

**Sinossi del Corso**  
**Metodi e modelli per la finanza**  
**I semestre - Autunno 2022**

**Docente:** Immacolata Oliva ([immacolata.oliva@uniroma1.it](mailto:immacolata.oliva@uniroma1.it))

**Studio:** Facoltà di Economia, primo piano, ala 2 di Matematica, stanza 146

**Orario di ricevimento:**

Il Ricevimento Studenti è fissato il **lunedì dalle 15 alle 16.30**. Il ricevimento prosegue **in presenza e a distanza** al seguente link:

<https://meet.google.com/zeo-toah-hpy>

Il **ricevimento online** deve essere concordato **via email** con **almeno 48 ore** di anticipo. Per il ricevimento in presenza, si consiglia vivamente di concordare un appuntamento via email almeno il giorno prima, per fissare l'orario preciso ed evitare assembramenti.

L'orario di Ricevimento Studenti presente su questa pagina è valido **dall'inizio del periodo di attività didattica al termine della prima sessione d'esame**. Al di fuori di tale finestra temporale, il Ricevimento Studenti deve essere **concordato esclusivamente via email** con la docente.

**Telefono:** +39 0649766305

**Orari di lezione (Giorni, ore, aula):**

**Lunedì 10-12 Aula 6A** (Facoltà di Economia, piano terra)

**Giovedì 10-12 Aula 9A** (Facoltà di Economia, piano -1)

**Venerdì 10-12 Aula 6C** (Facoltà di Economia, piano terra)

**Sito web del Corso:** <https://web.uniroma1.it/memotef/metodi-e-modelli-la-finanza-9-cfu>

**Testi di riferimento:**

[OR] I. Oliva e R. Renò (2021) Principi di Finanza Quantitativa, Maggioli Editore.

**Testi consigliati:**

[AL] M. Avellaneda e P. Laurence (2000) Quantitative modeling of derivative securities, Chapman&Hall/CRC.

[H] J. Hull (2000) Opzioni, futures e altri derivati, Pearson Ed.

[MFE] A.J. McNeil, R. Frey e P. Embrechts (2005) Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools, Princeton University Press.

[P] A. Pascucci (2011) PDE and martingale methods in option pricing, Springer.

[R] F.D. Rouah (2013) The Heston model and its extensions in Matlab and C#, Wiley.

[S] S. J. Shreeve (2000) Stochastic calculus for finance II -- continuous-time models, Springer.

## Materiali aggiuntivi

I materiali aggiuntivi (slides delle lezioni, articoli scientifici per approfondimenti, eventuali codici Matlab, siti web di interesse per gli studenti) saranno disponibili alla pagina <https://classroom.google.com/c/NTUwOTQwNzMwMTgz?cjc=4oepuxe>

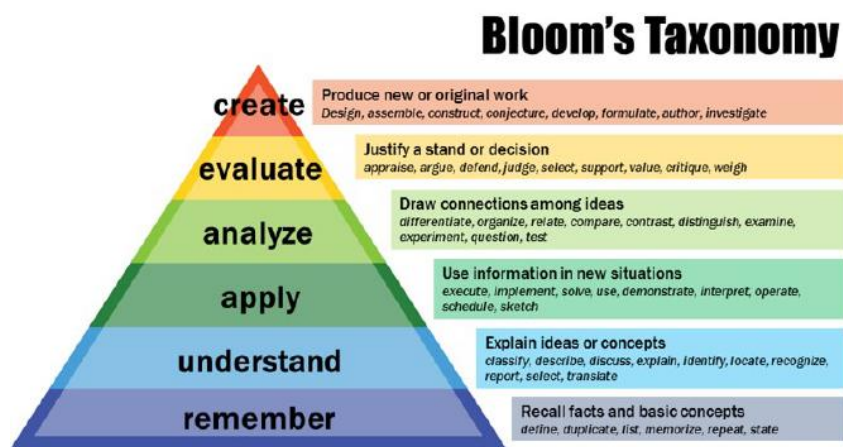
## Prerequisiti

Il corso non prevede propedeuticità, ma è molto importante che gli studenti posseggano le nozioni di matematica e probabilità di base.

## Esame finale e politica dei voti

L'esame viene somministrato attraverso una prova scritta, della durata di 90 minuti, costituito da 3 quesiti. Ciascun quesito può essere, a sua volta, costituito da diverse sotto-domande. I quesiti possono riguardare esercizi o domande a risposta aperta. La valutazione varia in un intervallo da 0 a 30 e lode. Si considera sufficiente una votazione maggiore o uguale a 18.

Ciascun quesito è costruito in modo da soddisfare in maniera crescente i diversi livelli della tassonomia di Bloom:



Un esempio di quesito con sotto-domande e relativo livello e valutazione è il seguente:

(i) (6/9 CFU) Sia  $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$  un processo di Wiener.

Livello 1:  
ricorda  
(voto 18)

- Dare la definizione di integrale stocastico rispetto al processo  $W$  e dimostrare che l'integrale stocastico ha media nulla;
- Verificare che  $\mathbb{E}[W_t^4] = 3t^2$ , per ogni  $t \in [0, T]$ , giustificando tutti i passaggi.

Livello 4\5:  
analizza\valuta (voto  
27/30)

Livello 2\3:  
comprendi\aplica  
(voto 24\27)

## Obiettivi del corso

Il corso di Metodi e modelli per la finanza si propone di fornire gli strumenti matematici per descrivere ed analizzare alcuni tra i più importanti modelli matematici a tempo continuo della finanza quantitativa usati per la valutazione di titoli derivati nei principali mercati finanziari, anche fornendo opportune applicazioni numeriche. Al termine del corso gli studenti saranno in grado di applicare le tecniche classiche di calcolo stocastico a problemi di natura economico-finanziaria. Saranno, inoltre, in grado di comprendere e illustrare i principali modelli che descrivono l'evoluzione di processi stocastici coinvolti nella caratterizzazione di grandezze di interesse in Finanza Matematica, con particolare riferimento alla struttura a termine dei tassi di interesse ed alla valutazione di derivati su azioni e indici. Avranno, infine, le competenze per passare dalla teoria all'implementazione dei modelli della Finanza Matematica a tempo continuo, ai fini di ottenere la valutazione equa di innumerevoli titoli derivati. Dopo aver superato l'esame gli studenti saranno in grado di riconoscere la modellizzazione più adatta per descrivere un dato contesto finanziario e determinare quali siano le metodologie più efficienti per affrontare i problemi in tale contesto. Avendo analizzato, durante il corso, i principali metodi e modelli per la finanza, gli studenti che hanno assimilato i contenuti sapranno autonomamente analizzare il contesto finanziario, valutare le possibili metodologie di risoluzione ed interpretare i risultati ottenuti. Dopo aver sostenuto l'esame (somministrato attraverso una prova scritta, costituita da quesiti a risposta aperta e/o esercizi), lo studente valutato positivamente sarà in grado di descrivere adeguatamente gli argomenti appresi durante il corso, sia verbalmente che in documenti scritti. Le lezioni frontali, di cui il corso si compone, e l'attività di studio individuale garantiscono agli studenti di sviluppare un metodo per l'acquisizione autonoma di nuove conoscenze e competenze di tipo economico-finanziario, sia a livello teorico sia in ambito pratico.

Il corso si articola in quattro parti.

- PRIMA PARTE: Strumenti di calcolo stocastico; Martingale a tempo continuo; Teorema di Girsanov.
- SECONDA PARTE: Strategie di investimento e portafogli autofinanziati; Teoremi fondamentali della finanza e principio di non arbitraggio; Il modello di Black-Scholes-Merton.
- TERZA PARTE: Struttura a termine dei tassi e derivati sui tassi di interesse; Teorema di Heath-Jarrow-Morton; Modelli esponenziali affini; Modelli a volatilità stocastica.
- QUARTA PARTE: Rischio di credito: modelli strutturali e modelli a forma ridotta; Derivati di credito; Valutazione di bond rischiosi.

## Obiettivi di apprendimento e competenze attese (Descrittori di Dublino)

- Conoscenza e comprensione: Al termine del corso gli studenti saranno in grado di applicare le tecniche classiche di calcolo stocastico a problemi di natura economico-finanziaria. Saranno, inoltre, in grado di comprendere e illustrare i principali modelli che descrivono l'evoluzione di processi stocastici coinvolti nella caratterizzazione di grandezze di interesse in Finanza Matematica, con particolare riferimento alla struttura a termine del tasso di interesse ed alla valutazione di derivati su azioni e indici. Avranno, infine, le competenze

per passare dalla teoria all'implementazione dei modelli della Finanza Matematica a tempo continuo, ai fini di ottenere la valutazione equa di innumerevoli titoli derivati.

- Capacità di applicare conoscenza e comprensione: Gli studenti che hanno superato l'esame saranno in grado di riconoscere la modellizzazione più adatta per descrivere un dato contesto finanziario e determinare quali siano le metodologie più efficienti per risolvere il relativo problema.
- Capacità critiche e di giudizio: Avendo descritto, durante il corso, i principali metodi e modelli per la finanza, gli studenti autonomamente potranno analizzare il contesto finanziario, valutare le possibili metodologie di risoluzione ed interpretare i risultati ottenuti.
- Capacità di comunicare quanto si è appreso: Dopo aver sostenuto l'esame (somministrato attraverso una prova scritta, costituita da quesiti a risposta aperta e/o esercizi), lo studente valutato positivamente sarà in grado di descrivere adeguatamente gli argomenti appresi durante il corso, sia verbalmente che in documenti scritti.
- Capacità di proseguire lo studio in modo autonomo nel corso della vita: Le lezioni frontali, di cui il corso si compone, e l'attività di studio individuale garantiscono agli studenti di sviluppare un metodo per l'acquisizione autonoma di nuove conoscenze e competenze di tipo economico-finanziario, sia a livello teorico sia in ambito pratico.

### Calendario settimanale preliminare del corso

Per ciascuna settimana di lezione, sono indicati gli argomenti trattati. In grassetto, si riportano i riferimenti bibliografici con specifici rimandi al libro di testo (tra parentesi tonde le ulteriori letture per chiarimenti e approfondimenti, tra i testi consigliati).

Settimana	Argomenti
1.	<p>Introduzione al corso.</p> <p>Primi cenni di teoria della misura: lo spazio di probabilità come esempio di spazio di misura, le variabili aleatorie come esempio di funzioni misurabili, sigma-algebre e sotto-sigma-algebre. Spazi prodotto e misure prodotto: i teoremi di Fubini\Tonelli (solo enunciato senza dimostrazione). Filtrazione e spazio di probabilità filtrato.</p> <p>I processi stocastici: definizione e proprietà (continuità e adattabilità a una filtrazione). Traiettorie di un processo stocastico. Il moto browniano standard (o processo di Wiener).</p> <p><b>[OR]-Capitolo 0 ([P]).</b></p>
2.	<p>La variazione quadratica di funzioni deterministiche e di processi stocastici.</p> <p>Teorema: la variazione quadratica di funzioni reali deterministiche e derivabili è</p>

	<p>nulla (con dimostrazione). Teorema: la variazione quadratica di processi di Wiener è non-nulla (con dimostrazione).</p> <p>Covarianza tra processi stocastici: definizione e proprietà. La variazione quadratica come caso particolare di covarianza tra processi stocastici.</p> <p>L'integrale stocastico: definizione e costruzione; esempio di calcolo di integrali stocastici tramite definizione. Proprietà di media nulla (con dimostrazione) e isometria di Ito (con dimostrazione) per gli integrali stocastici.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 0, ([P,S]).</b></p>
3.	<p>I processi di Ito ed il lemma di Ito (per moti browniani, per processi stocastici univariati, per processi stocastici multivariati). Dimostrazione del lemma di Ito nel caso di processi di Wiener. Esempi ed esercizi.</p> <p>I processi martingala a tempo continuo: definizione e proprietà. La derivata di Radon-Nykodim ed il Teorema di Girsanov (con dimostrazione). Esempi ed esercizi.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 0 ([P,S]).</b></p>
4.	<p>Modelli di mercato a tempo continuo e strategie di arbitraggio. Il primo teorema dell'Arbitrage Pricing Theory: enunciato, dimostrazione, commenti al risultato. Il secondo teorema dell'Arbitrage Pricing Theory (solo enunciato).</p> <p><b>[OR]-Capitolo 1 ([A]).</b></p>
5.	<p>Il modello di Black-Scholes-Merton: SDE e PDE (via portafoglio di replica e via premi per il rischio). Il prezzo in forma chiusa per derivati europei plain vanilla. Esercizi.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 3 ([H]).</b></p>
6.	<p>Delta e Gamma hedging nel modello di Black-Scholes-Merton.</p> <p>Il concetto di numerario ed il teorema fondamentale del cambio di numerario (con dimostrazione). Esempio: il prezzo di opzioni call europee per modelli diffusivi a tempo continuo.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 3 ([H]).</b></p>
7.	<p>Contratti forward, futures, FRA, IRS, Cap, Floor.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 2 ([H]).</b></p>
8.	<p>Modelli per il tasso di interesse: equazione fondamentale della struttura a termine dei tassi a breve, i modelli affini e valutazione di ZCB.</p> <p>Il modello di Vasicek: SDE, soluzione esplicita, distribuzione e momenti, valutazione di ZCB.</p> <p>Esercizi.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 4 ([P,S]).</b></p>
9.	<p>Il modello CIR: SDE, soluzione esplicita, distribuzione e momenti, valutazione di ZCB.</p> <p>Il modello di Hull-White: soluzione esplicita, distribuzione e momenti, valutazione di ZCB.</p> <p>Esercizi.</p> <p><b>[OR]-Capitolo 4 ([P,S]).</b></p>

10.	I modelli HJM: definizione e proprietà (condizione sul drift, con dimostrazione). Il modello di Ho-Lee. Esempi ed esercizi. <b>[OR]-Capitolo 4 ([AL,P,S]).</b>
11.	I modelli a volatilità stocastica: definizione, proprietà, PDE. Il modello di Heston e il Teorema di Gil-Pelaez (con dimostrazione). Esercizi. <b>[OR]-Capitolo 5 ([R]).</b>
12.	Introduzione al rischio di credito. I modelli strutturali: valutazione di equity e debito, probabilità di default. I modelli a forma ridotta: stopping times, probabilità di sopravvivenza (condizionata e non condizionata), hazard rate. Valutazione di ZCB soggetti a default: recovery nullo, recovery of face value, recovery of treasury, recovery of market value. I CDS. <b>[OR]-Capitolo 6 ([MFE]).</b>