Specifichiamo ora la struttura a termine:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t$$

NOTA: Supponiamo di essere sotto $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow W_t = \tilde{W}_t$!

$\Rightarrow$ come scegliamo α e σ (no arbitraggi)?

(1° THM APT)

$$\Rightarrow \underbrace{r_t + A(t,T) + \frac{1}{2}\left(S(t,T)\right)^2}_{} = r_t$$

↳ DRIFT della dinamica di $p(t,T)$

$$\Rightarrow A(t,T) + \frac{1}{2}\left(S(t,T)\right)^2 = 0 \ , \ \forall T$$

$$\Rightarrow -\int_t^T \alpha(t,s)\,ds + \frac{1}{2}\left(-\int_t^T \sigma(t,s)\,ds\right)^2 = 0$$

(derivata w.r.t. T)

$$\Rightarrow -\alpha(t,T) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left(\int_t^T \sigma(t,s)\,ds\right)\sigma(t,T) = 0$$

$$\cancel{\Rightarrow -\alpha(t,T) - \sigma(t,T)S(t,T) = 0}$$

$$\Rightarrow -\alpha(t,T) + \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)\,ds = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)\,ds}}_{}$$

↳ CONDIZIONE SUL DRIFT DI HEATH-JARROW-MORTON (HJM)

$\Rightarrow$ garantisce che σ può essere scelta arbitrariamente.

$$\Rightarrow df(t,T) = \left[\sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)\,ds\right]dt + \sigma(t,T)\,dW_t \rightarrow \boxed{\text{EQUAZIONE DI HJM}}$$

Lo schema da usare nella pratica è il seguente:

1) Si specifica la funzione $\sigma(t,T)$

2) Si determina $\alpha(t,T)$ tramite condizione di HJM

3) Si prende la curva iniziale di mercato

$$f^*(0,T), \; T \geq 0$$

4) Si ricava $f(t,T)$ dalla dinamica descritta tramite equazione HJM (in forma integrale)

$$\Rightarrow f(t,T) = f^*(0,T) + \int_t^T A(t,s)\,ds + \int_t^T S(t,s)\,ds, \quad \forall T \geq 0$$

5) Si calcolano i prezzi dei bond tramite def. in termini di tasso istantaneo.

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)\,ds\right\}$$

<u>APPLICAZIONE</u>: valutazione di derivati europei nel modello HJM (gaussiano). (VERIFICA PER ESERCIZIO)

$t = 0 \to$ data di valutazione

$T \to$ maturity opzione su bond che paga 1 unità di moneta in $S > T$ (↳ Bond maturity)

(call) $\Rightarrow$ ~~PAYOFF~~ Π_T $= \max\{p(T,S) - K, 0\}$

$$\Rightarrow \Pi_0 = p(0,S)\,\phi(d_1) - K\,p(0,T)\,\phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{p(0,S)}{p(0,T)K}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2_{S,T}}{\sqrt{\Sigma^2_{\dots}}}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\Sigma^2_{S,T}}, \quad \Sigma^2_{S,T} := \int_0^T \sigma^2_{S,T}(s)\,ds, \quad \sigma_{S,T}(s) := -\int_T^S \sigma(t, \dots$$

ESEMPI DI MODELLI HJM

1) Modello di HO – LEE

$$\sigma(t,T) := \sigma \in \mathbb{R}^+$$

$$\overset{\text{(HJM DRIFT)}}{\Rightarrow} \alpha(t,T) = \sigma \int_t^T \sigma \, ds = \sigma^2 (T-t)$$

$$\overset{\text{(under } \mathbb{Q})}{\Rightarrow} df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t$$

$$= \sigma^2 (T-t)\,dt + \sigma\,dW_t$$

$$\Rightarrow f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma^2 (T-s)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW_s$$

$$= f(0,T) + \sigma^2 \int_0^t (T-s)\,ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

$$= f(0,T) + \sigma^2 T \int_0^t ds - \sigma^2 \int_0^t s\,ds + \sigma (W_t - W_0)$$

$$= f(0,T) + \sigma^2 T (t-0) - \sigma^2 \frac{s^2}{2}\Big|_0^t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 T t - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \sigma W_t}$$ STRUTTURA A TERMINE

$$= \underbrace{f(0,T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2}\right)}_{\text{deterministic term}} + \underbrace{\sigma W_t}_{\text{stochastic term}}$$

$$\Rightarrow r_t = f(t,t) = f(0,t) + \sigma^2 t^2 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow \boxed{r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \sigma W_t}$$ SHORT RATE

$$\Rightarrow dr_t = \sigma^2 (T-t)\,dt + \sigma\,dW_t$$

Cosa possiamo dire della dinamica risk-neutral di $p(t,T)$?

PROP.

insieme di parametri

Sia $dr_t = a(t, r_t; \theta)\,dt + b(t, r_t; \theta)\,dW_t^{\mathbb{Q}}$.

Se $\begin{cases} a(t,r;\theta) = \alpha_t r_t + \beta_t \\ b(t,r;\theta) = \sqrt{\gamma_t r_t + \delta_t} \end{cases}$, allora $\exists!$ soluzione della eq. fondamentale della struttura a termine, della forma

$$p(t,T) = F^T(t,r_t) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)\cdot r\},$$

dove le funzioni A, B soddisfano il seguente sistema di ODE:

$$\begin{cases} \dot{A}(t,T) - \beta_t B(t,T) + \frac{1}{2}\delta_t (B(t,T))^2 = 0, & B(T,T) = 0 \\ +\dot{B}(t,T) + \alpha_t B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma_t (B(t,T))^2 + 1 = 0, & A(T,T) = 0 \end{cases}$$

PROOF:

Eq. fondamentale è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^T}{\partial t} + \underbrace{\left[\mu^T(t,r_t) - \lambda(t,r_t)\,\sigma^T(t,r_t)\right]}_{a(t,r,\theta)} \dfrac{\partial F^T}{\partial r} + \dfrac{1}{2}\big(\underbrace{\sigma^T(t,r_t)}_{b(t,r,\theta)}\big)^2 \dfrac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - r F^T = 0 \\ F^T(T, r_T) = 1 \end{cases}$$

GUESS & VERIFY APPROACH:

Sia $F^T(t,r_t) = \exp\{A(t,T) - B(t,T)\cdot r_t\} =: F_t^T$

$$\Rightarrow \frac{\partial F^T}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial B}{\partial t}\right) F^T(t,r_t) = \left(\dot{A} - r_t \dot{B}\right) F^T(t,r_t)$$

$$\frac{\partial F^T}{\partial r_t} = -B(t,T)\, F^T(t,r_t), \quad \frac{\partial^2 F^T}{\partial r_t^2} = (B(t,T))^2 F^T(t,r_t)$$

$$\Rightarrow \left(\dot A - r_t \dot B\right)\cancel{F_t^T} + \alpha(t,r_t;\theta)\left(-B\cancel{F_t^T}\right) + \frac{1}{2}\left(b(t,r_t;\theta)\right)^2 B^2 \cancel{F_t^T} - r_t \cancel{F_t^T} = 0$$

$$\Rightarrow \dot A - r_t \dot B + (\alpha r_t + \beta)(-B) + \frac{1}{2}(\gamma r_t + \delta)B^2 - r_t = 0$$

$$\Rightarrow \dot A - r_t \dot B - \alpha B r_t - \beta B + \frac{1}{2}\gamma r_t B^2 + \frac{1}{2}\delta B^2 - r_t = 0$$

$$\Rightarrow \left(\dot A - \beta B + \frac{1}{2}\delta B^2\right) + r_t\left[-\dot B - \alpha B + \frac{1}{2}\gamma B^2 - 1\right] = 0$$

PRINCIPIO IDENTITÀ DEI POLINOMI

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot A - \beta B + \frac{1}{2}\delta B^2 = 0 \\ -\dot B - \alpha B + \frac{1}{2}\gamma B^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

↳ SISTEMA DI ODE DEL PRIMO ORDINE.

Nel caso del modello di HO-LEE:

$(\theta_t + 0\cdot r_t)dt + \sqrt{0\cdot r_t + \sigma^2}\, dW_t$

$\sigma^2 (T-t)$

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

$$\Rightarrow \alpha_t = 0,\ \beta_t = \theta_t,\ \gamma_t = 0,\ \delta_t = \sigma^2$$

$$\cancel{\Rightarrow \dot A + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +\dot B + 1 = 0 \\ \dot A - \theta_t B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot B(t,T) = -1 \\ \dot A(t,T) = \theta_t B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 (B(t,T))^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(t,T) = \cancel{-}(T-t) = (t-T) \\ A(t,T) = \int_t^T \theta_s (s-T)\,ds - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T (s-T)^2 ds \end{cases}$$

$s - T = z,\ s = z + T$

$\Rightarrow ds = dz$

$s = t \Rightarrow z = t - T$

$s = T \Rightarrow z = 0$

$$= \int_{t-T}^{0} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{t-T}^{0} = -\frac{(t-T)^3}{3}$$

14e

$$\Rightarrow \begin{cases} B(t,T) = -(T-t) \\ A(t,T) = \displaystyle\int_t^T \theta_s (s-T)\,ds - \frac{\sigma^2}{2}\frac{(t-T)^3}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(t,T) = -(T-t) \\ A(t,T) = \displaystyle\int_t^T \theta_s (s-T)\,ds + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(t,T) = F^T(t,r) = \exp\left\{ \int_t^T \theta_s (s-T)\,ds + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 + (T-t)r \right\}$$