Infatti:

Supponiamo $i_{FRA}(t,s,T) < F(t,s,T)$

e supponiamo di eseguire 4 operazioni ~~di~~ ~~rapporto~~:

A) compro payer FRA al tempo t

B) vendo ZCB allo scoperto con scadenza T con valore complessivo 1 al tempo s

C) vendo ~~...~~ ZCB allo scoperto con scadenza s al tempo t

D) compro $1+(T-s)i_{FRA}(t,s,T)$ unità di ZCB con scadenza T al tempo t

$\Rightarrow$ avremo la seguente situazione:

	t	s	T
A	0	0	$-(T-s)[-i_{FRA}(t,s,T) - L(s,T)]$
B	0	$+1$	$-[1+(T-s)L(s,T)]$ (*)
C	$+p(t,s)$	-1	0
D	$-[1+(T-s)i_{FRA}]p(t,T)$	0	$1+(T-s)i_{FRA}$ (**)
TOT	$p(t,s)-[1+(T-s)i_{FRA}]p(t,T) > 0$		

$\longrightarrow$ ARBITRAGGIO!

(*) deriva da $p(s,T) = 1 \iff \dfrac{1}{1+L(s,T)(T-s)} = 1$

$\iff$ la q.tà da pagare in T è $1+L(s,T)(T-s)$

(**) deriva dal fatto che $p(T,T) = 1$

ESEMPI:

1) CAPS AND FLOORS -

CAP = sequenza di opzioni (una alla fine di ogni intervallo) che dà la possibilità di pagare ad un tasso fisso la q.tà che si dovrebbe pagare al tasso libero.

$\Rightarrow$ Copertura da eventuali movimenti al rialzo del tasso variabile.

$$\text{Caplet}_k(t) := \frac{N}{\tau_k^{-1}}\left[L_k(T_k) - i_{CAP}(t,T_1,\tau,N)\right]^+ , \quad \forall t \geq T_0$$

$\hookrightarrow$ k-simo ~~[illegible]~~ PAYOFF

NOTA: "come" una opzione call, ma non è un derivato con sottostante L_k

$\Rightarrow$ facciamo una assicurazione, che ci dice di pagare ($N=1$)

$$CF_k^{(CAP)} := -\frac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}} + \frac{1}{\tau_k^{-1}}\left[L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right]^+ =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}} + \dfrac{1}{\tau_k^{-1}}\left(L_k(T_k) - i_{CAP}\right), & \text{se } L_k(T_{k-1}) \geq i_{CAP} \\ -\dfrac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}}, & \text{se } L_k(T_k) < i_{CAP} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{i_{CAP}}{\tau_k^{-1}}, & \text{se } L_k(T_{k-1}) \geq i_{CAP} \\ -\dfrac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}}, & \text{se } L_k(T_{k-1}) < i_{CAP} \end{cases}$$

$$\Rightarrow CF_k^{(CAP)} = \frac{1}{\tau_k^{-1}} \min\left\{L_k(T_{k-1}), i_{CAP}\right\}$$

$\hookrightarrow$ pagare!!

LA tecniche di protezione sul prezzo da pagare sul tasso di interesse in futuro (E.G., MUTUI)

$$t \quad T_0 \quad T_1 \quad T_2 \cdots \overbrace{T_{k-1} \quad T_k}^{\text{k-simo intervallo}} \cdots T_{M-1},\ T_M = T$$

GRANDEZZE:

$\tau_k := T_k - T_{k-1}$ lunghezza del k-simo intervallo (TENORE)

t = data attuale di valutazione

M = # di scadenze

PER SEMPLICITÀ:

Nozionale ~~Capitale~~ $N = 1$

Tasso = Libor $\longrightarrow L(t,s,T) = \begin{cases} \dfrac{p(t,s) - p(t,T)}{(T-s)\,p(t,T)} \\[2ex] \dfrac{1}{(T-s)}\left[\dfrac{p(t,s)}{p(t,T)} - 1\right] \end{cases}$

$t \leq s \leq T$

$\Rightarrow$ faremo riferimento ai tassi $L(t, \underbrace{T_{k-1}}_{\text{istante di rilevamento del tasso variabile}}, \underbrace{T_k}_{\text{scadenza di ZCB}})$

$$\Rightarrow L_k(t) := L(t, T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{p(t,T_{k-1})}{p(t,T_k)} - 1\right)$$

LEMMA

$L_k(t)$ è una martingala rispetto alla misura Q su $[0, T_{k-1}]$.

ESERCIZIO

Analogamente, come ci si tutela se i tassi scendono troppo? $\Rightarrow$ $\boxed{\text{FLOOR}}$

$$\text{Floorlet}_k(t) := \frac{N}{\tau_k^{-1}}\left[i_{FLOOR} - L_k(T_{k-1})\right]^+ , \quad t \geq T_0$$

$\hookrightarrow$ k-simo ~~[illegible]~~ PAYOFF

$\Rightarrow$ facciamo una assicurazione, che ci dice di incassare $(N=1)$

$$CF_k^{(FLOOR)} := + \frac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}} + \frac{1}{\tau_k^{-1}}\left[i_{FLOOR} - L_k(T_{k-1})\right]^+$$

$$= \begin{cases} \dfrac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}} + \dfrac{1}{\tau_k^{-1}}\left(i_{FLOOR} - L_k(T_{k-1})\right), & \text{se } i_{FLOOR} \geq L_k(T_{k-1}) \\[2ex] \dfrac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}}, & \text{se } i_{FLOOR} < L_k(T_{k-1}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} + \dfrac{i_{FLOOR}}{\tau_k^{-1}}, & \text{se } i_{FLOOR} \geq L_k(T_{k-1}) \\[2ex] \dfrac{L_k(T_{k-1})}{\tau_k^{-1}}, & \text{se } i_{FLOOR} < L_k(T_{k-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow CF_k^{(FLOOR)} = + \frac{1}{\tau_k^{-1}} \max\left\{i_{FLOOR}, L_k(T_{k-1})\right\}$$

$\hookrightarrow$ Ricevere!

DOMANDA: Cosa succede in $t < T_0$?

$$\Rightarrow \text{Caplet}_k(t) = \tau_k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds} \left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right] \quad \boxed{7d}$$

$$= \tau_k \, p(t,T_k) \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right] \quad (***)$$

SCENARIO 1: libor market model (NOTO)

$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$

$$\Rightarrow dL_k(t) = L_k(t)\sigma_k(t)\, dW_t^{(k)}$$ (MBG senza drift, poiché $L_k \in M$)

(MBG)
$$\Rightarrow L_k(T_{k-1}) = L_k(t) \exp\Big\{ \underbrace{-\frac{1}{2}\int_t^{T_{k-1}} (\sigma_k(s))^2 ds + \int_t^{T_{k-1}} \sigma_k(s)\, dW_s^{(k)}}_{= \; Y \sim N\left(-\frac{1}{2}\int_t^{T_{k-1}} (\sigma_k^2(s))^2 ds, \; \int_t^{T_{k-1}} \sigma_k^2(s) ds\right)} \Big\}$$

ESERCIZIO: Determinare media e varianza di Y

ISOMETRIA DI ITO!

$\Rightarrow L_k(T_{k-1})$ è v.a. log-normale.

(BS-formula) + (***)

$$\Rightarrow \text{Caplet}_k(t) = \tau_k \, p(t,T_k) \left[L_k(t)\Phi(d_1) - i_{cap}\,\Phi(d_2) \right],$$

dove

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{L_k(t)}{i_{CAP}}\right) + \frac{1}{2}\Sigma_k^2(t,T_{k-1})}{\sqrt{\Sigma_k^2(t,T_{k-1})}}, \quad d_2 := d_1 - \sqrt{\Sigma_k^2(t,T_{k-1})}$$

essendo $\Sigma_k^2(t,T_{k-1}) := \int_t^{T_{k-1}} \sigma_k^2(s) ds$.

$$\Rightarrow \text{Cap}(t) = \sum_{k=1}^{M} \text{Caplet}_k(t) = \sum_{k=1}^{M} \tau_k \, p(t,T_k) \left[L_k(t)\Phi(d_1) - i_{cap} \cdot \Phi(d_2) \right]$$

$\hookrightarrow$ FORMULA DI BLACK (BLACK-76)

SCENARIO 2: non si conosce la dinamica del mercato

$$\Rightarrow \mathrm{Caplet}_k(t) = \tau_k \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_k} r_s\,ds} \left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \tau_k \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds}\, e^{-\int_{T_{k-1}}^{T_k} r_s\,ds} \left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \tau_k \mathbb{E}^{Q}\left[\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds}\, e^{-\int_{T_{k-1}}^{T_k} r_s\,ds} \left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_{T_{k-1}} \right] \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \tau_k \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds} \left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_{T_{k-1}}^{T_k} r_s\,ds} \Big| \mathcal{F}_{T_{k-1}} \right] \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \tau_k \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds} \left(L_k(T_{k-1}) - i_{CAP}\right)^+ \cdot p(T_{k-1}, T_k) \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

usiamo la def. di $L_k(T_{k-1})$

$$= \cancel{\tau_k} \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds}\, p(T_{k-1}, T_k) \left(\frac{1}{\cancel{\tau_k}} \left[\frac{p(T_{k-1}, T_{k-1})}{p(T_{k-1}, T_k)} - 1 \right] - i_{CAP} \right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \cancel{\tau_k} \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds}\, \frac{p(T_{k-1}, T_k)}{\cancel{\tau_k}} \left(\frac{\overbrace{p(T_{k-1}, T_{k-1})}^{=1}}{p(T_{k-1}, T_k)} - 1 - \tau_k i_{CAP} \right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds}\, p(T_{k-1}, T_k) \left(\frac{1}{p(T_{k-1}, T_k)} - 1 - \tau_k i_{CAP} \right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds}\, \cancel{p(T_{k-1}, T_k)} \frac{\left(1 - p(T_{k-1}, T_k)\left(1 + \tau_k i_{CAP}\right)\right)^+}{\cancel{p(T_{k-1}, T_k)}} \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds} \left(1 - p(T_{k-1}, T_k)\left(1 + \tau_k i_{CAP}\right)\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right] \boxed{+f}$$

$$= \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds} \left(1 + \tau_k i_{CAP}\right)\left(\frac{1}{1+\tau_k i_{CAP}} - p(T_{k-1}, T_k)\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\Delta\ \mathrm{Caplet}_k(t) = \left(1 + \tau_k i_{CAP}\right) \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_{k-1}} r_s\,ds} \left(\frac{1}{1+\tau_k i_{CAP}} - p(T_{k-1}, T_k)\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right]$$