Esame di Geometria
Ingegneria Meccanica a.a. 2021/22
17 Febbraio 2022
Seconda parte

La seconda parte dell'esame consiste di 3 esercizi, e ha la durata di 75 minuti. Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (qualora lo spazio non fosse sufficiente è possibile usare il retro del foglio). Risposte non motivate non riceveranno credito.

Esercizio 1 È data la conica γ: $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x + 3 = 0$. a) Verificate che la conica è un'ellisse e determinarne la forma canonica. Consideriamo le matrici della conica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}(Q) = 6 \qquad I_2 = \det(Q) = 8 > 0, \text{ dunque è un'ellisse.}$$

$$I_3 = \det(A) = 4 \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -48 + 24 = -24\,.$$

Determiniamo gli autovalori di Q come radici del polinomio caratteristico: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\lambda = 2 \text{ e } \mu = 4\,.$$

Ne segue che la forma canonica è:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2X^2 + 4Y^4 - 3 = 0\,.$$

b) Siano F_1 e F_2 i fuochi dell'ellisse γ. Calcolare l'area massima di un triangolo di vertici F_1, F_2, P, dove $P \in \gamma$.
Suggerimento: Per l'ellisse in forma canonica $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ con $a \geq b$ le coordinate dei fuochi sono date da $\pm(\sqrt{a^2 - b^2}\,, 0)$. Dal punto precedente deduciamo che

$$2X^2 + 4Y^4 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{X^2}{\frac{3}{2}} + \frac{Y^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

per cui $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ora, la conica γ è isometrica alla conica in forma canonica. Pertanto è sufficiente studiare il problema nel caso dell'ellisse in forma canonica con fuochi $F_1' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,, 0\right)$ e $F_2' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,, 0\right)$. Fissata la base, per massimizzare l'area del triangolo basta massimizzarne l'altezza. Dunque scegliamo $P' = (0\,, b) = \left(0\,, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. L'area massima è dunque $A_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$.

Esercizio 2 È data la retta nello spazio di equazioni parametriche $r\colon \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 6 + t \end{cases}$

a) Calcolare la distanza dall'origine dalla retta r. Il piano ortogonale a r e passante per l'origine ha equazione

$$\pi\colon x + 2y + z = 0$$

L'intersezione $r \cap \pi$ è data da

$$t + 2(2t) + (6 + t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \qquad \Rightarrow \qquad H = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Pertanto la distanza cercata vale $d = d(r, O) = d(H, O) = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$. b) Determinare l'equazione della sfera σ di centro l'origine e tangente a r.

Suggerimento: la sfera σ è tangente alla retta r quando σ e r hanno in comune esattamente un punto. Il raggio della sfera cercata sarà pari alla distanza calcolata nel punto precedente. Ne segue che $R = \sqrt{30}$, da cui

$$\sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 = 30 .$$

c) Calcolare il raggio della sfera σ' con centro sulla retta r, passante per l'origine e avente un equatore (cerchio massimo) sul piano xy. La sfera σ' avrà centro nell'intersezione fra la retta r e il piano xy: $C = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ne segue che l'equazione sarà della forma

$$(x + 6)^2 + (y + 12)^2 + z^2 = R^2$$

da cui, imponendo il passaggio per l'origine, deduciamo $R = 6\sqrt{5}$.

Esercizio 3 a) Nel piano si consideri la retta di equazione $r\colon x - 2y = 0$. Sia B la matrice canonia della proiezione ortogonale su r e sia A la matrice canonica della riflessione rispetto a r. Dopo aver calcolato A e B, determinare le coordinate del simmetrico di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto a r. Scegliamo un vettore direttore unitario della retta: $u = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determiniamo le matrici richieste come segue

$$B = u \cdot u^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = 2B - id = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Ne segue che il simmetrico di P rispetto a r avrà coordinate

$$P' = AP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

b) Nello spazio si considerino i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare le coordinate di un vettore di norma 1 ortogonale al piano passante per P_1, P_2, P_3. L'equazione del piano cercato è:

$$\pi\colon \quad \det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2x + 2y - z + 1 = 0 .$$

Per determinare le coordinate del vettore cercato normalizziamo i parametri di giacitura del piano:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Osservazione: Avremmo potuto determinare tale vettore normalizzando il prodotto vettoriale $\vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}$.

c) Dati i vettori dello spazio $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcolare le coordinate del vettore $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$. Tale vettore coincide con il vettore $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$? Notiamo che $\vec{u} = \vec{P_1P_2}$, mentre $\vec{v} = \vec{P_1P_3}$. Dall'osservazione precedente deduciamo che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$ sono proporzionali, da cui $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0}$.
D'altra parte $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è ortogonale a $\vec{w}$, da cui deduciamo che appartiene alla giacitura del piano

π. È inoltre ortogonale a $\vec{v}$, pertanto non è proporzionale a $\vec{u}$. Ne segue che $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq \vec{0}$; inoltre il vettore $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ dovrà essere ortogonale a π, in quanto risulterà ortogonale sia a u che a $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Concludiamo che $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ è proporzionale a $\vec{w}$. Infatti:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$