Supponiamo di avere

- un bond con scadenza T_2;
- un derivato sul bond, con scadenza $T_1 < T_2$ e strike price R.

(OPZIONI EUROPEE)
$$\Rightarrow \begin{cases} C_t : \ \varphi_{T_1}(p(t,T_2)) = \left(p(T_1,T_2) - R\right)^+ \\ P_t : \ \varphi_{T_1}(p(t,T_2)) = \left(-p(T_1,T_2) + R\right)^+ \end{cases}$$

(P THM APT)
$$\Rightarrow \begin{cases} C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} \left(p(T_1,T_2) - R\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (*) \\ P_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} \left(R - p(T_1,T_2)\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{cases}$$

Recall $f = f^+ - f^- \Rightarrow \boxed{f^+ = f^- + f}$ $\quad \begin{cases} f^+ = \max(f,0) \\ f^- = \max(-f,0) \end{cases}$

Dunque:
$$\left(p(T_1,T_2) - R\right)^+ = \left(R - p(T_1,T_2)\right)^+ - R + p(T_1,T_2)$$
$$= \left(R - p(T_1,T_2)\right)^+ - R \cdot p(T_1,T_1) + p(T_1,T_2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} \left(p(T_1,T_2) - R\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$
$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} \left(R - p(T_1,T_2)\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] - R \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} p(T_1,T_1) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
$$+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} p(T_1,T_2) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} C_t = P_t - R \cdot p(t,T_1) + \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} p(T_1,T_2) \middle| \mathcal{F}_t \right]}_{(A)}$$

Per quel che riguarda (A), avremo

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} p(T_1,T_2) \Big| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r_s ds} \Big| \mathcal{F}_{T_1}\right] \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} e^{-\int_{T_1}^{T_2} r_s ds} \Big| \mathcal{F}_{T_1}\right] \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} \Big| \mathcal{F}_{T_1}\right] \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} \Big| \mathcal{F}_t \right] = p(t,T_2).$$

Dunque, si ha

$$\boxed{C_t = P_t - R\, p(t,T_1) + p(t,T_2)}$$

$\hookrightarrow$ PUT-CALL PARITY nel caso di derivati sui tassi (quando il sottostante è un bond).

2) INTEREST RATE SWAPS

IRS = contratto in cui i tassi variabili vengono scambiati con un unico tasso fisso a varie scadenze. (ptf di FRA)

(Grandezze in gioco sono le stesse di CAP\FLOOR)

NOTA: ∄ scambi di denaro!

IRS
- PAYER IRS: pagamento di interessi a tasso fisso a fronte del ricevimento di interessi a tasso variabile
- RECEIVER IRS: pagamento di interessi a tasso variabile a fronte del ricevimento di interessi a tasso fisso.

$$
\mathrm{Swap}_k^{(t)} := \begin{cases} N\tau_k \left[L_k(T_{k-1}) - i_{swap} \right] & (PFS) \\ N\tau_k \left[i_{swap} - L_k(T_{k-1}) \right] & (RFS) \end{cases}
$$

PFS → Payer Forward Swap

$\mathrm{Swap}_k^{(t)}$ → k-simo cash-flow

Quindi (PFS):
alla generica scadenza T_k paghiamo $\underbrace{N\tau_k \, i_{swap}}_{\text{FIXED LEG}}$
e riceviamo $\underbrace{N\tau_k \, L_k(T_{k-1})}_{\text{FLOATING LEG}}$

DOMANDA: Come si valuta IRS? E cosa vuol dire?

(i) determinare swap_k, dato il tasso fisso (UPFRONT)

(ii) determinare $\boxed{i_{swap}}$ (→ SWAP RATE) che rende equo il contratto in t

(N=1) FLOATING

$$\Rightarrow \Pi_k(t) = p(t,T_k)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tau_k L_k(T_{k-1}) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

prezzo del floating leg in (T_{k-1},T_k)

$$\stackrel{(MG)}{=} \tau_k\, p(t,T_k)\, L_k(t)$$

$L_k(t) = L_k(t,T_{k-1},T_k) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{p(t,T_{k-1})}{p(t,T_k)} - 1\right)$

$$= \cancel{\tau_k}\, p(t,T_k)\,\frac{1}{\cancel{\tau_k}}\left(\frac{p(t,T_{k-1})}{p(t,T_k)} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \Pi_k(t) = p(t,T_{k-1}) - p(t,T_k), \quad \forall k$$

↳ prezzo del floating leg in (T_{k-1},T_k)

$$\Rightarrow \Pi(t) = \sum_{k=1}^{M} \Pi_k(t) = \sum_{k=1}^{M}\left(p(t,T_{k-1}) - p(t,T_k)\right)$$

$$= p(t,T_0) - p(t,T_M)$$

↳ prezzo del floating leg in $(0,T)$

Analogamente:

FIXED

$$\Psi_k(t) := \tau_k\, p(t,T_k)\cdot i_{swap}, \ \forall k$$

↳ prezzo del fixed leg in (T_{k-1},T_k)

$$\Rightarrow \Psi(t) = \sum_{k=1}^{M}\Psi_k(t) = \sum_{k=1}^{M} \tau_k\, p(t,T_k)\, i_{swap} = i_{swap}\sum_{k=1}^{M}\tau_k\, p(t,T_k)$$

↳ prezzo del fixed leg in $(0,T)$

$$\Rightarrow PFS(t) = \Pi(t) - \Psi(t)$$

$$= p(t,T_0) - p(t,T) - i_{swap}\underbrace{\sum_{k=1}^{M}\tau_k\, p(t,T_k)}_{=BPV(t)\ \text{(basis point value)}}$$

NOTA:

$PFS(t) > 0$ → vantaggio per chi stipula il contratto

$PFS(t) < 0$ → svantaggio

$PFS(t) = 0$ → Equità

⇒ come si calcola lo swap rate?

$$PFS(t) = 0 \Rightarrow i_{swap} = \frac{p(t,T_0) - p(t,T)}{\underbrace{\sum_{k=1}^{m} \tau_k \, p(t,T_k)}}$$

↳ BASIS POINT VALUE (BPS)
= valore di un ptf di bond
⇒ è un titolo di mercato!

CAP - FLOOR PARITY

$$Cap(t) = Floor(t) + PFS(t)$$

PROOF:

$\forall k = 1, \dots, M,$

$$Caplet_k(t) = \tau_k \, p(t,T_k) \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(L(T_{k-1},T_k) - R\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \tau_k \, p(t,T_k) \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(R - L(T_{k-1},T_k)\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] - R + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[L(T_{k-1},T_k) \middle| \mathcal{F}_t\right]\right]$$

$$= \tau_k \, p(t,T_k) \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(R - L(T_{k-1},T_k)\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] - R \, \tau_k \, p(t,T_k) + \tau_k \, p(t,T_k) \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[L(T_{k-1},T_k) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$\overset{(L \text{ è MG})}{=} \tau_k \, p(t,T_k) \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(R - L(T_{k-1},T_k)\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] - R \, \tau_k \, p(t,T_k) + \tau_k \, p(t,T_k) \, L(t,T_k)$$

$$\overset{\left(\substack{\text{Def. Floorlet} \\ \text{def. } L}\right)}{=} Floorlet_k(t) - R \, \tau_k \, p(t,T_k) + \cancel{\tau_k} \, p(t,T_k) \, \frac{1}{\cancel{\tau_k}} \left(\frac{p(t,T_{k-1})}{p(t,T_k)} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow Caplet_k(t) = Floorlet_k(t) - R \, \tau_k \, p(t,T_k) + p(t,T_{k-1}) - p(t,T_k)$$

$$\Rightarrow Cap(t) = Floor(t) - R \sum_{k=1}^{M} \tau_k \, p(t,T_k) + \sum_{k=1}^{M} \left[p(t,T_{k-1}) - p(t,T_k) \right]$$

$$= Floor(t) - R \cdot BPV(t) + p(t,T_0) - p(t,T)$$

$$= Floor(t) + PFS(t) \quad \blacksquare$$