Esame di Geometria
Ingegneria Elettrotecnica a.a. 2020/21
2 Luglio 2021

La durata dell'esame è di 3 ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (qualora lo spazio non fosse sufficiente è possibile usare il retro del foglio).

Esercizio 1 Si considerino le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x+y-4=0 \\ x+z-4=0 \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} 5x+y-4=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

a) Stabilire se le rette r ed r' sono complanari o sghembe.

Iniziamo ricavando le equazioni parametriche delle due rette:

$$r\colon \begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=4-t \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} x=s \\ y=4-5s \\ z=1 \end{cases}$$

I due vettori direttori sono $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v' = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; non sono proporzionali e dunque le due rette non sono parallele. Inoltre il sistema

$$\begin{cases} t=s \\ 4-t=4-5s \\ 4-t=1 \end{cases}$$

non ammette soluzione, pertanto le due rette non sono incidenti. Concludiamo che r e r' sono sghembe.

b) Determinare la distanza fra r e r'.

Consideriamo i punti mobili su r e r':

$$H = \begin{pmatrix} t \\ 4-t \\ 4-t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H' = \begin{pmatrix} s \\ 4-5s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \vec{HH'} = \begin{pmatrix} s-t \\ t-5s \\ t-3 \end{pmatrix}.$$

Imponiamo l'ortogonalità con i vettori direttori di r e r':

$$\begin{cases} s-t-t+5s-t+3=0 \\ s-t-5t+25s=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=1+2s \\ 13s-3t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=\frac{13}{7} \\ s=\frac{3}{7} \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo $\vec{HH'} = -\frac{2}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, da cui $d(r,r') = ||\vec{HH'}|| = \frac{2\sqrt{42}}{7}$.

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A_k \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dipendente dal parametro reale $k \in \mathbb{R}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono tutti reali.

Il polinomio caratteristico di A_k è $\det(A_k - \lambda Id) = (2-\lambda)(\lambda^2 - k)$, che ammette tutte radici reali se e solo se $k \geq 0$.

b) Determinare tutti i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.

Iniziamo osservando che se $0 < k < 4$ o $k > 4$ i tre autovalori 2, $\sqrt{k}$ e $-\sqrt{k}$ sono tutti reali e distinti. Ne segue che per tali valori la matrice A_k è diagonalizzabile. Restano dunque da studiare i casi $k = 0$ e $k = 4$.

k=0: Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Dal momento che il polinomio caratteristico è completamente riducibile e $MA(2) = MG(2) = 1$, resta da calcolare $MG(0)$ poiché $MA(0) = 2$. Ricordiamo che $MG(0) = 3 - \mathrm{rk}(A_0) = 3 - 2 = 1$ e dunque la matrice non è diagonalizzabile.

k=4: Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Dal momento che il polinomio caratteristico è completamente riducibile e $MA(-2) = MG(-2) = 1$, resta da calcolare $MG(2)$ poiché $MA(2) = 2$. Ricordiamo che $MG(2) = 3 - \mathrm{rk}(A_4) = 3 - 1 = 2$ e dunque la matrice è diagonalizzabile.

Concludiamo che A_k è diagonalizzabile per ogni $k > 0$.

c) Determinare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste un autospazio di A_k di dimensione 2. Si scriva una base *ortonormale* per tale autospazio.

- Se $0 < k < 4$ o $k > 4$ abbiamo tre autovalori reali e distinti, pertanto le molteplicità algebriche (e dunque quelle geometriche) di tutti gli autovalori sono pari a 1. Ne segue che non esiste un tale autospazio.

- Se $k < 0$ esiste un unico autovalore reale 2 la cui molteplicità algebrica (e dunque geometrica) è pari a 1. Dunque non esiste un tale autospazio.

- Se $k = 0$ abbiamo mostrato nel punto precedente che le molteplicità geometriche di entrambi gli autovalori sono pari a 1. Ne segue che non esiste un tale autospazio.

- Se $k = 4$ abbiamo mostrato nel punto precedente che esiste un unico autovalore di molteplicità geometrica pari a 2.

Concludiamo che un autospazio di dimensione 2 esiste se e solo se $\mathbf{k = 4}$, più precisamente si tratta dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$.

$$E(2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^4$ sono dati il sottospazio E di equazioni cartesiane

$$E\colon \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e il sottospazio F, generato dai seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare equazioni cartesiane per F e una base *ortonormale* di F.

I vettori v_1, v_2, v_4 sono linearmente indipendenti, mentre v_3 è il doppio di v_2. Ne segue che $F = L[v_1, v_2, v_4]$ e $\dim(F) = 3$. Pertanto F è descritto da un'unica equazione cartesiana: $x_4 = 0$. Inoltre i primi tre vettori della base canonica rappresentano una base ortonormale di F.

b) Determinare una base di E e una base di $E \cap F$.

La terza equazione di E è combinazione lineare delle precedenti. Risolvendo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ otteniamo una base di E: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Osserviamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione cartesiana di F e dunque $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \cap F$, da cui $\dim(E \cap F) \geq 1$.

Inoltre, se $\dim(E \cap F) > 1$ allora si avrebbe $E \subseteq F$, ma questo è assurdo poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E \setminus F$.

Deduciamo che $\dim(E \cap F) = 1$ e una base è data da $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Determinare la dimensione di $E + F$ e la dimensione di $(E + F) \cap F^{\perp}$.

Osserviamo che per la formula di Grassmann

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 3 + 2 - 1 = 4$$

e dunque $E + F = \mathbb{R}^4$. Ne segue che

$$\dim\left((E+F)\cap F^{\perp}\right) = \dim\left(\mathbb{R}^4 \cap F^{\perp}\right) = \dim\left(F^{\perp}\right) = 4 - \dim(F) = 4 - 3 = 1\,.$$

d) Stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = F$ e $\mathrm{Im}(f) = E$.
Se esistesse f con le proprietà richieste, dal Teorema della dimensione si avrebbe

$$4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) + \dim(E) = 3 + 2 = 5$$

e dunque un tale endomorfismo non esiste.

Esercizio 4

Si denoti con $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e con $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definita da

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(1) \\ p(0) - p'(0) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } p(x) \in \mathbb{R}[x]\,,$$

dove $p'(0)$ e $p'(1)$ indicano la derivata prima di $p(x)$ valutata rispettivamente in 0 e 1.

a) Si scelga una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ e una base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto a tali basi.

Scegliamo le basi canoniche di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ e una base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e osserviamo che:

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertanto la matrice che rappresenta f è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Si determini una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$.

Le tre colonne di A sono linearmente indipendenti e dunque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Una base è data dalle matrici

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Si stabilisca se f è un'applicazione lineare iniettiva.

Per il Teorema della dimensione: $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 3 = 0$. Ne segue che f è iniettiva.

Esercizio 5

a) Si considerino i punti nel piano di coordinate $A = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ e $B = \left(1, -\sqrt{3}\right)$. Determinare la matrice canonica della rotazione in senso antiorario di centro l'origine che porta A in B.

La matrice della rotazione di angolo θ in senso antiorario è $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. L'angolo fra due vettori u e v è dato dalla formula $\theta = \arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right)$, che applicata ai punti A e B fornisce $\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$. La matrice cercata è dunque

$$M_{\frac{5\pi}{6}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = M_{\frac{5\pi}{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ come richiesto.

b) Determinare l'area del triangolo di vertici $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ nello spazio tridimensionale.

Definiamo i vettori $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'area del triangolo cercato sarà dunque

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{49} = \frac{7}{2}.$$

c) Si determini l'equazione del piano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ contenente i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$ è della forma $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo il passaggio per i tre punti si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ 2b + d = 0 \\ b + 3c + d = 0 \end{cases} \qquad \to \begin{cases} a = -d \\ b = -\frac{1}{2}d \\ c = -\frac{1}{6}d \end{cases}$$

da cui otteniamo $\pi\colon\ 6x + 3y + z = 6$.

Esercizio 6

Sono date le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che A_1, A_2, A_3, A_4 formano una base di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

È sufficiente incolonnare le coordinate delle quattro matrici rispetto alla base canonica e utilizzare il criterio del rango. Dal momento che

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

deduciamo che le matrici A_1, A_2, A_3, A_4 sono linearmente indipendenti. Concludiamo che formano una base poiché $\dim\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})\right) = 4$.

b) Calcolare le coordinate di $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

Studiamo il sistema $aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = Q$; otteniamo le relazioni

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \\ c + 2d = 0 \\ d = 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Concludiamo che le coordinate di Q sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Stabilire il *carattere* della forma quadratica $q(x,y) = (x,y)\,Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dal momento che $\mathrm{tr}(Q) = 1$ e $\det(Q) = 0$ la forma quadratica è *semidefinita positiva.*

d) Classificare la conica di equazione $q(x,y) = 0$ e disegnarne il grafico.

L'equazione $q(x,y) = 0$ è equivalente a $y^2 = 0$. Si tratta dunque di una parabola doppiamente degenere, che graficamente corrisponde a due rette coincidenti con l'asse x.