3) SWAPTIONS:

Opzione che ha come sottostante uno swap.

$\Rightarrow$ SWAPTION BUYER $\rightarrow$ diritto di entrare in uno swap payer ad un fissato istante temporale futuro, con un tasso swap (TASSO SWAPTION) fissato contrattualmente al momento dell'acquisto.

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_{\text{swaption}} = \tau_{\text{swap}} \\ T_{\text{swaption}} = \text{primo istante in cui avviene lo scambio} \end{cases}$$

Analogamente, si definisce SWAPTION SELLER.

OSS:

1) Se il diritto di entrare/uscire da uno swap è stabilito coincidere con la maturity, allora parleremo di ~~SWAPTIONS EUROPEE~~ EUROPEAN SWAPTIONS.

2) Se il diritto di entrare/uscire da uno swap può essere esercitato in un qualsiasi tempo futuro precedente la scadenza, allora parleremo di AMERICAN SWAPTIONS.

3) Se il diritto di entrare/uscire da uno swap può essere esercitato in un insieme discreto di istanti precedenti la scadenza, allora parleremo di BERMUDIAN OPTIONS.

4) Una swaption è ATM se il tasso swaption coincide con il tasso swap dell'IRS sottostante che si avrebbe, al momento dell'acquisto, dalla valutazione arbitrage-free del sottostante (di tipo forward). $\rightarrow$ PFS

5) Dati:

T = maturity della swaption

$i_{swaption}$ = tasso associato

$\{t_1+\tau,\ t_1+2\tau,\ \dots,\ t_1+M\tau\}$ = date di scambio
$= \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$
~~tasso~~ t_1 = data del primo reset

$$\Rightarrow i^{ATM}_{swaption}\ \cancel{(t, T_1, T_M)} = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_M)}{\tau \sum_{k=1}^{M} P(t,T_k)}$$

~~NOTA: Swaption viene esercitata quando $PFS_0 > 0$.~~

~~Il suo valore alla scadenza T_0 è $(N=1)$~~

$$\cancel{[PFS_0(T_0)]^+ = \Big[\underbrace{P(T_0,T_0)}_{=1} - P(0,T) - i_{swaption} \sum_{k=1}^{M} \tau_k P(T_k,T_0)\Big]^+}$$

$$\cancel{= BVP_t \big[P(0,T) - P}$$

$\cancel{PFS_{T_0} = [PFS}$

NOTA:

Swaption viene esercitata quando $PFS_0 > 0$.
Il suo valore a scadenza è:

$$\left(PFS_0(T_0)\right)^+ = \left(p(T_0,T_0) - p(T_0,T) - k\sum_{k=1}^{M} \tau_k\, p(T_0,T_k)\right)^+$$

$$= BPV_{T_0}\left(\frac{p(T_0,T_0) - p(T_0,T)}{BVP_{T_0}} - k\right)^+$$

$$= BPV_{T_0}\left(i^{(0,T_0)}_{swaption} - k\right)^+$$

$$\Rightarrow PSW_0(t) = BPV_{T_0}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(i_{swaption}(0,T_0) - k\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$\hookrightarrow$ prezzo dell'opzione swaption

OSS: Se conosciamo la dinamica di $i_{swaption}$ (SWAP MARKET MODEL) e quella del tasso variabile (LIBOR MARKET MODEL), si ha

$$\overset{(BS)}{\Rightarrow} PSW_0(t) = BPV_0(t)\left[i_{swaption}\,\phi(d_1) - k\,\phi(d_2)\right],$$

$$\text{dove } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{i_{swaption}}{k}\right) + \frac{1}{2}\Sigma^2_t}{\sqrt{\Sigma^2_t}}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\Sigma^2_t}$$

essendo $d i_{swaption}(t) = i_{swaption}(t)\,\sigma_t\, dW_t$

$$\Rightarrow i_{swaption}(T_0) = i_{swaption}(t)\exp\Big\{\underbrace{\int_t^{T_0}\sigma_s\, ds - \frac{1}{2}\int_t^{T_0}\sigma_s^2\, dW_s}_{\sim N\left(\int_t^{T_0}\sigma_s ds,\ \int_t^{T_0}\sigma_s^2 ds\right)}\Big\}$$