

Esame Metodi e Modelli per la Finanza – 07.09.2023

- (i) (6/9 CFU) Dato lo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, dare la definizione di $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ -martingala.

Verificare, giustificando tutti i passaggi, se il processo $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t := \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ è una martingala. In caso affermativo, specificare rispetto a quale filtrazione vale la proprietà di martingalità.

- (ii) (6/9 CFU) Siano $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ e $P = \{P_t\}_{t \in [0, T]}$ i processi che descrivono le variabili di stato del mercato ed il prezzo di un titolo rischioso, rispettivamente. Determinare, mostrando tutti i passaggi, la dinamica del valore del portafoglio scontato $\hat{V} = \{\hat{V}_t\}_{t \in [0, T]}$.
Quali caratteristiche finanziarie deve soddisfare il processo \hat{V} ?
Argomentare la risposta.

- (iii) (6/9 CFU) Enunciare e dimostrare il Teorema di Gil-Pelaez.
Che tipo di applicazione finanziaria ha tale teorema? Argomentare la risposta.