MODELLI PER LO SHORT-RATE

Esamineremo alcuni esempi di modelli per la dinamica del tasso a breve:

- MODELLO DI VASIČEK
- MODELLO DI COX-INGERSOLL-ROSS (CIR)
- MODELLO DI HULL-WHITE (O VASICEK ESTESO)
- MODELLI AFFINI

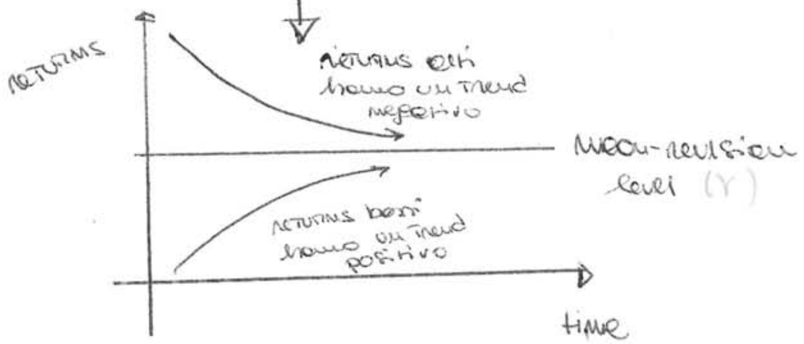
1) MODELLO DI VASICEK

$$dr_t = a(\gamma - r_t)dt + \sigma W_t \quad (\text{sotto } \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}),$$

$\boxed{\text{ORNSTEIN-UHLENBECK}}$

con $a, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}^+$

<u>OSS:</u> modello MEAN-REVERTING a volatilità costante



MEAN-REVERSION $\longrightarrow$ il processo stocastico viene "attratto" verso il corrispondente valore medio di lungo periodo

<u>PARAMETRI:</u>

$a \longrightarrow$ SPEED OF REVERSION (misura la velocità con la quale le traiettorie del processo ritornano verso il valor medio)

$\gamma \longrightarrow$ LONG TERM MEAN LEVEL (misura il livello medio)

$\sigma \longrightarrow$ VOLATILITY (INSTANTANEOUS) (misura istantaneamente la grandezza della randomness del processo)

Il modello di Vasicek può esser risolto esplicitamente:

$$dr_t = a\gamma dt - a r_t dt + \sigma dW_t$$

$$\Rightarrow dr_t + a r_t dt = a\gamma dt + \sigma dW_t$$

$$\Rightarrow e^{at}\left[dr_t + ar_t\,dt\right] = (a\gamma\,dt + \sigma\,dW_t)e^{at}$$

$$\Rightarrow e^{at}dr_t + a e^{at} r_t\,dt = (a\gamma\,dt + \sigma\,dW_t)e^{at}$$

$$\Rightarrow d\left(e^{at} r_t\right) = e^{at} a\gamma\,dt + e^{at}\sigma\,dW_t$$

$$\overset{(\forall s \geq t)}{\Rightarrow} \int_t^s d\left(e^{au} r_u\right) = \int_t^s e^{au} a\gamma\,du + \int_t^s e^{au}\sigma\,dW_u$$

$$\Rightarrow e^{as} r_s - e^{at} r_t = \gamma \int_t^s a e^{au}\,du + \sigma \int_t^s e^{au}\,dW_u$$

$$\Rightarrow e^{as} r_s = e^{at} r_t + \gamma\left[e^{as} - e^{at}\right] + \sigma \int_t^s e^{au}\,dW_u$$

$$\Rightarrow r_s = r_t e^{a(t-s)} + \gamma\left[1 - e^{a(t-s)}\right] + \sigma \int_t^s e^{a(u-s)}\,dW_u$$

$$\Rightarrow r_s = r_t e^{-a(s-t)} + \gamma\left[1 - e^{-a(s-t)}\right] + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)}\,dW_u$$

$\Rightarrow$ Si ricava dall'espressione esplicita dei momenti (pag 16d)

<u>OSS</u>:

$$r_s \sim N\left(\gamma + (r_t - \gamma)e^{-a(s-t)},\ \sigma^2\left(\int_t^s e^{-a(s-u)}\,dW_u\right)^2\right)$$

$$\overset{\text{ISOMETRIA DI ITO}}{=} N\left(\gamma + (r_t - \gamma)e^{-a(s-t)},\ \sigma^2 \int_t^s e^{-2a(s-u)}\,du\right)$$

$$= N\left(\gamma + (r_t - \gamma)e^{-a(s-t)},\ \frac{\sigma^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(s-t)}\right]\right)$$

<u>NOTA</u>: $r_s \sim N(\mu, s^2) \Rightarrow r_s$ può assumere valori negativi!

- Calcoliamo i momenti:

$$\mathbb{E}[r_s] = \mathbb{E}\left[r_t e^{-a(s-t)} + \gamma\left(1 - e^{-a(s-t)}\right) + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u\right]$$

$$\overset{\substack{\text{PROP. V.A} \\ \text{MOTI BROWNIANI}}}{=} \gamma + (r_t - \gamma) e^{-a(s-t)} + 0$$

$$\mathbb{E}[r_s^2] = \mathbb{E}\left[\left\{\left(\gamma + (r_t - \gamma) e^{-a(s-t)}\right) + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u\right\}^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\gamma + (r_t-\gamma) e^{-a(s-t)}\right)^2\right] + \sigma^2 \mathbb{E}\left[\left(\int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u\right)^2\right] +$$

$$+ 2\sigma \underbrace{\mathbb{E}\left[\left[\gamma + (r_t-\gamma) e^{-a(s-t)}\right] \int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u\right]}_{=0}$$

$$\overset{(\text{ITÔ})}{=} \mathbb{E}\left[\left(\gamma + (r_t-\gamma) e^{-a(s-t)}\right)^2\right] + \sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_t^s e^{-2a(s-u)} du\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(r_s) = \mathbb{E}[r_s^2] - \left(\mathbb{E}[r_s]\right)^2 = \sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_t^s e^{-2a(s-u)} du\right]$$

$s - u = y \Rightarrow u = s - y \Rightarrow du = -dy$

$u = t \Rightarrow y = s - t; \quad u = s \Rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(r_s) = \sigma^2 \int_{s-t}^{0} -e^{-2ay} dy = \frac{\sigma^2}{-2a} \int_0^{s-t} -2a e^{-2ay} dy$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{-2a(s-t)} - 1\right) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(s-t)}\right)$$

DOMANDA: Cosa succede se $s \to +\infty$?

$$\Rightarrow \lim_{s \to +\infty} \mathbb{E}[r_s] = \lim_{s \to +\infty} \left[\gamma + (r_t - \gamma) e^{-a(s-t)} \right] = \gamma$$

$\Rightarrow$ GIUSTIFICAZIONE del CONCETTO di MEDIA A LUNGO PERIODO!

$\hookrightarrow$ media non condizionata

Analogamente:

$$\lim_{s \to +\infty} \left(Var(r_s) \right) = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{\sigma^2}{2a} \left[1 - e^{-2a(s-t)} \right] \right) = \frac{\sigma^2}{2a}$$

$\hookrightarrow$ varianza non condizionata

$\Rightarrow$ è direttamente proporzionale alla varianza istantanea e inversamente proporzionale alla velocità di ritorno.

DOMANDA: Quanto vale il prezzo di ZCB in questo modello?

$p(t,T) = F^T(t, r_t)$, dove F^T soddisfa, $\forall T$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^T}{\partial t} + a(\gamma - r_t) \dfrac{\partial F^T}{\partial r} + \dfrac{1}{2} \sigma^2 \dfrac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - r F^T = 0 \quad (**) \\ F(T, r_T) = 1 \end{cases}$$

(PROP in Ho-Lee) $\Rightarrow$ $p(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T) r\}$, (BV)

$dr_t = (a\gamma - a r_t)dt + \sigma dW$

con $\alpha_t = -a$, $\beta_t = a\gamma$, $\gamma_t = 0$, $\delta_t = \sigma^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{A}(t,T) - a\gamma B(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) = 0, & A_T = 0 \\ +\dot{B}(t,T) - a B(t,T) + 1 = 0, & B_T = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere questo sistema di ODEs.

(i) $+\dot{B}(t,T) - a\,B(t,T) + 1 = 0$

$\Rightarrow \dot{B}(t,T) \mp a\,B(t,T) = \pm 1$ $\neq 0$

La ODE del 1° ordine : $\dot{y}(t) + a_0(t)\,y(t) = g(t)$, $y(t_0) = y_0$

non omogenea

$$\Rightarrow y(t) = e^{-G(t)}\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\,e^{G(s)}\,ds\right],$$

$$\text{con } G(t) := \int_{t_0}^{t} a_0(s)\,ds$$

$\Rightarrow$ Nel nostro caso: $g(t) = -1$ e $a_0(t) = -a$ costante

$$\Rightarrow G(t) = \int_T^t -a\,ds = +a(T-t) \qquad \left(t_0 = T \Rightarrow y(t_0) = y_0 = 0\right)$$

$$\Rightarrow B(t,T) = e^{\mp a(T-t)}\left[0 + \int_T^t (-1)\,e^{\pm a(T-s)}\,ds\right]$$

$$= e^{\mp a(T-t)} \int_t^T e^{\pm a(T-s)}\,ds$$

$z := T - s \Rightarrow s = T - z \Rightarrow ds = -dz$

Se $s = t \Rightarrow z = T - t$

Se $s = T \Rightarrow z = 0$

$$\Rightarrow B(t,T) = e^{\mp a(T-t)} \int_{T-t}^{0} -e^{+az}\,dz = \pm\frac{e^{\mp a(T-t)}}{+a} \int_0^{T-t} +a\,e^{+az}\,dz$$

$$= +\frac{e^{\mp a(T-t)}}{a}\left[e^{+a(T-t)} - 1\right]$$

$$\Rightarrow B(t,T) = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(T-t)}\right]$$

(ii) $\dot{A}(t,T) - a\gamma B(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) = 0, \quad A_T = 0$

$$\Rightarrow \dot{A}(t,T) = a\gamma B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T)$$

$$\Rightarrow \int_t^T \dot{A}(s,T)\,ds = \int_t^T a\gamma B(s,T)\,ds - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2 B^2(s,T)\,ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{A(T,T)}_{=0} - A(t,T) = \int_t^T \left[\cancel{a}\gamma \frac{\left(1-e^{-a(T-s)}\right)}{\cancel{a}} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\left(1-e^{-a(T-s)}\right)^2}{a^2} \right] ds$$

$$\Rightarrow A(t,T) = -\int_t^T \left[\gamma \left(1-e^{-a(T-s)}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1-e^{-a(T-s)}}{a}\right)^2 \right] ds$$

$$\overset{\text{(ESERCIZIO!)}}{=} -\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T-t) + \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{a^2}\right)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{2a^2}\,\frac{1-e^{-2a(T-s)}}{2a}$$

Sostituendo in (BV) si ottiene il risultato finale. (**)

Posto $R_\infty := \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)$, $\tau = T-t$, avremo

$$p(t,T) = e^{-\tau \cdot R(\tau)},$$

dove $R(\tau) = R_\infty + (r - R_\infty)\frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{\sigma^2}{4a^3}\,\frac{B^2(\tau)}{\tau}$

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = R_\infty$$

R_∞ ↳ tasso a maturità infinita (dipende solo dai parametri)