Esame di Geometria
Ingegneria Elettrotecnica a.a. 2020/21

La durata dell'esame è di 3 ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (qualora lo spazio non fosse sufficiente è possibile usare il retro del foglio).

Esercizio 1 Si considerino le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -3t \end{cases} \qquad r'\colon \begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Verificare che le rette r ed s non sono parallele. Determiniamo dapprima l'equazione parametrica di r':

$$r'\colon \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

I vettori direttori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali, dunque le rette non sono parallele fra loro.

b) Determinare, se esiste, un piano π contenente r e parallelo a r'. Determiniamo dapprima le equazioni cartesiane di r. Isoliamo $t = x - 1$ nella prima equazione e sostituiamo nelle altre:

$$r\colon \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

Consideriamo il fascio di piani ridotto di asse r:

$$\pi_\mu\colon \qquad (x + y - 4) + \mu(3x + z - 3) = 0 \Rightarrow (1 + 3\mu)x + y + \mu z - 4 - 3\mu = 0\,.$$

Imponiamo infine il parallelismo fra il piano π_μ e la retta r':

$$\langle (1 + 3\mu, 1, \mu)\,,\,(1, 3, 0)\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + 3\mu + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = -\frac{4}{3}\,.$$

Il piano π cercato esiste ed è unico; ha equazione:

$$\pi\colon \qquad -3x + y - \frac{4}{3}z = 0\,.$$

c) Determinare, se esiste, un piano σ contenente r e ortogonale a r'.
Sfruttiamo il fascio di piani ridotto di asse r determinato nel punto precedente:

$$\pi_\mu : \qquad (1+3\mu)x + y + \mu z - 4 - 3\mu = 0 \; .$$

Imponiamo l'ortogonalità fra il piano π_μ e la retta r': $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1+3\mu & 1 & \mu \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Riducendo a scalini dimostriamo che tale matrice ha rango 2 per ogni $\mu \in \mathbb{R}$. Ne deduciamo che nessuno dei piani appartenenti al fascio ridotto è ortogonale a r'. Dal momento che nemmeno il piano $3x + z - 3 = 0$ risulta ortogonale a r' concludiamo che non esiste un piano σ con le proprietà richieste.

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & -12 \\ -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
Eseguiamo il calcolo del polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 4 \\ 6 & -3-\lambda & 12 \\ 4 & -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(\lambda + 3)$$

da cui $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$. Le molteplicità valgono: $MA(0) = 2$, $MA(-3) = 1$ e dunque anche $MG(-3) = 1$. Inoltre $MG(0) = 3 - \mathrm{rk}(A) = 2$.

b) Dimostrare che A diagonalizzabile e determinarne la sua forma diagonale D. La matrice è diagonalizzabile per il secondo criterio di diagonalizzabilità, infatti il polinomio caratteristico risulta totalmente riducibile e le molteplicità algebriche e geometriche di ogni autovalore coincidono. Inoltre $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

c) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(0) = \ker(A) = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$E(-3) = \ker \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$$

Dunque una possibile base formata da autovettori è:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

d) Determinare, se possibile, una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.
Non è possibile poiché la matrice A non è simmetrica e dunque i due autospazi non risultano ortogonali fra loro.

e) Determinare, se possibile, una base *ortonormale* di ciascun autospazio di A.

Basta ortogonalizzare la base di $E(0)$ usando l'algoritmo di Gram-Schmidt e normalizzare la base di $E(-3)$:

$$E(0) = L\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right] = L\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\4\\5\end{pmatrix}\right] = L\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}-8\\4\\5\end{pmatrix}\right]$$

$$E(-3) = L\left[\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right] = L\left[\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right]$$

Esercizio 3 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siano inoltre $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U = L[u_1, u_2, u_3] \qquad \text{e} \qquad V = L[v_1, v_2, v_3].$$

a) Determinare una base ortonormale di U e una base ortonormale di V. Osserviamo che $u_1 = u_2 + \frac{1}{2}u_3$, Pertanto $U = L[u_2, u_3]$. Inoltre $\langle u_2, u_3 \rangle = 0$, da cui deduciamo che una base ortonormale per U è: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre $v_3 = -v_1 + 2v_2$, dunque $V = L[v_1, v_2]$. Dal momento che $\langle v_1, v_2 \rangle = 17$, $||v_2|| = \sqrt{20}$ e $||v_1||^2 = 17$ abbiamo:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{||v_1||^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Concludiamo dunque che una base ortonormale di V è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $U \cap V$ e $U + V$. Sfruttiamo le basi determinate al punto precedente. Sappiamo che

$$\dim(U + V) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3\,,$$

infatti le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, mentre la quarta è l'opposto della seconda. Ne segue che una base di $U+V$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Osservando le basi determinate al punto precedente è inoltre evidente che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartenga all'intersezione $U \cap V$. Dal momento che

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 1$$

concludiamo che una base di $U \cap V$ è proprio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. $\mathbb{R}^4 \neq U \oplus V$ poiché $U \cap V \neq \emptyset$.

Esercizio 4

Si denoti con $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 e con $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2$$

a) Si scelga una base di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Si scriva la matrice che rappresenta f rispetto a tali basi.

Rispetto alle basi canoniche

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad \{1, x, x^2\}$$

la matrice che rappresenta f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per determinarla è sufficiente calcolare le immagini dei vettori della base di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e incolonnarne le coordinate rispetto alla base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2\,, \quad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 + x$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x + x^2\,, \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Si determini una base e la dimensione di $\ker(f)$.

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a-b=0\,, b-c=0\,, -a+c=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{R} \right\} = L\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Ne deduciamo che $\dim(\ker(f)) = 2$.

c) Si determini una base e la dimensione di $im(f)$.

Ricordiamo che l'immagine di f (in coordinate rispetto alla base canonica) è generata dalle colonne della matrice A. Osserviamo che la terza colonna è l'opposto della somma delle prime due, risultando dunque linearmente dipendente dalle altre. Pertanto

$$im(f) = L\left[1 - x^2\,, -1 + x\right]$$

Ne deduciamo che $\dim(im(f)) = 2$. Si osservi che il calcolo delle dimensioni è in accordo con il Teorema della dimensione.

Esercizio 5 a) Classificare la conica $\gamma_k : (-5+k)x^2 - 6xy + (-5-k)y^2 + 1 = 0$ al variare del parametro k, e determinarne la forma canonica quando γ_k è una conica generale.

Le matrici della conica sono

$$Q = \begin{pmatrix} -5+k & -3 \\ -3 & -5-k \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -5+k & -3 & 0 \\ -3 & -5-k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo gli invarianti $I_1 = -10$, $I_2 = 16 - k^2$, $I_3 = 16 - k^2$. Pertanto la conica è degenere solo per $k = \pm 4$. La conica sarà:

- $-4 < k < 4$: ellisse reale poiché $I_2 > 0$ e $I_1 \cdot I_3 < 0$
- $k < -4$ o $k > 4$: iperbole reale poiché $I_2 < 0$ e $I_3 \neq 0$
- $k = \pm 4$: parabola degenere poiché $I_2 = I_3 = 0$

Gli autovalori di Q sono $\lambda = -5 + \sqrt{9+k^2}$ e $\mu = -5 - \sqrt{9+k^2}$, ne deduciamo che per $\det(Q) \neq 0$ ovvero per $k \neq \pm 4$ la forma canonica è

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (-5 + \sqrt{9+k^2})X^2 + (-5 - \sqrt{9+k^2})Y^2 + 1 = 0\,.$$

b) Determinare il grafico della conica per $k = 4$.

Per $k = 4$ abbiamo $\lambda = 0$ e $\mu = -10$. Essendo degenere, l'equazione canonica sarà della forma $\mu Y^2 + r = 0$, da cui deduciamo la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$. Dal Teorema di invarianza abbiamo $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$, dunque $r \neq 0$. Deduciamo che si tratta di una coppia di rette parallele (reali o immaginarie). Per determinare le eventuali equazioni di tali rette studiamo l'autospazio $E(0) = \ker(Q)$, descritto dalla retta di equazione $x + 3y = 0$. Le rette cercate saranno parallele a $E(0)$ e dunque imponiamo

$$(x + 3y + h)(x + 3y + k) = 0 \qquad \Rightarrow x^2 + 6xy + 9y^2 + (h+k)x + 3(h+k)y + hk = 0\,.$$

Per $k = 4$ l'equazione della conica è $-x^2 - 6xy - 9y^2 + 1 = 0$ e dunque studiamo il sistema

$$\begin{cases} h + k = 0 \\ hk = -1 \end{cases}$$

da cui si ottiene $h = 1$ e $k = -1$ (oppure equivalentemente $h = -1$ e $k = 1$. Concludiamo che il grafico della conica è una coppia di rette parallele di equazioni:

$$r_1 \colon x + 3y + 1 = 0\,, \qquad r_2 \colon x + 3y - 1 = 0\,.$$

Per una soluzione alternativa e più rapida potevamo ragionare come segue. Per $k = 4$ l'equazione della conica è $-x^2 - 6xy - 9y^2 + 1 = 0$, che possiamo riscrivere come differenza di quadrati: $1-(x+3y)^2 = 0$. Ne segue che l'equazione si fattorizza come $(1-x-3y)(1+x+3y) = 0$, da cui deduciamo nuovamente che il grafico è una coppia di rette parallele di equazioni:

$$r_1\colon x + 3y + 1 = 0\,, \qquad r_2\colon x + 3y - 1 = 0\,.$$

Esercizio 6 Dato $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni seguenti. Si ricordi che $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

- $f(e_1) = e_1 - e_2$,
- $f(e_2) = e_1 - e_2$,
- $f(e_3) = e_1 - e_2 + ke_3$,

a) Determinare gli eventuali valori di k per cui l'endomorfismo risulta diagonalizzabile.

La matrice canonica di f è della forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$. Calcolando il polinomio caratteristico otteniamo

$$\det(A - \lambda Id) = \lambda^2(k - \lambda)$$

da cui $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = k$. Distinguiamo due casi:

- Se $\mathbf{k = 0}$ abbiamo l'unico autovalore nullo di molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica $MG(0) = 3 - \text{rk}(A) = 3 - 1 = 2$. Pertanto in questo caso l'endomorfismo non è diagonalizzabile.
- Se $\mathbf{k \neq 0}$ abbiamo due autovalori distinti di molteplicità:

$$MA(k) = 1 \Rightarrow MG(k) = 1$$

$$MA(0) = 2, \text{ ma } MG(0) = 3 - \text{rk}(A) = 3 - 2 = 1\,.$$

Pertanto anche in questo caso l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

b) Stabilire la dimensione del nucleo e dell'immagine di f al variare di k.

$$\dim(im(A)) = \text{rk}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Dal Teorema della dimensione:

$$\dim(\ker(f)) = 3 - \text{rk}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0\,. \end{cases}$$

c) Determinare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'endomorfismo risulta suriettivo.

L'immagine ha dimensione minore di 3 per ogni $k \in \mathbb{R}$ come determinato al punto precedente. Ne segue che f non è suriettivo per alcun valore di $k \in \mathbb{R}$.