

Esame Metodi e Modelli per la Finanza – 10/06/2020

- (i) **(6/9 CFU)** Dare la definizione di CAP e scrivere l'espressione esplicita del relativo cash-flow per $t \geq T_0$. Dimostrare, infine, la relazione di Cap-Floor parity.
- (ii) **(6/9 CFU)** Dare la definizione di martingala, super-martingala e sub-martingala. Verificare che il processo

$$X_t = tW_t - \int_0^t W_u du ,$$

definito sullo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, è una martingala.

- (iii) **(6 CFU)** Enunciare e dimostrare il *Teorema di Gil-Pelaez*.
- (iii) **(9 CFU)** Dimostrare che, in modelli a volatilità locale, si ha

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + \mu C - \mu K \frac{\partial C}{\partial K} ,$$

essendo $C = C(S_0, K, T)$ il prezzo non scontato di una call europea.