

# Esame Metodi e Modelli per la Finanza – 19.01.2022

- (i) (6/9 CFU) Definire il contratto Futures e verificare che, in assenza di arbitraggi, il prezzo  $K$  al tempo  $t_0$  di un tale contratto è  $K = \frac{S_{t_0}}{p(t_0, T)}$ .
- (ii) (6/9 CFU) Sia  $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$  un  $\mathbb{Q}$ -moto browniano geometrico con  $S_0 = 0$  e sia

$$Y_t := e^{-rt} S_t^k, \quad t \geq 0, \quad \text{con } r \in \mathbb{R}^+ \text{ e } k \neq 1.$$

- Scrivere il differenziale stocastico del processo  $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ ;
  - Calcolare il momento primo di  $Y_t$ . Per quali valori di  $k \neq 1$  il processo stocastico  $Y$  ha media nulla?
- (iii) (6/9 CFU) Sia data la seguente dinamica neutrale al rischio per il tasso a breve

$$dr_t = -2r_t dt + \sqrt{r_t} dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad \text{con } r_0 = -1\%.$$

- Calcolare  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [r_1 | r_0]$ .
- Quanto valgono la media e la varianza di lungo periodo? Giustificare la risposta.