Esame di Geometria
Ingegneria Elettrotecnica a.a. 2020/21
16 Settembre 2021

La durata dell'esame è di 3 ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (qualora lo spazio non fosse sufficiente è possibile usare il retro del foglio).

Esercizio 1 Si considerino le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = t \\ z = 5t-2 \end{cases} \qquad\qquad r'\colon \begin{cases} x = s \\ y = s-1 \\ z = 2s+3 \end{cases}$$

a) Dimostrare che le rette r ed r' non sono parallele.

I vettori direttori di r e r' sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Non essendo multipli l'uno dell'altro (ed essendo entrambi non nulli) deduciamo che le due rette non sono parallele.

b) Stabilire se le rette r ed r' sono complanari.

Dal momento che le due rette non sono parallele, esse risulteranno complanari se e solo se incidenti. Studiamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} 3t+1 = s \\ t = s-1 \\ 5t-2 = 2s+3 \end{cases} \qquad \to \begin{cases} s = 1 \\ t = 0 \\ -2 = 5 \end{cases}$$

che non ammette soluzione. Pertanto le rette non sono complanari (e risultano *sghembe*).

c) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a r'.

Il vettore normale al piano π sarà ortogonale a entrambi i vettori direttori delle rette r e r'. Possiamo dunque determinarlo tramite il prodotto vettoriale:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il piano cercato avrà dunque equazione della forma $-3x - y + 2z + k = 0$. Si osservi che al variare di $k \in \mathbb{R}$ otterremo tutti i piani paralleli ad *entrambe* le rette. Il piano π sarà l'unico del fascio a contenere almeno un punto (e dunque tutti i punti) della retta r. Imponiamo dunque il passaggio per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in r$:

$$-3 + 0 - 4 + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi\colon\; -3x - y + 2z + 7 = 0\,.$$

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare una base per il nucleo dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) = Av \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^4 .$$

Si tratta di risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A. Procediamo ad esempio tramite l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ha 3 pivot, mentre la variabile libera è x_4. Il nucleo sarà dunque la retta in $\mathbb{R}^4$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 17t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = -10t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad \text{da cui } \ker(f) = L\left[\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

b) Determinare una base per l'immagine dell'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(v) = Av \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^4 .$$

Ricordiamo che l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A. Dalla riduzione di Gauss effettuata nel punto precedente deduciamo che le prime tre colonne formeranno una base di im(f):

$$\mathrm{im}(f) = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^4$ sono dati il sottospazio E di equazioni cartesiane

$$E\colon \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

e il sottospazio F, generato dai seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare equazioni cartesiane per F e una base *ortonormale* di F.
Imponiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 1 & -2 & x_4 \end{pmatrix}$$

abbia rango 2, determinando così le condizioni sul generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ affinché esso appartenga al piano generato da v_1 e v_2. Per il *Teorema degli orlati* basta dunque studiare le condizioni

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_4 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ottengono le equazioni cartesiane di F:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Notiamo infine che i vettori v_1 e v_2 sono fra loro ortogonali (quindi in particolare linearmente indipendenti), dunque per ottenere una base ortonormale basta dividere entrambi per la propria norma:

$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Determinare una base di $E \cap F$ e una base di E.

Osserviamo che le equazioni di E sono soddisfatte da v_1, ma non da v_2. Ne segue che $E \cap F = L\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$. Per trovare una base di E basta risolvere il sistema omogeneo dato dalle sue equazioni cartesiane, otteniamo dunque la base:

$$\left\{\begin{pmatrix}30\\-9\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-18\\5\\0\\4\end{pmatrix}\right\}.$$

c) Determinare la dimensione di $E + F$ e la dimensione di $F^\perp$.

Dalla *Formula di Grassmann* abbiamo

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3\,.$$

Infine: $\dim(F^\perp) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) - \dim(F) = 4 - 2 = 2$.

Esercizio 4

a) Dati due spazi vettoriali V e W, definire l'immagine e il nucleo di un'applicazione lineare $g\colon V \to W$. Per definizione si ha:

$$\mathrm{im}(g) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tale che } g(v) = w\}$$

$$\ker(g) = \{v \in V \mid g(v) = 0_W\}$$

dove 0_W denota il vettore nullo in W.

b) Sia V uno spazio vettoriale e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo tale che

$$f(f(v)) = f(v) \text{ per ogni } v \in V\,.$$

Dimostrare che $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

Dimostriamo innanzitutto che $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$. Consideriamo $w \in \ker(f) \cap\ \mathrm{im}(f)$ e mostriamo che w è necessariamente il vettore nullo. Dato che in particolare $w \in \mathrm{im}(f)$, esiste un vettore $v \in V$ tale che $w = f(v)$. Inoltre:

$$\begin{cases} f(w) = f(f(v)) = f(v) = w & \\ f(w) = 0 & \text{poiché } w \in \ker(f) \end{cases}$$

Concludiamo dunque che $w = 0$ come desiderato. Ora, dal *Teorema della dimensione* sappiamo che $\dim[\ker(f)] + \dim[\mathrm{im}(f)] = \dim(V)$, mentre per la *Formula di Grassmann* abbiamo

$$\dim[\ker(f)) + \mathrm{im}(f)] = \underbrace{\dim[\ker(f)] + \dim[\mathrm{im}(f)]}_{=\dim(V)} - \underbrace{\dim[\ker(f) \cap \mathrm{im}(f)]}_{=0} = \dim(V)\,.$$

Ora, dal momento che $\ker(f)) + \mathrm{im}(f) \subseteq V$, ne segue che $V = \ker(f) + \mathrm{im}(f)$. Pertanto $V = \ker(f)) \oplus \mathrm{im}(f)$.

Esercizio 5 Si consideri la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori reali della matrice A e una base per ciascuno dei rispettivi autospazi.

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & -5 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -\lambda & -5 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} + 3\det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2-5) - (-8-\lambda) + 3(-1-2\lambda) = -\lambda(\lambda^2-3\lambda+2) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\,.$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Le basi degli autospazi si possono determinare risolvendo i sistemi omogenei:

$$E(0) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$E(1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$E(2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

b) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Ricordiamo che autovettori relativi ad autospazi distinti sono fra loro linearmente indipendenti. Pertanto una base formata da autovettori di A è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Determinare, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice invertibile Q tale che $D = Q^{-1}AQ$.

La matrice è diagonalizzabile poiché ammette tre autovalori distinti. La sua forma diagonale è determinata dagli autovalori, mentre Q si ottiene incolonnando i rispettivi autovettori:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6

Sono dati i polinomi $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 2x+1$, $p_3(x) = 3x^2+2x+1$, $p_4(x) = 4x^3+3x^2+2x+1$ nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3.

a) Dimostrare che p_1, p_2, p_3, p_4 formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ data dai polinomi $\{1, x, x^2, x^3\}$. Incolonniamo le coordinate dei polinomi assegnati rispetto a tale base e studiamo il rango della matrice ottenuta:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\,.$$

Per il *Criterio del rango* i quattro polinomi risultano linearmente indipendenti e dunque formano una base dal momento che $\dim\left(\mathbb{R}_{\leq 3}[x]\right) = 4$.

b) Calcolare le coordinate di $q(x) = x^3$ rispetto a tale base.

Le coordinate di $q(x)$ saranno date da un vettore della forma $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ determinato dalla condizione

$$q(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x)$$

ovvero

$$x^3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \alpha_2 + 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_3 x + \alpha_3 + 4\alpha_4 x^3 + 3\alpha_4 x^2 + 2\alpha_4 x + \alpha_4$$

per cui impostiamo il sistema (già ridotto a scalini)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 4\alpha_4 = 1 \end{cases}$$

la cui (unica) soluzione è $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -\frac{1}{4}, \alpha_4 = \frac{1}{4}$. In effetti si verifica immediatamente che $-\frac{1}{4}p_3(x) + \frac{1}{4}p_4(x) = x^3$.

c) Descrivere un esempio (se esiste) di applicazione lineare suriettiva $f\colon \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tale che $f\left(x^3\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Consideriamo ad esempio l'applicazione lineare che manda la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ nella base canonica di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, ovvero

$$f\left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\,.$$

Si osservi che tale applicazione lineare è un isomorfismo (e dunque in particolare suriettiva) poiché trasforma basi in basi.