

Nome e Cognome: _____ Matricola: _____

C.d.L.M. *Finanza e Assicurazioni*

METODI E MODELLI PER LA FINANZA – A.A. 2018/2019

Esame 18/06/2019

Esercizio 1. Siano $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ due processi stocastici che evolvono secondo le seguenti dinamiche

$$\begin{aligned}dX_t &= b_1(X_t)dt + \sigma_1(X_t)dW_t, \\dY_t &= b_2(Y_t)dt + \sigma_2(Y_t)dW_t.\end{aligned}$$

Determinare il differenziale stocastico del processo $Z_t = X_t Y_t$.

Esercizio 2. Enunciare il *Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing Theory* e dimostrare che l'assenza di arbitraggi garantisce l'esistenza dei premi al rischio $\{\lambda_t^{(k)}\}_{t \geq 0}$, per ogni $k = 1, \dots, M$, nonché la relazione con i processi che definiscono i drift dei prezzi degli asset rischiosi, il flusso di dividendi ed il tasso risk-free.

Esercizio 3. Definire matematicamente le opzioni americane e spiegare cosa si intende per *strategia d'esercizio ottima*.

- (i) Mostrare il legame che intercorre tra il prezzo di una call americana con parametri S_0 (spot price), K (strike price), T (maturity), r (risk-free interest rate), q (dividend yield) e quello di una put americana con parametri opportuni.
- (ii) Spiegare cos'è lo *Smooth Fit Principle* ed in che modo interviene nella teoria delle opzioni americane.