INTEREST RATES & FIXED-INCOME SECURITIES

GOAL: studiare la struttura a termine dei tassi
(TERM-STRUCTURE INTEREST RATES)

↳ la relazione tra differenti tassi di interesse, su diversi orizzonti temporali, scegliendo "oggi" come punto di vista.

NOMENCLATURA:

SPOT RATE: tasso della crescita annuale effettiva che eguaglia valore presente e valore futuro.

⇒ costo dell'investimento su un dato orizzonte temporale, a partire da un fissato istante di tempo.

SHORT RATE: costo (annualizzato) dell'investimento ~~tra~~ ~~da~~ in un intervallo di tempo di cui si conoscono gli estremi

⇒ permette di determinare il tasso di sconto "vero" da applicare sul dato periodo di tempo

Noi faremo riferimento a STRUMENTI FINANZIARI FIXED-INCOME ("entrata fissa")

↳ Tipi di investimento tali che il detentore è obbligato ad effettuare pagamenti di entità fissata, in tempi anch'essi prefissati.

Un esempio è dato dai BONDS (obbligazioni)

Titolo di debito che ~~obbliga~~ assicura al possessore il diritto di avere rimborsato, a scadenza, il capitale prestato all'emittente, più un interesse. $\rightarrow$ T-BOND = contratto che garantisce un'unità monetaria alla scadenza T

$\Rightarrow$ 3 parole chiave (che determinano la natura dei flussi di cassa):

- CAPITALE (PRINCIPAL)
- SCADENZA (MATURITY)
- INTERESSI (INTEREST PAYMENT)

$\Rightarrow$ Come calcolare il prezzo di un bond?

Sia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ t.c. $\frac{dB_t}{B_t} = r_t\,dt$ la dinamica di uno strumento risk-free, con $B_0 = 1$ (MONEY MARKET ACCOUNT)

N.B: Assumiamo r_t deterministico!

$$\Rightarrow B_t = B_0\, e^{\int_0^t r_s ds} = e^{\int_0^t r_s ds}, \quad \forall t \geq 0$$

DEF.

Si chiama FATTORE DI SCONTO STOCASTICO (STOCHASTIC DISCOUNT FACTOR)

$$D(t,T) := \frac{B_t}{B_T} = \frac{e^{\int_0^t r_s ds}}{e^{\int_0^T r_s ds}} = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

$\rightarrow$ Rappresenta la quantità, al tempo t, di un'unità di moneta al tempo T.

NOTA: Abbiamo già incontrato questo PS:

$$X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T)\, X_T \mid \mathcal{F}_t\right]$$

<u>OSS:</u> Per il primo thm fondamentale di APT dobbiamo far sempre riferimento a $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$
$\hookrightarrow$ EMM

$\Rightarrow$ In questo contesto non stiamo dicendo nulla circa l'unicità di EMM!
($\Rightarrow$ possibile incompletezza del mercato).

<u>DEF.</u>
Uno ZERO-COUPON-BOND (ZCB) è un titolo che <u>paga una unità monetaria al tempo T</u> (maturity) e che vale $P(t,T)$ a $t<T$. $\hookrightarrow \boxed{P(T,T)=1}$

$\Rightarrow \forall\, t<T$, la collezione dei prezzi di ZCB $P(t,T)$ è detta STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI.

<u>OSS:</u>

1) $P(t,T) \overset{\binom{\text{THM}}{\text{APT}}}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T)\cdot P(T,T) \,|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,T) \,|\, \mathcal{F}_t\right]$

2) Spesso facciamo riferimento al TIME TO MATURITY $T-t$
($\Rightarrow$ quanto manca a scadenza?)

3) Sia $\tau(t,T)$ una misura dell'intervallo di tempo tra t e $T \Rightarrow \tau(t,T) = T-t$

$\Rightarrow$ possiamo anche usare $\tau(t,T) = \begin{cases} \text{Actual}/365 \\ \text{Actual}/360 \\ 30/60 \end{cases}$

Generalmente, la struttura a termine è definita in termini di tasso e non di prezzo

- TASSI LINEARI (TASSI LIBOR):

$$p(t,T) = \frac{1}{1+L(t,T)\tau(t,T)} \Longleftrightarrow L(t,T) = \frac{1-P(t,T)}{\tau(t,T)P(t,T)}$$

- TASSI COMPOSTI ANNUALMENTE:

$$p(t,T) = \left(1+i(t,T)\right)^{-\tau(t,T)} \Longleftrightarrow i(t,T) = \left(p(t,T)\right)^{-\frac{1}{\tau(t,T)}} - 1$$

$\Rightarrow$ in generale $p(t,T) = \left(1+\frac{i_k(t,T)}{k}\right)^{-\tau(t,T)k}$,

essendo k il # di periodi dell'anno presi in considerazione

- TASSI COMPOSTI CONTINUI:

$$p(t,T) = \exp\left\{-R(t,T)\tau(t,T)\right\} \Longleftrightarrow R(t,T) = -\frac{\ln\left(p(t,T)\right)}{\tau(t,T)}$$

NOTA: i tassi composti continui si ottengono dai tassi composti su k periodi, per $k \to +\infty$.

- INTENSITÀ ISTANTANEA DI INTERESSE A TERMINE:

$$\phi(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln\left(p(t,T)\right) \Longleftrightarrow p(t,T) = e^{-\int_t^T \phi(t,s)\,ds}$$

A FORWARD E FORWARD RATE AGREEMENT

CONTRATTI

⇒ Presentiamo alcuni esempi di contratti (derivati) su tassi di interesse.

DEF.

UN CONTRATTO FORWARD (a TERMINE) è un contratto stipulato al tempo t che prevede il pagamento di un cash-flow unitario a $T>t$, a fronte di un pagamento $p(t,s,T)$ al tempo s, con $t<s<T$.

$$\Rightarrow p(t,s,T) = \frac{p(t,T)}{p(t,s)} \quad \text{se } \nexists \text{ arbitraggi. } (*)$$

Infatti:

Supponiamo che $(*)$ non sia valida e che

$$p(t,s,T) < \frac{p(t,T)}{p(t,s)} \iff p(t,s,T)\cdot p(t,s) < p(t,T)$$

Supponiamo di seguire 3 operazioni al tempo t:

A) compro Forward

B) vendo ZCB allo scoperto con scadenza T

C) compro $p(t,s,T)$ unità di ZCB con scadenza s

⇒ avremo la seguente situazione:

	t	s	T
A	0	$-p(t,s,T)$	$+1$
B	$p(t,T)$	0	-1
C	$-p(t,s,T)\cdot p(t,s)$	$p(t,s,T)$	0
TOT (somma)	$p(t,T)-p(t,s,T)\cdot p(t,s) > 0$ ⇝ ARBITRAGGIO!		

Possiamo definire un tasso associato a questo contratto: 66

- TASSO FORWARD LINEARE:

$$p(t,s,T) = \frac{1}{1+F(t,s,T)(T-s)} \iff F(t,s,T) = \frac{p(t,s)-p(t,T)}{p(t,T)(T-s)}$$

NOTA:

$$\lim_{T\to s} F(t,s,T) = \lim_{T\to s} \frac{p(t,s)-p(t,T)}{p(t,T)(T-s)} = \phi(t,s)$$

DEF.

Un FRA (Forward Rate Agreement) è un contratto stipulato al tempo t che prevede uno scambio al tempo $T>t$ di un tasso fisso con un tasso variabile ottenuto al tempo s, con $t<s<T$.

t: oggi

s: data del reset del tasso Libor

T: scadenza del contratto (pagamento scambio)

$\Rightarrow$ 2 tipi di contratti FRA: RECEIVER, PAYER

FORMULA DI VALUTAZIONE:

RECEIVER

$$FRA_t^{(R)} = N\cdot(T-s)\Big[\overbrace{i_{FRA}(t,s,T)}^{\text{PARTE FISSA (deterministica)}} - \overbrace{L(s,T)}^{\text{PARTE ALEATORIA (re-investimento)}}\Big]$$

N: NOZIONALE

$i_{FRA}(t,s,T)$: TASSO FISSO

$$\Rightarrow i_{FRA}(t,s,T) = F(t,s,T) \text{ se } \nexists \text{ arbitraggi.}$$