mathbb{Q}$ - martingala. Infatti:

$\forall X \in \mathbb{L}^2$, $M_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t]$. $\forall s<t$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_s] = L_s$$

$\Rightarrow$ in particolare, $L_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L|\mathcal{F}_t]$, $\forall t$, è martingala.

ii) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_t] = 1$, $\forall t$. Infatti:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L|\mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L] = \int_\Omega L(\omega)\, d\mathbb{Q}(\omega)$$

$$= \int_\Omega \frac{d\mathbb{Q}^0(\omega)}{d\mathbb{Q}(\omega)}\, d\mathbb{Q}(\omega) = \int_\Omega d\mathbb{Q}^0(\omega) = 1.$$

iii) (cambio di misura per valori attesi). $\exists \mathbb{Q}^0 \sim \mathbb{Q}$, $\forall X$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{Q}^0(\omega) = \int_\Omega X(\omega) \frac{d\mathbb{Q}(\omega)}{d\mathbb{Q}(\omega)}\, d\mathbb{Q}^0(\omega)$$

$$= \int_\Omega X(\omega) \frac{d\mathbb{Q}^0(\omega)}{d\mathbb{Q}(\omega)}\, d\mathbb{Q}(\omega) = \int_\Omega X(\omega) L(\omega)\, d\mathbb{Q}(\omega)$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X \cdot L].$$

Allora: $\underline{\text{TH}}$: $\mathbb{E}^{Q^0}\left[\frac{S_t}{S_t^0} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \frac{S_s}{S_s^0}, \ \forall s<t$

$$\mathbb{E}^{Q^0}\left[\frac{S_t}{S_t^0} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \frac{\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{S_t^0} L \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{Q}\left[L_t \mid \mathcal{F}_s\right]} = \frac{\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{S_t^0}\mathbb{E}^{Q}\left[L \mid \mathcal{F}_t\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{Q}\left[L_t \mid \mathcal{F}_s\right]}$$

$$= \frac{\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{S_t^0} L_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]}{L_s} = \frac{\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{S_t}{\cancel{S_t^0}} \frac{\cancel{S_t^0}}{B_t \cancel{S_0^0}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]}{\frac{S_s^0}{B_s \cancel{S_0^0}}}$$

$$= \frac{B_s}{S_s^0}\,\mathbb{E}^{Q}\Bigg[\underbrace{\frac{S_t}{B_t}}_{Q\text{-MG per def.}} \,\Bigg|\, \mathcal{F}_s\Bigg] = \frac{\cancel{B_s}}{S_s^0}\frac{S_s}{\cancel{B_s}} = \frac{S_s}{S_s^0} \quad \blacksquare$$

$\underline{\text{NB}}$ $L := \frac{S_T^0}{B_T S_0^0} = \frac{dQ^0}{dQ}$

$$\forall t \Rightarrow L_t = \frac{S_t^0}{B_t S_0^0} = \frac{dQ^0|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}}$$

APPLICAZIONE: MISURA FORWARD

⇒ Consideriamo come numeraire il prezzo $p(t,T)$ di un T-bond (ZCB)

⇒ $\underbrace{\mathbb{Q}^T}_{\text{MISURA FORWARD}} \sim \mathbb{Q}, \mathbb{P}$ corrispondente al cambio di numeraire da B_t a $p(t,T)$

(TEOR) ⇒ $$L = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{p(t,T)}{B_t\, p(0,T)} \quad (\bullet) \Rightarrow \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^T} = \frac{B_t\, p(0,T)}{p(t,T)}$$

Se Π_t è il prezzo di un derivato con payoff X_T

$$\Rightarrow \Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} X_T \mid \mathcal{F}_t \right]$$

(1° THM APT)

passiamo da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}^T \Rightarrow \tilde{L}_T = \frac{1}{L_T} = \frac{B_T\, p(0,T)}{p(T,T)}$

(t=0) $$\Rightarrow \Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_T}{B_T} \right]$$

(TEOR) $$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{X_T}{B_T} \cdot L_T^{-1} \right] \overset{(\bullet)}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{X_T}{\cancel{B_T}} \frac{p(0,T)\, \cancel{B_T}}{\underbrace{p(T,T)}_{=1}} \right]$$

prima (3) delle dim: $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X \cdot L]$ $\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X \cdot L^{-1}]$

$$= p(0,T)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X_T]$$

$Caplet(t_k) = \tau_k\, p(0,T_k) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_k}}[(L(T_{k-1}) - \kappa)^+]$

⇒ In generale: $\Pi_t = p(t,T)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X_T \mid \mathcal{F}_t]$.

⇒ Questo giustifica la def. di Caplet \ Floorlet (vedi pag 7d)

NOTA: Se r_t deterministico, allora $\mathbb{Q}^T \equiv \mathbb{Q}$.

⇒ Nel nostro caso, r_t non deterministico

⇒ È possibile avere una formula per la valutazione di derivati tipo-BS che valga in generale?

⇒ Sì, se effettuiamo un cambio di numeraire.

essendo σ_1^2 il coeff. di dif del processo del prezzo del sottostante nel prezzo di ZCB).

TH: $\Pi_0 = S_0 \cdot \Phi(d_1) - k \cdot p(0,T)\, \Phi(d_2)$,

con $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{k \cdot p(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma}{\sqrt{\Sigma}}$, $d_2 = d_1 - \sqrt{\Sigma}$, $\Sigma := \int_0^T \sigma_1^2$

15d

$$(S_T-K)^+=(S_T-K)\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}=S_T\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}-K\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}$$

(1° THM APT)

$$\Rightarrow \Pi_t=\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}(S_T-K)^+\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]$$

$$=\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{B_t}{B_T}(S_T-K)\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]$$

NUOVO NUMERAIRE $L=\frac{S_T}{B_T\cdot S_0}$ NUOVO NUMERAIRE $L=\frac{p(t,T)}{B_T\, p(0,T)}$

$$=\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{B_t}{B_T}S_T\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]-K\,\mathbb{E}^{Q}\left[\frac{B_t}{B_T}\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]$$

(TEOR) $=\mathbb{E}^{Q^S}\left[\frac{B_t S_T}{B_T}\frac{S_0 B_T}{S_T}\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\Big|\mathcal{F}_t\right]-K\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\frac{B_t}{B_T}\cdot\frac{B_T\,p(0,T)}{p(T,T)}\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\Big|\mathcal{F}_t\right]$

$$=S_0\,\mathbb{E}^{Q^S}\left[B_t\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]-K\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[B_t\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]\cdot p(0,T)$$

$(t=0)\ (\Rightarrow B_0=1)$

$$\Rightarrow \Pi_0=S_0\underbrace{\mathbb{E}^{Q^S}\left[\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\right]}_{Q^S(S_T\geq K)}-K\underbrace{\mathbb{E}^{Q^T}\left[\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}\right]}_{Q^T(S_T\geq K)}p(0,T)=S_0\,Q^S(S_T\geq K)-K\,Q^T(S_T\geq K)\,p(0,T)$$

1) MISURA FORWARD:

Poniamo $Z_t:=\dfrac{S_t}{p(t,T)}$, con $dZ_t=Z_t\left[\mu_t^Z dt+\underbrace{\sigma_t^Z}_{\text{deterministico}} dW_t^P\right]$

(Q^T)

$$\Rightarrow dZ_t=Z_t\sigma_t^Z dW_t^{Q^T}$$

$$\Rightarrow Z_t=Z_0\exp\left\{\int_0^T\sigma_s^Z dW_s^{Q^T}-\frac{1}{2}\int_0^T(\sigma_s^Z)^2ds\right\}$$

$\hookrightarrow$ distribuzione log-normale

$$\Rightarrow Z_t=Z_0\exp\{X\},\quad X\sim N\left(-\tfrac{1}{2}\Sigma^2,\Sigma^2\right),$$

$$\text{con } \Sigma^2:=\int_0^T(\sigma_s^Z)^2ds$$

$$\Rightarrow Q^T(S_T\geq K)=Q^T\left(\frac{S_T}{p(T,T)}\geq K\right)=Q^T(Z_T\geq K)$$

$$=Q^T\left(Z_0\exp\{X\}\geq K\right)=Q^T\left(\exp\{X\}\geq\frac{K}{Z_0}\right)$$

$Z_0=\dfrac{S_0}{p(0,T)}$

15e

$$= \mathbb{Q}^T\left(\exp\{X\} \geq \frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) = \mathbb{Q}^T\left(X \geq \ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\sqrt{\Sigma^2}\,\tilde{X} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \geq \ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right)\right), \quad \text{con } \tilde{X}\sim N(0,1)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\tilde{X} \geq \frac{\ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(\tilde{X} \geq - \frac{-\ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(-\tilde{X} \leq \frac{-\ln\left(\frac{K\cdot p(0,T)}{S_0}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(-\tilde{X} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K\cdot p(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}}}_{=:\, d_2}\right) = \Phi(d_2)$$

2) MISURA $\mathbb{Q}^S$

Analogamente:

$$Y_t := \frac{p(t,T)}{S_t} =: \frac{1}{Z_t}, \quad dY_t = -Y_t\left[\mu^Y_t\,dt + \underbrace{\sigma^Z_t}_{\text{stesso del caso } T!}\,dW^{\mathbb{P}}_t\right]$$

$(\mathbb{Q}^S)$

$$\Rightarrow dY_t = -Y_t\,\sigma^Z_t\,dW^{\mathbb{Q}^S}_t$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 \exp\left\{-\int_0^T \sigma^Z_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma^Z_s)^2\,ds\right\}$$

$\hookrightarrow$ distr. log-normale

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 \exp\{X\}^{(*)}, \quad X\sim N\left(-\frac{1}{2}\Sigma^2, \Sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}^S\left(S_T \ge K\right) = \mathbb{Q}^S\left(\frac{1}{S_T} \le \frac{1}{K}\right) = \mathbb{Q}^S\left(\frac{p(T,T)}{S_T} \le \frac{1}{K}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(Y_T \le \frac{1}{K}\right) \overset{(*)}{=} \mathbb{Q}^S\left(Y_0 \exp\{X\} \le \frac{1}{K}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(\exp\{X\} \le \frac{1}{K \cdot Y_0}\right) = \mathbb{Q}^S\left(\exp\{X\} \le \frac{S_0}{K \cdot p(0,T)}\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(X \le \ln\left(\frac{S_0}{K \cdot p(0,T)}\right)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(\sqrt{\Sigma^2} \cdot \tilde{X} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \le \ln\left(\frac{S_0}{K \cdot p(0,T)}\right)\right), \quad \tilde{X} \sim N(0,1)$$

$$= \mathbb{Q}^S\left(\tilde{X} \le \underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K \cdot p(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}}}}_{d_1}\right) = \Phi(d_1)$$

OSS:

$$d_1 - \sqrt{\Sigma^2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K \cdot p(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}} - \sqrt{\Sigma^2} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K p(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2}{\sqrt{\Sigma^2}} = d_2 \Rightarrow d_2 = d_1 - \sqrt{\Sigma^2}$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = S_0 \mathbb{Q}^S\left(S_T \ge K\right) - K \mathbb{Q}^T\left(S_T \ge K\right)$$

$$= S_0 \cdot \Phi(d_1) - K p(0,T) \Phi(d_2) \quad \blacksquare$$

↳ FORMULA GENERALE PER LA VALUTAZIONE DI OPZIONI (Geman, El Karoui, Rochet 1995)