# CENNI DI TEORIA DELLA MISURA



DEF.

Sia $X$ un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'$\boxed{\text{insieme delle parti}}^{(A)}$ di $X$.

Un insieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ è una $\sigma$-algebra di $X$ se:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

2) se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in X$

3) se $A_k \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

DEF.

Sia $\mathcal{A}$ una $\sigma$-algebra di $X$. Una funzione

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

è una misura (positiva) se

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) se $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $A_k \in \mathcal{A}\ \forall k$ t.c. $A_k \cap A_h = \emptyset$, $k \neq h$,

allora $$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (*)$$

NOTA:

(i) La proprietà (*) è detta ADDITIVITÀ NUMERABILE

(ii) La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detto SPAZIO DI MISURA.

## ESEMPIO:

Sia $x_0 \in X$ un punto fissato. La funzione

$$\delta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty] \quad \text{t.c.}$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in A \\ 0, & \text{se } x_0 \in A^c \end{cases}$$

è la MISURA DI DIRAC sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{P}(X)$

## REMARK: (★)

$$X = \{1,2,3\}. \Rightarrow \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{\text{INSIEME DELLE PARTI DI } X} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$$

## DEF.

Sia $X$ un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di $X$.

Una funzione

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$$

è una misura esterna se:

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) se $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$ (monotonia)
3) $\forall \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (subadditività numerabile)

13

DEF.

Sia $X$ un insieme e $\mu$ una misura esterna su $X$.
Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è MISURABILE se, per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A) \subset X$ è un $\boxed{\text{insieme misurabile}}$ di $X$ (rispetto alla misura esterna $\mu$).

$\downarrow$

$\forall E \subset X$,

$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$.

(PROPRIETÀ DI SPEZZAMENTO)

PROP.

Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $f+g$, $f \cdot g$, $f/g$ ($g \neq 0$ su $X$), $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$ sono funzioni misurabili. ∎

14

DEF.

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\mathcal{M}(X)$ lo spazio delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ $\mu$-misurabili.
Per $1 \leq p \leq +\infty$, si ha

$$L^p(X) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X) : \int_X |f(x)|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

La quantità $\|f\|_p := \left( \int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ è la NORMA $p$ della funzione $f$.

DEF.

Sia $X$ un insieme e $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti su $X$.
Sia, inoltre, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi.
Allora, $\mathcal{S}$ è un SEMIANELLO su $X$ se

1) $\phi \in \mathcal{S}$
2) Se $A, B \in \mathcal{S}$, allora $A \cap B \in \mathcal{S}$
3) $\forall A, B \in \mathcal{S}$, $\exists \{C_i\}_{i=1,\dots,k} \in \mathcal{S}$, $C_i \cap C_j = \phi$ $(i \neq j)$, t.c.

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i$$

ESEMPIO: prodotto cartesiano di $\sigma$-algebre.

Siano $X, Y$ due insiemi e sia $\mathcal{A}$ la $\sigma$-algebra su $X$ e $\mathcal{B}$ la $\sigma$-algebra su $Y$.

Sia $\mathcal{S} := \{A \times B \in \mathcal{P}(X \times Y) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

$\Rightarrow \mathcal{S}$ è un semianello su $X \times Y$. Infatti:

1) $\phi_A \times \phi_B \in \mathcal{S}$
2) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e definiamo
$H_1 := A_1 \times B_1$, $H_2 := A_2 \times B_2$.

(def.) $\Rightarrow$ ~~Supponiamo~~ $H_1, H_2 \in \mathcal{S}$.

Inoltre:

$$H_1 \cap H_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \underset{\text{prop. prodotto cartesiano}}{=} \overbrace{(A_1 \cap A_2)}^{\in \mathcal{A}} \times \overbrace{(B_1 \cap B_2)}^{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{S}$$

3) Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $H_1 = A_1 \times B_1$, $H_2 = A_2 \times B_2$.

Allora:

$$H_1 \setminus H_2 = (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \underbrace{(A_1 \setminus A_2 \times B_1) \cup (A_1 \cap A_2 \times B_2 \setminus B_1)}_{\text{unione disgiunta}} \in$$

DEF.

Siano $X$ un insieme, $\mathcal{S}$ un semianello e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$.

$\mu$ è MISURA su $\mathcal{S}$ se

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) Se $A, A_n \in \mathcal{S}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$

allora $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

ESEMPIO:

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ due spazi di misura

e sia $\mathcal{S} = \{ A \times B \in \mathcal{P}(X \times Y) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$ un semianello di $X \times Y$. Allora, la MISURA PRODOTTO

$$\mu \otimes \nu (A \times B) := \mu(A) \nu(B)$$

è una misura sul semianello $\mathcal{S}$. Infatti:

1) $\mu \otimes \nu (\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \nu(\emptyset) = 0$

2) Siano $A_n \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia, inoltre,

$$A \times B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)^{(\cdot)}, \quad \text{con } (A_n \times B_n) \cap (A_m \times B_m) = \emptyset \ (n \neq m)$$

Se $x \in A$, allora

$$\{x\} \times B \overset{(\cdot)}{=} \bigsqcup_{\substack{n=1 \\ x \in A_n}}^{\infty} (\{x\} \times B_n), \quad \text{con } \{x\} \cap B_n = \emptyset, \forall n.$$

$$\Rightarrow \nu(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n) \cdot \mathbb{1}_{\{A_n\}}(x)$$

$$\Rightarrow \int_A \nu(B)\, d\mu = \int_A \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n) \mathbb{1}_{\{A_n\}}(x)\, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n) \int_A \mathbb{1}_{\{A_n\}}(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n) \mu(A_n).$$

Inoltre, $\int_A \nu(B)\, d\mu = \mu(A)\nu(B)$

$$\Rightarrow \mu(A)\nu(B) := \mu \otimes \nu (A \times B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) \quad \blacksquare$$

**THM** (Fubini)

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura $\sigma$-finiti, con $\nu$ misura completa, e sia $\mu \otimes \nu$ la misura prodotto su $X \times Y$. Se $f \in L^1(X \times Y)$, allora:

(i) $y \mapsto f(x,y)$ è $\nu$-integrabile, ~~per~~ $\mu$-quasi ogni $x \in X$

(ii) $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ è $\mu$-integrabile

(iii) $$\int_X \left[ \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)$$

$$= \int_Y \left[ \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right] d\nu(y)$$ $\blacksquare$

THM (Tonelli)

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura $\sigma$-finiti, $\nu$ misura completa, e sia $\mu \otimes \nu$ la misura prodotto su $X \times Y$. Se $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ è $(\mu \otimes \nu)$-misurabile non negativa, allora:

(i) $y \longmapsto f(x,y)$ è $\nu$-misurabile, $\mu$-q.o. $x \in X$

(ii) $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ è $\mu$-misurabile

(iii) $$\int_X \left[ \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x,y)\, d\big(\mu(x) \otimes \nu(y)\big).$$ $\blacksquare$

$$= \int_Y \left[ \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right] d\nu(y).$$