Esame di Geometria
Ingegneria Elettrotecnica a.a. 2020/21

La durata dell'esame è di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (qualora lo spazio non fosse sufficiente è possibile usare il retro del foglio).

Esercizio 1 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Siano inoltre $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U = L[u_1, u_2, u_3] \qquad \text{e} \qquad V = L[v_1, v_2, v_3].$$

a) Determinare una base ortonormale di U e una base ortonormale di V. Osserviamo che $u_2 = u_1 + u_3$, Pertanto $U = L[u_1, u_3]$. Inoltre $\langle u_1, u_3 \rangle = 0$, da cui decuciamo che una base ortonormale per U è: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre $v_2 = 2v_1 + v_3$, dunque $V = L[v_1, v_3]$. Dal momento che $\langle v_1, v_3 \rangle = 17$, $||v_1|| = \sqrt{20}$ e $||v_3||^2 = 17$ abbiamo:

$$\begin{cases} w_1 = v_3 \\ w_2 = v_1 - \frac{\langle v_1, v_3 \rangle}{||v_3||^2} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Concludiamo dunque che una base ortonormale di V è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $U \cap V$ e $U + V$. Sfruttiamo le basi determinate al punto precedente. Sappiamo che

$$\dim(U + V) = \text{rk} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3\,,$$

infatti le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, mentre la quarta è l'opposto della seconda. Ne segue che una base di $U+V$ è $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$. Osservando le basi determinate al punto precedente è inoltre evidente che il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ appartenga all'intersezione $U \cap V$. Dal momento che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 1$$

concludiamo che una base di $U \cap V$ è proprio $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

c) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. $\mathbb{R}^4 \neq U \oplus V$ poiché $U \cap V \neq \emptyset$.

Esercizio 2 Si considerino le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 + 3s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

a) Verificare che le rette r ed s non sono parallele. I vettori direttori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali, dunque le rette non sono parallele fra loro

b) Stabilire se le due rette si intersecano e, in caso affermativo, calcolare le coordinate del loro punto di intersezione. Il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = 1 - s \\ 2 - t = 3 + 3s \\ 3 + 2t = 1 - 2s \end{cases}$$

non ammette soluzioni. Pertanto le due rette non si intersecano e risultano sghembe.

c) Calcolare la distanza fra le due rette r ed s. Consideriamo i punti mobili su r e r':

$$H = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \\ 3+2t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H' = \begin{pmatrix} 1-s \\ 3+3s \\ 1-2s \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \vec{HH'} = \begin{pmatrix} -s-t \\ 3s+t+1 \\ -2s-2t-2 \end{pmatrix}.$$

Imponiamo l'ortogonalità con i vettori direttori di r e r':

$$\begin{cases} -s - t - 3s - t - 1 - 4s - 4t - 4 = 0 \\ s + t + 9s + 3t + 3 + 4s + 4t + 4 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite, la cui unica soluzione è

$$s = -\frac{1}{10} \qquad t = -\frac{7}{10}.$$

Sostituendo otteniamo $\vec{HH'} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, da cui $d(r, r') = ||\vec{HH'}|| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Esercizio 3 Si consideri la matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche. Eseguiamo il calcolo del polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(6-\lambda)$$

da cui $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6$. Le molteplicità valgono: $MA(0) = 2$, $MA(6) = 1$ e dunque $MG(6) = 1$. Inoltre $MG(0) = 3 - \mathrm{rk}(A) = 2$.

b) Dimostrare che A diagonalizzabile e determinarne la sua forma diagonale D. La matrice è simmetrica e dunque diagonalizzabile per il Teorema spettrale. Inoltre $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

c) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(0) = \ker(A) = L\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$E(6) = \ker \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$$

Dal momento che la matrice è simmetrica, i due autospazi risultano ortogonali fra loro. Basta dunque ortogonalizzare la base di $E(0)$ per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Trovare (se esiste) una matrice ortogonale $M \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $D = M^{-1}AM$. La matrice M avrà per colonne la base determinata al punto precedente:

$$M = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 5 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{6} & 2 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4

a) Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, si risolva il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} 3x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ (1-\lambda)x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Essendo un sistema omogeneo è sufficiente studiare la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 3 & \lambda & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \\ 1-\lambda & 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 13+2\lambda & 8+\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 17 & 6+\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 6+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2+4\lambda-29 \end{pmatrix}$$

Pertanto se $\lambda \neq -2 \pm \sqrt{33}$ avremo $\mathrm{rk}(A) = 3$ e dunque l'unica soluzione del sistema è quella banale. Se invece $\lambda = -2 \pm \sqrt{33}$ avremo $\mathrm{rk}(A) = 2$ e le infinite soluzioni saranno della forma

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda-5}{3}t \\ y = -(6+\lambda)t \\ z = 17t \end{cases}$$

b) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti reali. Dati i seguenti polinomi in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \quad p_3(x) = x - x^2$$

si verifichi che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. La base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ è $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$. Incolonniamo le coordinate dei tre polinomi rispetto a tale base. Dal momento che $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$ deduciamo che $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ sono linearmente indipendenti. Essendo $\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3$ concludiamo che essi sono una base.

Esercizio 5 a) Classificare la conica $\gamma_k : x^2+y^2+2kxy+2x-2y=0$ al variare del parametro k, e determinarne la forma canonica quando γ_k è una conica generale. Le matrici della conica sono

$$Q=\begin{pmatrix}1 & k\\ k & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo gli invarianti $I_1=2$, $I_2=1-k^2$, $I_3=-2(1+k)$. Pertanto la conica è degenere solo per $k=-1$. La conica sarà:

- $-1<k<1$: ellisse reale
- $k<-1$ o $k>1$: iperbole reale
- $k=1$: parabola reale
- $k=-1$: parabola degenere

Gli autovalori di Q sono $\lambda=1-k$ e $\mu=1+k$, ne deduciamo che per $\det(Q)\neq 0$ ovvero per $k\neq\pm1$ la forma canonica è

$$\lambda X^2+\mu Y^2+\frac{I_3}{I_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad (1-k)X^2+(1+k)Y^2+\frac{2}{k-1}=0\,.$$

Resta da studiare il caso $k=1$, in cui $\lambda=0$ e $\mu=2$. L'equazione canonica sarà della forma $\mu Y^2+qX=0$, da cui deduciamo la matrice $A'=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{q}{2}\\ 0 & 2 & 0\\ \frac{q}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$. Dal Teorema di invarianza abbiamo $\det(A)=\det(A')$, ovvero $-4=-\frac{q^2}{2}$. Scegliendo $q=-2\sqrt{2}$ otteniamo l'equazione $2Y^2-2\sqrt{2}X=0$.

b) Determinare gli eventuali valori di k per i quali la conica γ_k ha intersezione non vuota con tutte le rette del piano. L'unica conica che interseca tutte le rette del piano è l'iperbole degenere, il cui grafico corrisponde a due rette incidenti. Pertanto non esiste alcun valore di $k\in\mathbb{R}$ che soddisfi la richiesta.

c) Determinare i valori di k per i quali γ_k è unione di due rette parallele r_1, r_2; in tal caso, determinare l'equazione della retta per l'origine parallela a entrambe le rette r_1, r_2. L'unico possibile valore del parametro è $k=-1$ per il quale la conica risulta una parabola degenere. È possibile determinare la retta richiesta calcolando l'autospazio $E(0)$ della matrice Q. Tuttavia per $k=-1$ la conica assume la forma

$$x^2+y^2-2xy+2x-2y=0$$

$$(x-y)^2+2(x-y)=0$$

$$(x-y)(x-y+2)=0$$

da cui deduciamo che per $k=-1$ il grafico della conica è costituito dall'unione di due rette parallele di equazione

$$x-y=0 \qquad \text{e} \qquad x-y+2=0$$

e la retta cercata è dunque la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Esercizio 6 a) Determinare la matrice $A = Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sapendo che:

- la prima riga è $(1,\ -1,\ 1)$,
- A è diagonalizzabile,
- la traccia di A è pari a 2,
- i due vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sono autovettori di A.

La matrice cercata è della forma $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$. Imponendo le condizioni

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

otteniamo $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$. Ricordando inoltre che la traccia è la somma degli autovalori di A otteniamo $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$ e dunque $\lambda_3 = 0$. Dalla diagonalizzabilità di A deduciamo che $MG(0) = 2$, pertanto $MG(0) = 3 - \text{rk}(A) \Longrightarrow \text{rk}(A) = 3 - MG(0) = 1$. Ne segue che $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & -a & a\\ d & -d & d\end{pmatrix}$. Ricordando che $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ otteniamo infine $a = 0$ e $d = 1$. In conclusione:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

b) Sia $f\colon \mathbb{R}^{140} \to \mathbb{R}^{80}$ un'applicazione lineare e sia $V \subseteq \mathbb{R}^{140}$ un sottospazio vettoriale tale che $\dim(V) = 100$ e $\dim(V \cap \ker(f)) = 20$. Calcolare le dimensioni di $f(V)$ e di $V + \ker(f)$. Stabilire se f è suriettiva. **Suggerimento:** considerare la restrizione di f al sottospazio V: $\bar{f}\colon V \to f(V)$. Applichiamo il Teorema della dimensione a $\bar{f}$:

$$\dim(V) = \dim(\ker(\bar{f})) + \dim(Im(\bar{f})\,.$$

Osservando che $\ker(\bar{f}) = \ker(f) \cap V$ e $Im(\bar{f}) = f(V)$ otteniamo $\dim(f(V)) = 100 - 20 = 80$. In particolare ne segue che $f(V) = \mathbb{R}^{80}$ e dunque f è suriettiva. Ora, applicando il Teorema della dimensione a f otteniamo:

$$\dim(\mathbb{R}^{140}) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))$$

da cui $\dim(\ker(f)) = 140 - 80 = 60$. Infine possiamo ricavare la dimensione di $V + \ker(f)$ come segue:

$$\dim(V + \ker(f)) = \dim(V) + \dim(\ker(f)) - \dim(V \cap \ker(f)) = 100 + 60 - 20 = 140\,.$$

In particolare questo implica che $V + \ker(f) = \mathbb{R}^{140}$.